

MỘT ỨNG DỤNG CỦA KHAI TRIỂN TAYLOR

A APPLICATION OF TAYLOR SERIES EXPANSION

Võ Thị Thu Thủy, Trần Ngọc Hậu

Khoa cơ bản, Trường Đại học Giao Thông Vận Tải TP. Hồ Chí Minh

Tóm tắt. Bài báo sử dụng phương pháp khai triển Taylor được đề cập trong chứng minh định lý giới hạn trung tâm của Trotter vào năm 1959 để tìm phân phối giới hạn của tổng hình học. Kỹ thuật chủ yếu là sử dụng khai triển Taylor đến cấp hai và các đánh giá liên quan.

Từ khóa. Xấp xỉ Laplace, toán tử Trotter, khai triển Taylor, phân phối Laplace, tổng ngẫu nhiên.

Chỉ số phân loại: 1.1

Abstract. The aim goal of this paper is to study the limit theorem on convergence in distribution for geomtric sums by method Taylor series expansion which was mainly introduced to proof of the Central limit theorem by Trotter H. F. in 1959. The bacis idea is that of using a second – order Taylor series expansion and techniques of estiamation apply.

Keyword. Laplace approximation, Trotter operator, Taylor series expansion, Laplace distribution, random sum.

Classification number: 1.1

1. Giới thiệu

Định lý giới hạn trung tâm là một trong những định lý giới hạn đóng vai trò quan trọng và được ứng dụng trong thống kê. Có nhiều phương pháp chứng minh định lý này, nổi bật và được nhiều tác giả biết đến đó là phương pháp sử dụng hàm đặc trưng, nó được trình bày trong hầu hết các tác phẩm viết về định lý giới hạn trung tâm. Một phương pháp quan trọng cũng được kể đến là phương pháp Stein, những ưu việt của phương pháp này nằm ở việc đánh giá được tốc độ hội tụ một cách sắc bén. Một phương pháp khác được kể đến là phương pháp toán tử Trotter được Trotter H. F. đưa ra lần đầu tiên vào năm 1959 để chứng minh định lý giới hạn trung tâm cho dãy biến ngẫu nhiên cùng phân phối (xem [8]), phương pháp này sử dụng khai triển Taylor đến cấp hai và kết hợp với các đánh giá bất đẳng thức liên quan. Điều thuận lợi để dùng phương pháp Trotter là biến ngẫu nhiên tiệm cận khả phân vô hạn hay phân tích được (xem [1], [2], [8]). Sau Trotter H. F., nổi bật nhất là Butzer cùng các đồng nghiệp của mình đã dùng phương pháp này cho việc chứng minh và đánh giá tốc độ hội tụ trong định lý giới hạn trung tâm cho dãy biến ngẫu nhiên không cùng phân phối (xem [1], [2]). Chuyển sang sử dụng phương pháp toán tử Trotter cho các định lý giới hạn liên quan đến tổng ngẫu nhiên,

phương pháp này cũng tỏ ra rất hiệu quả, nhiều kết quả được đưa ra sau này của T. L. Hùng (xem [7]).

Việc sử dụng phương pháp toán tử Trotter trong các định lý giới hạn liên quan đến tổng ngẫu nhiên của đòi hỏi biến giới hạn cũng phải khả phân vô hạn hay phân tích được. Phân phối Laplace đối xứng là một trong rất nhiều phân phối khả phân hình học (xem[4]). Ta sẽ chỉ ra điều này trong phần chứng minh kết quả chính.

Gọi $\{X_j\}, j \geq 1$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập, tổng hình học được xác định

$$S_{v_q} = X_1 + X_2 + \dots + X_{v_q},$$

trong đó v_q là biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối hình học với tham số $q \in (0,1)$ kí hiệu là $v_q \sim \text{Geo}(q)$ độc lập với tất cả các $X_j, j \geq 1$ có phân phối xác suất

$$P(v_q = k) = q(1-q)^{k-1}, k = 1, 2, \dots$$

Tổng hình học có nhiều ứng dụng thực tế liên quan đến thời gian đợi rời rạc như ứng dụng trong lý thuyết xếp hàng, lý thuyết rủi ro, độ tin cậy, ...(xem [3], [6]). Từ các ứng dụng đặt ra vấn đề là xác định phân phối xác suất hay tìm một xấp xỉ cho phân phối xác suất của tổng hình học. Rényi đã chỉ ra rằng

