

GIẢI SỐ CHO PHƯƠNG TRÌNH ĐẠO HÀM RIÊNG TỰA TUYẾN TÍNH

NUMERICAL SOLUTION OF QUASI-LINEAR PDEs

Huỳnh Văn Tùng

Khoa Cơ Bản, Trường Đại học Giao thông vận tải TP. Hồ Chí Minh

Tóm tắt: Trong bài báo này tác giả trình bày phối hợp các phương pháp số, bao gồm: Phương pháp hàm cơ sở bán kính, phương pháp lưới, phương pháp đường đặc trưng và phương pháp Runge – Kutta để giải số cho phương trình đạo hàm riêng tựa tuyến tính. Kết quả số được so sánh với nghiệm giải tích thông qua ví dụ mẫu.

Từ khóa: Phương trình đạo hàm riêng, tựa tuyến tính, hàm cơ sở bán kính, phương pháp Runge – Kutta, phương pháp lưới.

Chỉ số phân loại: 1.1

Abstract: This paper presents the combination of numerical methods, includes: Radial basis Function, grid-based, characteristic curves and Runge – Kutta to find numerical solutions for quasi-linear PDEs. The results will be compared with analytic solution via examples.

Keywords: PDE, quasi-linear, Radial basis Function, Runge – Kutta method, grid - based method.

Classification number: 1.1

1. Giới thiệu

Phương trình đạo hàm riêng (PDE) thường nảy sinh trong vật lý lý thuyết, động lực học, cơ học liên tục, quang học, hóa học, y học, ... Nói chung các PDE này thường không tìm được nghiệm giải tích của nó, nhưng thông qua các số liệu thu thập được từ bài toán thực tế tương ứng, bằng cách áp dụng những phương pháp số khác nhau chúng ta có thể tìm giá trị nghiệm xấp xỉ tại những điểm rời rạc trong miền khảo sát – gọi là **lời giải số**. Bài báo này trình bày phối hợp bốn phương pháp số, bao gồm: *Phương pháp hàm cơ sở bán kính, phương pháp lưới, phương pháp đường đặc trưng và phương pháp Runge – Kutta* để tìm lời giải số cho PDE tựa tuyến tính cấp 1 có dạng sau đây:

$$u_t + \alpha u_x + \beta u_y = F(x, y, t, u) \quad (1)$$

$$(x, y, t) \in D \times (0, T); D = (a, b) \times (c, d)$$

Trong đó: $u(x, y, t)$ là hàm số cần tìm của ba biến x, y, t ; với t là biến thời gian.

$$\begin{cases} \alpha = \alpha(x, y, t) \\ \beta = \beta(x, y, t) \\ F = F(x, y, t, u) \end{cases} \text{ là ba hàm số cho trước.}$$

Thỏa mãn điều kiện đầu:

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y), (x, y) \in D \quad (2)$$

Và các điều kiện biên:

$$\begin{cases} u(a, y, t) = \varphi_1(y, t) \\ u(b, y, t) = \varphi_2(y, t) \end{cases}, \begin{cases} c < y < d \\ 0 < t < T \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{cases} u(x, c, t) = \varphi_3(x, t) \\ u(x, d, t) = \varphi_4(x, t) \end{cases}, \begin{cases} a < x < b \\ 0 < t < T \end{cases} \quad (4)$$

$$\text{Các ký hiệu: } u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$$

2. Phương pháp lưới

Phương pháp lưới là một trong các phương pháp số thông dụng để giải bài toán biên đối với các PDEs. Ý tưởng của phương pháp thể hiện như sau: Trong miền biên thiên của các biến độc lập, ta tạo ra một lưới nhờ các mặt phẳng song song với các mặt phẳng tọa độ. Điểm giao nhau của các mặt phẳng đó gọi là các nút lưới. Ứng với mỗi bài toán, áp dụng các phương pháp số thích hợp để tìm giá trị nghiệm xấp xỉ tại các nút lưới.

Trong phần này, xét lưới đều được xác định bởi ba họ mặt phẳng song song với ba mặt phẳng tọa độ (Hình 1):

$$\begin{cases} x_i = a + i.h_x, i = \overline{0, N_1} \\ y_j = b + j.h_y, j = \overline{0, N_2} \\ t_k = k.h_t, k = \overline{0, N_3} \end{cases} \quad (5)$$

Trong đó:

$N_1, N_2, N_3 \in \mathbb{N}^*$ là số đoạn chia

$$h_x = \frac{b-a}{N_1}, h_y = \frac{d-c}{N_2}, h_t = \frac{T}{N_3} \quad (6)$$

Xuất phát từ giá trị của hàm u tại các nút lưới trên lớp $t = 0$ (điều kiện đầu):

$$\begin{cases} u_{i,j}^0 = u(x_i, y_j, 0) = \varphi(x_i, y_j) \\ i = \overline{0, N_1}; j = \overline{0, N_2} \end{cases} \quad (7)$$

