

MỘT MỞ RỘNG CỦA BẤT ĐẲNG THỨC HERMITE-HADAMARD CHO LỚP HÀM DƯỚI CỘNG TÍNH

Nguyễn Tấn Sự¹, Nguyễn Lê Duy¹

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu về một số bất đẳng thức tích phân cho lớp hàm (α, β) -dưới cộng tính. Đây là lớp hàm mở rộng của hàm lồi theo nghĩa thông thường. Một số kết quả mới về bất đẳng thức tích phân được thiết lập cho lớp hàm này.

Từ khóa: Hàm (α, β) -dưới cộng tính, hàm lồi, bất đẳng thức Hermite-Hadamard, bất đẳng thức tích phân.

1. Mở đầu

Hàm lồi đóng vai trò quan trọng không chỉ trong giải tích toán học mà còn có nhiều ý nghĩa trong các bài toán về tối ưu hóa, về kinh tế. Người ta sử dụng hàm lồi và các tính chất của nó để chứng minh một số bất đẳng thức kinh điển như Cauchy-Schwarz, Hermite-Hadamard, ... Người ta đã nghiên cứu và mở rộng lớp các hàm lồi dưới nhiều dạng khác nhau như hàm n -lồi [1] và s -lồi [2]. Các bài toán mới đặt ra là: nghiên cứu một số đặc trưng mới của lớp các hàm này và mở rộng các tính chất cổ điển đối với lớp các hàm này.

Gần đây nhất, năm 2024, khi nghiên cứu về sự hội tụ của dãy các hàm chỉnh hình có trọng thì Thái Thuần Quang [3] đã đưa ra một khái niệm mới về tính dưới cộng tính theo các hằng số α, β theo nghĩa, hàm số f được gọi là (α, β) -dưới cộng tính nếu

$$f(x + y) \leq \alpha(f(\beta x) + f(\beta y))$$

với mọi x, y thuộc $(0; +\infty)$.

Nội dung của bài báo được chia thành hai phần: Trong phần đầu, chúng tôi trình bày về một số kiến thức chuẩn bị và giới thiệu về lớp hàm mới: (α, β) -dưới cộng tính. Phần còn lại của bài báo, chúng tôi nghiên cứu về các bất đẳng thức tích phân đối với trường hợp hàm (α, α^{-1}) -dưới cộng tính. Đây là những kết quả mới, mở rộng thực sự của các kết quả cổ điển.

2. Một số kiến thức chuẩn bị

Trong mục này, chúng tôi trình bày hai khái niệm về hàm lồi và hàm (α, β) -dưới cộng tính.

Định nghĩa 1. Hàm số $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là lồi nếu với mọi x, y thuộc $(a; b)$ với mọi α thuộc $(0; 1)$ thì

$$f(\alpha x + (1 - \alpha)y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha)f(y).$$

Ta biết rằng nếu f là hàm số lồi và có đạo hàm đến cấp 2 thì $f''(x) \geq 0$, $\forall x \in (a; b)$.

Định nghĩa 2. Hàm số $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là *dưới cộng tính* nếu với mọi x, y thuộc $(a; b)$ thì

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

Định nghĩa 3. Hàm số $f: (a; b) \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là (α, β) -*dưới cộng tính* nếu với mọi x, y thuộc $(a; b)$ thì

$$f(x + y) \leq \alpha(f(\beta x) + f(\beta y)).$$

Ví dụ 1

- Hàm số $f(x) = \sqrt{x}$ là dưới cộng tính trên $(0; +\infty)$ nhưng không là hàm cộng tính.

- Hàm số $f(x) = e^x$ là hàm số lồi trên $(0; +\infty)$.

Ví dụ 2. Mọi hàm số lồi là $(\frac{1}{2}, 2)$ - *dưới cộng tính*.

Thật vậy, vì f là hàm số lồi nên $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Trong bất đẳng thức trên, chỉ việc thay x bởi $2x$ và y bởi $2y$ thì ta được

$$f(x + y) \leq \frac{f(2x) + f(2y)}{2}.$$

3. Bất đẳng thức tích phân cho các hàm dưới cộng tính

Do sự quan trọng và phép chứng minh khá kinh điển của Bất đẳng thức Hermite-Hadamard, chúng tôi cần nhắc lại định lý sau:

Định lý 2.1. (*Bất đẳng thức Hermite-Hadamard*) Cho $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ là một hàm lồi, khi đó ta có bất đẳng thức