$$\frac{S_{\nu_q}}{E(\nu_q)} \xrightarrow{d} Z \text{ khi } q \rightarrow 0^+.$$

Với Z là biến ngẫu nhiên có phân phối mũ, kì vọng là m , tổng hình học S_{ν_q} của dãy các biến ngẫu nhiên không âm, độc lập cùng phân phối với kì vọng m . Ta sử dụng ký hiệu " $\xrightarrow{d}$ " để chỉ sự hội tụ theo phân phối. Năm 2011, Toda A. A. đã đưa ra một số điều kiện để

$$\frac{S_{\nu_q}}{\sqrt{E(\nu_q)}} \xrightarrow{d} L \text{ khi } q \rightarrow 0^+.$$

Trong đó, tổng hình học S_{ν_q} của dãy biến ngẫu nhiên độc lập nhưng không nhất thiết cùng phân phối, L là biến ngẫu nhiên có phân phối Laplace bất đối xứng (xem chi tiết trong [6]). Phương pháp được Toda sử dụng vẫn là phương pháp hàm đặc trưng. Bài báo này sử dụng phương pháp toán tử Trotter để chứng minh kết quả giới hạn theo phân phối của $\frac{S_{\nu_q}}{\sqrt{E(\nu_q)}}$ khi $p \rightarrow 0^+$ với S_{ν_q} là tổng hình học các biến ngẫu nhiên cùng phân phối xác suất.

2. Toán tử Trotter

Định nghĩa 1. Với mỗi $f \in C_B(\mathbb{R})$ là hàm liên tục đều và bị chặn trên $\mathbb{R}$. Toán tử Trotter liên kết với biến ngẫu nhiên X kí hiệu V_X ,

$$\begin{aligned} V_X : C_B(\mathbb{R}) &\rightarrow C_B(\mathbb{R}) \\ f &\mapsto V_X f(y) = E\{f(x+y)\} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(x+y) dF_X(x). \end{aligned}$$

Toán tử Trotter được Trotter H. F. xây dựng đầu tiên năm 1959 (xem [5]). Một số tính chất quan trọng sau đây được trình bày chi tiết trong [1], [2], [5]

1. Nếu X_1 và X_2 là hai biến ngẫu nhiên cùng phân phối thì $V_{X_1} f \equiv V_{X_2} f$;

2. Gọi $\{X_n, n \geq 1\}$ là dãy các biến ngẫu nhiên, khi đó với mỗi $f \in C_B(\mathbb{R})$ nếu

$\lim_{n \rightarrow \infty} \|V_{X_n} f - V_X f\| = 0$ thì $X_n \xrightarrow{d} X$, với chuẩn được xác định $\|V_X f\| = \sup_y |V_X f(y)|$;

3. Giả sử $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là hai dãy biến ngẫu nhiên độc lập theo mỗi nhóm. Gọi ν là biến ngẫu nhiên nhận giá trị nguyên dương độc lập với tất cả các biến ngẫu nhiên $X_n, Y_n, n \geq 1$. Khi đó ta có

$$\begin{aligned} i. & \left\| V_{\sum_{k=1}^n X_k} f - V_{\sum_{k=1}^n Y_k} f \right\| \leq \sum_{k=1}^n \|V_{X_k} f - V_{Y_k} f\| \\ ii. & \left\| V_{\sum_{k=1}^N X_k} f - V_{\sum_{k=1}^N Y_k} f \right\| \leq \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} P(\nu = k) \sum_{i=1}^k \|V_{X_i} f - V_{Y_i} f\|. \end{aligned}$$

Nếu $\{X_n, n \geq 1\}$ và $\{Y_n, n \geq 1\}$ là hai dãy biến ngẫu nhiên độc lập và cùng phân phối theo mỗi nhóm thì ta có

$$\begin{aligned} i. & \left\| V_{\sum_{k=1}^n X_k} f - V_{\sum_{k=1}^n Y_k} f \right\| \leq n \|V_{X_1} f - V_{Y_1} f\|; \\ ii. & \left\| V_{\sum_{k=1}^N X_k} f - V_{\sum_{k=1}^N Y_k} f \right\| \leq E(\nu) \|V_{X_1} f - V_{Y_1} f\|. \end{aligned}$$