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (2.1)$$

Chứng minh

Vì f là hàm lồi trên đoạn $[a, b]$, nên với mọi $x \in [a, b]$, tồn tại $t \in [0, 1]$ sao cho

$x = ta + (1-t)b$. Khi đó theo tính chất hàm lồi:

$$f(x) = f(ta + (1-t)b) \leq tf(a) + (1-t)f(b)$$

Lấy tích phân hai vế theo t từ 0 đến 1, ta có:

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt \leq \int_0^1 [tf(a) + (1-t)f(b)] dt = \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

Đặt $x = ta + (1-t)b$, suy ra $t = \frac{b-x}{b-a}$. Khi đó ta có:

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx = \int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt \leq \frac{f(a) + f(b)}{2} \quad (1)$$

Vì f là hàm lồi nên

$$\begin{aligned} f\left(\frac{a+b}{2}\right) &\leq \frac{1}{2} \int_0^1 \left[f\left(\frac{a+b-t(b-a)}{2}\right) + f\left(\frac{a+b+t(b-a)}{2}\right) \right] \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x) dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x) dx \right) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \end{aligned}$$

(2)

Từ (1) và (2), bất đẳng thức được chứng minh.

Định lý 2.2. Cho $I \subset \mathbb{R}$ là một khoảng với $0 \in I$, $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, là một hàm dưới cộng tính, $a, b \in I$ với $a < b$. và $f \in L[a, b]$, khi đó bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx + \frac{1}{b} \int_0^b f(x) dx \quad (2.2)$$

Chứng minh

Vì f là hàm dưới cộng tính nên $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$ với mọi $t \in [0; 1]$

$$\int_0^1 f(ta + (1-t)b) dt \leq \int_0^1 f(ta) dt + \int_0^1 f((1-t)b) dt$$

Đặt $x = ta + (1-t)b$ suy ra $dx = (a-b)dt$, ta có:

$$\frac{1}{a-b} \int_b^a f(x) dx \leq \frac{1}{a} \int_0^a f(x) dx + \frac{1}{b} \int_0^b f(x) dx$$

Định lý được chứng minh xong.

Định lý 2.3. Cho $I \subset \mathbb{R}$ là một khoảng với $0 \in I$, $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, là một hàm dưới cộng tính, $a, b \in I$ với $a < b$. và $f \in L[a, b]$, khi đó bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{f(b-a)}{2} \leq \frac{1}{b-a} \int_0^{b-a} f(x) dx \leq f(a) + \sup_{t \in [0, b-a]} f(t) \quad (2.3)$$

Chứng minh

Ta có $f(x) = f(a+x-a) \leq f(a) + f(x-a)$

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b f(a)dx + \int_a^b f(x-a)dx = (b-a)f(a) + \int_a^b f(x-a)dx \quad (1)$$

Ta đánh giá cận trên của $I = \int_a^b f(x-a)dx$.

Đặt $t = x-a$, suy ra $t \in [0; b-a]$. Từ đó suy ra

$$I = \int_0^{b-a} f(t)dt \leq \int_0^{b-a} \sup_{t \in [0, b-a]} f(t)dt = (b-a) \sup_{t \in [0, b-a]} f(t) \quad (2)$$

Vì f là hàm dưới cộng tính, nên $f(b-a) = f(t+b-a-t) \leq f(t) + f(b-a-t)$

$$\text{Suy ra } \int_0^{b-a} f(b-a)dt \leq \int_0^{b-a} [f(t) + f(b-a-t)]dt = 2 \int_0^{b-a} f(t)dt \quad (3)$$

$$\text{Từ (1), (2), (3) ta có } \frac{f(b-a)}{2} \leq \frac{1}{b-a} \int_0^{b-a} f(x)dx \quad (I)$$

Định lý được chứng minh.

* Nhận xét

Nếu f là hàm số đồng biến, ta có : $f(t) \leq f(b-a)$

$$\text{Từ đó, suy ra: } \int_0^{b-a} f(t)dt \leq \int_0^{b-a} f(b-a)dt = (b-a)f(b-a) \quad (4)$$

Từ (1), (2), (3) và (4), ta suy ra $\int_a^b f(x)dx \leq (b-a)f(a) + (b-a)f(b-a)$

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(a) + f(b-a) \quad (II)$$

$$\text{Từ (I) và (II) ta có } \frac{f(b-a)}{2} \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq f(a) + f(b-a) \quad (2.4)$$