Trước khi đi vào phần kết quả chính, ta cần đề cập đến phân phối Laplace. Biến ngẫu nhiên Z được gọi là có phân phối Laplace với hai tham số α, λ , kí hiệu $Z \sim \text{Laplace}(\alpha, \lambda)$ nếu nó có hàm mật độ xác suất

$$f_Z(x) = \frac{\lambda}{2} e^{-\lambda|x-\alpha|}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Với $Z \sim \text{Laplace}(\alpha, \lambda)$, Z có kỳ vọng, phương sai tương ứng là $E(Z) = \alpha$, $\text{Var}(Z) = \frac{2}{\lambda^2}$ và hàm đặc trưng φ_Z được xác định

$$\varphi_Z(t) = \frac{\lambda^2}{\lambda^2 + t^2} e^{i\alpha t}.$$

3. Kết quả chính và thảo luận

Trong phần trình bày kết quả chính ta sử dụng kí hiệu $C_B^2(\mathbb{R})$ chỉ lớp hàm thực có đạo hàm cấp hai liên tục đều và bị chặn. Kí hiệu

hàm phân phối xác suất $F(x) = P(X < x)$ và vi phân tương ứng $dF(x)$.

Định lý. Giả sử $\{X_j\}_{j \geq 1}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập cùng phân phối xác suất với biến ngẫu nhiên X có kỳ vọng $E(X) = 0$, phương sai $D(X) = \sigma^2 < +\infty$. Gọi v_p là biến ngẫu nhiên có phân phối hình học với tham số $q \in (0, 1)$ độc lập với tất cả các $X_j, j \geq 1$. Khi đó

$$\frac{S_{v_q}}{\sqrt{E(v_q)}} \xrightarrow{d} Z \text{ khi } q \rightarrow 0^+.$$

Trong đó, $Z \sim \text{Laplace}\left(0, \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right)$ và

$$S_{v_q} = \sum_{j=1}^{v_q} X_j.$$

Trước khi đi vào phần chứng minh định lý ta xét bổ đề sau, kết quả tổng quát của bổ đề này cũng được đề cập trong [4].

Bổ đề. Giả sử $\{Z_j\}_{j \geq 1}$ là dãy biến ngẫu nhiên độc lập, cùng phân phối Laplace $\text{Laplace}(0, \lambda)$, v_p là biến ngẫu nhiên có phân phối hình học với tham số $q \in (0, 1)$ độc lập với tất cả các $Z_j, j \geq 1$. Khi đó,

$$\sqrt{q} \sum_{j=1}^{v_q} Z_j \sim \text{Laplace}(0, \lambda).$$

Chứng minh. Gọi ϕ_{v_q} là hàm sinh xác suất của biến ngẫu nhiên hình học v_q khi đó

$$\phi_{v_q}(s) = E(s^{v_q}) = \frac{qs}{1 - (1-q)s}, |s| < \frac{1}{1-q}.$$

Theo Feller W. (xem [5]) thì hàm đặc trưng của tổng hình học $S_{v_q} = \sum_{j=1}^{v_q} Z_j$ được xác định

$$\begin{aligned} \phi_{S_{v_q}}(t) &= \phi_{v_q} \circ \phi_Z(t) = \frac{q \cdot \frac{\lambda^2}{t^2 + \lambda^2}}{1 - (1-q) \frac{\lambda^2}{t^2 + \lambda^2}} \\ &= \frac{q\lambda^2}{t^2 - q\lambda^2}. \end{aligned}$$

Trong đó, $\phi_{Z_1}(t) = \frac{\lambda^2}{t^2 + \lambda^2}$ là hàm đặc của biến ngẫu nhiên Z_1 . Từ đây dẫn đến hàm đặc trưng của $\sqrt{q}S_{v_q}$

$$\phi_{\sqrt{q}S_{v_q}}(t) = \phi_{S_{v_q}}(\sqrt{q}t) = \frac{\lambda^2}{t^2 - \lambda^2}.$$

Điều này chứng tỏ $\sqrt{q} \sum_{j=1}^{v_q} Z_j \sim \text{Laplace}(0, \lambda)$.