Định lý 2.4. Cho $\alpha, \beta > 0, I \subset \mathbb{R}$ là một khoảng với $0 \in I, f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, là một hàm (α, β) - dưới cộng tính, $a, b \in I$ với $a < b$. và $f \in L[a, b]$, khi đó bất đẳng thức sau đúng

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq \alpha \left[f(\beta a) + \sup_{t \in [0, b-a]} f(t) \right] \quad (2.5)$$

Chứng minh

Đặt $x = a + t$

Vì f là hàm (α, β) - dưới cộng tính, nên ta có

$$f(x) = f(a + t) \leq \alpha [f(\beta a) + f(\beta t)]$$

Lấy tích phân hai vế

$$\begin{aligned} \int_0^{b-a} f(x) dx &= \int_0^{b-a} f(a + t) dt \leq \alpha \int_0^{b-a} [f(\beta a) + f(\beta t)] dt \\ &= \alpha(b-a) f(\beta a) + \alpha \int_0^{b-a} f(\beta t) dt \end{aligned} \quad (1)$$

Đặt $u = \beta t$, $t \in [0, b-a]$, ta có:

$$\int_0^{b-a} f(\beta t) dt = \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta(b-a)} f(\beta t) d(\beta t) = \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta(b-a)} f(t) dt$$

Gọi $M = \sup_{t \in [0, b-a]} f(t)$, ta suy ra

$$\int_0^{b-a} f(\beta t) dt \leq \frac{1}{\beta} \int_0^{\beta(b-a)} M dt = (b-a) \sup_{t \in [0, b-a]} f(t) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có

$$\begin{aligned} \int_0^{b-a} f(x) dx &\leq \alpha(b-a) f(\beta a) + \alpha(b-a) \sup_{t \in [0, b-a]} f(t) \\ \frac{1}{b-a} \int_0^{b-a} f(x) dx &\leq \alpha \left[f(\beta a) + \sup_{t \in [0, b-a]} f(t) \right] \end{aligned}$$

Định lý được chứng minh.

* Nhận xét

a) Với $\alpha = \beta = 1$ thì Định lý 2.4 thành Định lý 2.3

b) Nếu f là hàm số đồng biến, ta có $f(t) \leq f(b-a)$ với $t \in [0, b-a]$

Đặt $u = \beta t$, $u \leq \beta(b-a)$, ta có

$$\begin{aligned} \frac{1}{b-a} \int_0^{b-a} f(\beta t) dt &= \frac{1}{\beta(b-a)} \int_0^{\beta(b-a)} f(u) d(u) \\ &\leq \frac{1}{\beta(b-a)} \int_0^{\beta(b-a)} f(\beta(b-a)) d(\beta t) = f(\beta(b-a)) \end{aligned}$$

$$\text{Suy ra } \frac{1}{\beta(b-a)} \int_0^{b-a} f(x) dx \leq \alpha \left[f(\beta a) + f(\beta(b-a)) \right] \quad (2.6)$$

Như vậy, với $\alpha = \beta = 1$ thì (2.6) thành (2.4).

4. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu một số phiên bản mới của bất đẳng thức Hermite đối với lớp hàm dưới cộng tính. Các kết quả trên là mới và là các mở rộng thực sự của các bất đẳng thức cổ điển.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1]. A. E. Farissi, *Some proof and refinement of Hermite-Hadamard inequality*, Jour. Math. Ineq., Vol. 4, (3), 365-369.
- [2]. M. Sarikaya, M.A. Ali, *Hermite-Hadamard inequalities and related inequalities for subadditive functions*, Miskolc Mathematical Notes, Vol. 22, 2021, No. 2, pp. 929-937.
- [3]. Thai Thuan Quang, *Convergence with respect to admissible sequences of weights for a holomorphic space of a sequence of Hilbert-valued rational functions*, Filomat 38:8 (2024), 2923-2940.

AN EXTENSION OF THE HERMITE-HADAMARD INEQUALITY FOR THE CLASS OF SUBADDITIVE FUNCTIONS

Nguyen Tan Su¹, Nguyen Le Duy¹

ABSTRACT

In this paper, we investigate several integral inequalities for the class of (α, β) -subadditive functions. This class of functions generalizes the classical notion of convex functions. Furthermore, some new results regarding integral inequalities are established for this specific class of functions.

Keywords: (α, β) -subadditive functions, convex functions, Hermite-Hadamard inequality, integral inequalities.



¹Khoa Sư phạm Tự nhiên, Trường Đại học Phạm Văn Đồng; Email: ntsu@pdu.edu.vn.