Chứng minh định lý. Từ bổ đề trên cho ta phép phân tích biến ngẫu nhiên Z dưới dạng tổng hình học của các biến độc lập cùng phân phối.

$$Z \stackrel{d}{=} \sqrt{q} \sum_{j=1}^{v_q} Z_j, \quad Z_j \sim \text{Laplace}\left(0, \frac{\sqrt{2}}{\sigma}\right).$$

Ta sử dụng kí hiệu “ $\stackrel{d}{=}$ ” cho bằng nhau theo phối, $\{Z_j\}_{j \geq 1}$ và $\{X_j\}_{j \geq 1}$ độc lập nên ta có

$$\begin{aligned} \left\| V_{\sqrt{q}S_{v_q}} f - V_{\sqrt{q} \sum_{j=1}^{v_q} Z_j} f \right\| &\leq \\ &\leq E(v_q) \cdot \left\| V_{\sqrt{q}X_1} f - V_{\sqrt{q}Z_1} f \right\| \\ &= q^{-1} \left\| V_{\sqrt{q}X_1} f - V_{\sqrt{q}Z_1} f \right\|. \end{aligned}$$

Trong đó, ta lấy hàm $f \in C_B^2(\mathbb{R})$.

Từ định nghĩa của toán tử Trotter ta có

$$\begin{aligned} V_{\sqrt{q}X_1} f(y) &= E\left(f(\sqrt{q}X_1 + y)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{q}x + y) dF_{X_1}(x). \end{aligned}$$

Áp dụng khai triển Taylor dạng

$$f(\sqrt{q}x + y) = f(y) + f'(y) \cdot \sqrt{q}x + \frac{f''(y)}{2} \cdot qx^2 + \frac{[f''(\eta) - f''(y)]}{2} \cdot qx^2.$$

Với η nằm giữa y và $\sqrt{q}x + y$ hay $|\eta - y| < \sqrt{q}|x|$.

Từ đó ta có

$$\begin{aligned} V_{\sqrt{q}X_1} f(y) &= \\ &= f(y) + \sqrt{q} f'(y) \int_{-\infty}^{+\infty} x dF_{X_1}(x) \\ &+ \frac{q}{2} f''(y) \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 dF_{X_1}(x) + \\ &+ \frac{q}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 [f''(\eta) - f''(y)] dF_{X_1}(x) \\ &= f(y) + \frac{p}{2} f''(y) \sigma^2 + \\ &+ \frac{q}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 [f''(\eta) - f''(y)] dF_{X_1}(x). \end{aligned}$$

Tương tự ta cũng có

$$\begin{aligned} V_{\sqrt{q}Z_1} f(y) &= \\ &= E \left[f(\sqrt{q}Z_1 + y) \right] \\ &= f(y) + \frac{q}{2} f''(y) \cdot \sigma^2 + \\ &+ \frac{q}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 [f''(\xi) - f''(y)] dF_{Z_1}(x). \end{aligned}$$

Trong đó, ξ thỏa $|\xi - y| < \sqrt{q}|x|$.

Do $f \in C_B^2(\mathbb{R})$, sử dụng tính liên tục đều và bị chặn của f'' ta có

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sao cho $\forall x, y \in \mathbb{R}$ nếu $|x - y| < \delta$ thì $|f''(x) - f''(y)| < \varepsilon$.

Từ đây dẫn đến đánh giá sau

$$\begin{aligned} & \left| V_{\sqrt{q}X_1} f(y) - V_{\sqrt{q}Z_1} f(y) \right| \\ &= \frac{q}{2} \left| \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 [f''(\eta) - f''(y)] dF_{X_1}(x) - \right. \\ & \quad \left. - \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 [f''(\xi) - f''(y)] dF_{Z_1}(x) \right| \\ &\leq \frac{q}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f''(\eta) - f''(y)| dF_{X_1}(x) \\ & \quad + \frac{q}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |f''(\xi) - f''(y)| dF_{Z_1}(x) \\ &\leq \frac{q}{2} \int_{|x| \leq \frac{\delta}{\sqrt{q}}} x^2 |f''(\eta) - f''(y)| dF_{X_1}(x) + \\ & \quad + \frac{q}{2} \int_{|x| > \frac{\delta}{\sqrt{q}}} x^2 |f''(\eta) - f''(y)| dF_{X_1}(x) + \\ & \quad + \frac{q}{2} \int_{|x| \leq \frac{\delta}{\sqrt{q}}} x^2 |f''(\xi) - f''(y)| dF_{Z_1}(x) + \\ & \quad + \frac{q}{2} \int_{|x| > \frac{\delta}{\sqrt{q}}} x^2 |f''(\xi) - f''(y)| dF_{Z_1}(x) \\ &\leq q\varepsilon \cdot \sigma^2 + \frac{q}{2} \int_{|x| > \frac{\delta}{\sqrt{q}}} x^2 |f''(\eta) - f''(y)| dF_{X_1}(x) + \\ & \quad + \frac{q}{2} \int_{|x| > \frac{\delta}{\sqrt{q}}} x^2 |f''(\xi) - f''(y)| dF_{Z_1}(x). \end{aligned}$$

Từ đó dẫn đến

$$\begin{aligned} & \left\| V_{\sqrt{q}X_1} f - V_{\sqrt{q}Z_1} f \right\| \\ &\leq \varepsilon \cdot \sigma^2 + \|f''\| \int_{|x| > \frac{\delta}{\sqrt{q}}} x^2 dF_{X_1}(x) + \\ & \quad + \|f''\| \int_{|x| > \frac{\delta}{\sqrt{q}}} x^2 dF_{Z_1}(x). \end{aligned}$$

Do các biến ngẫu nhiên X_1 và Z_1 có kỳ vọng hữu hạn nên khi $q \rightarrow 0^+$ thì

$$\varepsilon \cdot \sigma^2 + \|f''\| \int_{|x| > \frac{\delta}{\sqrt{q}}} x^2 dF_{X_1}(x) + \\ + \|f''\| \int_{|x| > \frac{\delta}{\sqrt{q}}} x^2 dF_{Z_1}(x) \rightarrow \varepsilon \sigma^2.$$

Điều này đúng với ε dương, bé tùy ý nên dẫn tới

$$\|V_{\sqrt{q}X_1} f - V_{\sqrt{q}Z_1} f\| \rightarrow 0 \text{ khi } q \rightarrow 0^+.$$

Định lý được chứng minh.

Việc sử dụng phương pháp toán tử Trotter trong chứng minh trên cho thấy việc áp dụng phương pháp này là phù hợp và có thể giải quyết được nhiều bài toán tương tự. Vấn đề tiếp theo là đánh giá tốc độ hội tụ của định lý giới hạn trên và đưa định lý vào không gian nhiều chiều góp phần giải quyết những vấn đề lý thuyết mà các bài toán trong thực tế đặt ra $\square$

Tài liệu tham khảo

- [1] Butzer P. L., Hahn L., and Westphal U., *On the rate of approximation in the central limit theorem*, J. Approx. Theory **13** (1975) 327–340.
- [2] Butzer, P. L., Hahn, L., *General theorems on rates of convergence in distribution of random variables I. General limit theorems*, Journal of multivariate analysis, **8**, (1978) 181-201.
- [3] Kalashnikov V., *Geometric Sums: Bounds for Rare Events with Applications*, Kuwer Academic Publishers, 1997.
- [4] Kozubowski T. J. and Rachev S. T., *Univariate Geometric Stable Laws*, Journal of Computational Analysis and Applications, Vol. 1, No. 2, 1999.
- [5] W. Feller, *Introduction to Theory Probability and Its Applications*, 1967, Vol. 2.
- [6] Toda, A. A., *Weak limit of the geometric sum of independent but not identically distributed random variables*, arXiv:1111.1786v2. 2011.
- [7] Tran Loc Hung, *The Trotter's operator method in the law of large numbers with random index*, Vietnam J. Math. **2** (1988) 4–9.
- [8] Trotter H.F., *An elementary proof of the central limit theorem*, No.10, Arch. Math Basel, 1959, pp. 226-234.

Ngày nhận bài: 1/3/2018

Ngày chuyển phản biện: 5/3/2018

Ngày hoàn thành sửa bài: 27/3/2018

Ngày chấp nhận đăng: 3/4/2018