Trên mỗi lớp thời gian $t = t_k, k = \overline{1, N_3}$ kế tiếp, tìm các xấp xỉ:

$$u(x_i, y_j, t_k) \approx u_{i,j}^k; i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2} \quad (8)$$

3. Phương pháp đường đặc trưng

Để khảo sát các đặc tính của hàm u tại nút lưới $N_{i,j}^k(x_i, y_j)$ ở lớp t_k , ta tìm một đường cong đặc trưng $\gamma_{i,j}^k$ (Hình 1) nối $N_{i,j}^k$ với một điểm $A_{i,j}^{k-1}(x_i^A, y_j^A)$ nào đó thuộc lớp t_{k-1} đã được khảo sát. Điểm $A_{i,j}^{k-1}$ được gọi là **chân đường đặc trưng**.

Phương trình (1) có họ đặc trưng [10] là:

$$\frac{dt}{1} = \frac{dx}{\alpha(x, y, t)} = \frac{dy}{\beta(x, y, t)} \quad (9)$$

Nếu coi $x = x(t), y = y(t)$ là các hàm của biến t thì $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}, t \in [t_{k-1}; t_k]$ là phương trình dạng tham số của $\gamma_{i,j}^k$ xuất phát từ $N_{i,j}^k$ và nó là nghiệm của bài toán Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = \alpha(x, y, t) \\ y'(t) = \beta(x, y, t) \\ x(t_k) = x_i, y(t_k) = y_j \end{cases}, t \in [t_{k-1}; t_k] \quad (10)$$

Dọc theo đường đặc trưng $\gamma_{i,j}^k$, ta có: $u(x, y, t) = u(x(t), y(t), t)$ là hàm của một biến t . Khi đó:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dt} \\ &= u_t + \alpha(x, y, t)u_x + \beta(x, y, t)u_y \end{aligned} \quad (11)$$

Thay (11) vào (1), thu được:

$$\frac{du}{dt} = F(x(t), y(t), t, u(x(t), y(t), t)) \quad (12)$$

Giá trị $u_{i,j}^k$ là nghiệm xấp xỉ của bài toán Cauchy sau:

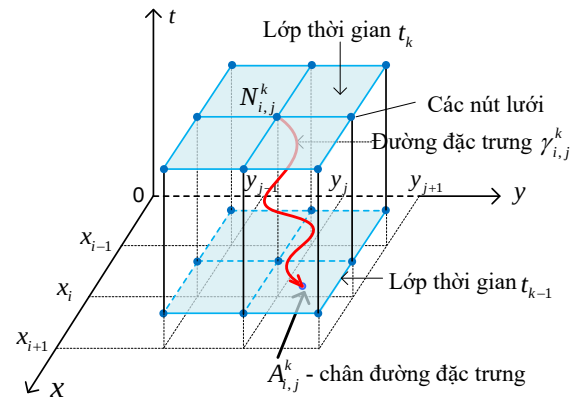
$$\begin{cases} \frac{du}{dt} = F(x(t), y(t), t, u(x(t), y(t), t)) \\ u(x_i^A, y_j^A, t_{k-1}) = u_{i,j}^A \end{cases} \quad (13)$$

Ba bài toán quan trọng của phương pháp đường đặc trưng cần thực hiện là:

Bài toán 1: Xác định đường đặc trưng $\gamma_{i,j}^k$ và điểm $A_{i,j}^{k-1}(x_i^A, y_j^A)$.

Bài toán 2: Tìm giá trị nội suy $u_{i,j}^A$ của $u(x_i^A, y_j^A, t_{k-1})$ tại $A_{i,j}^{k-1}$ thông qua các giá trị đã biết: $u_{i,j}^{k-1}; i = \overline{0, N_1}, j = \overline{0, N_2}$.

Bài toán 3: Từ giá trị $u_{i,j}^A$ và đường đặc trưng $\gamma_{i,j}^k$, tìm lại giá trị $u_{i,j}^k$ tại nút $N_{i,j}^k$.



Hình 1. Lưới đều và đường đặc trưng.

4. Phương pháp Runge-Kutta bậc 4 (RK4), giải bài toán 1 và bài toán 3

4.1. Giải bài toán 1 (tìm $\gamma_{i,j}^k$ và $A_{i,j}^{k-1}$)

Để biểu diễn số cho $\gamma_{i,j}^k$ xuất phát từ $N_{i,j}^k$ trên lớp t_k , ta áp dụng phương pháp RK4 từ bài toán Cauchy (10) như sau:

Chia đoạn $[t_{k-1}; t_k]$ thành $2s$ đoạn bằng nhau với bước $\Delta t = h_t / (2s)$, các điểm chia:

$$t_k^p = t_k - p \cdot \Delta t, p = \overline{0, 2s} \quad (14)$$

Công thức RK4 xác định (x_i^A, y_j^A) là:

$$x_i^0 = x_i; y_j^0 = y_j \quad (15)$$

$$\begin{cases} x_i^{p+1} = x_i^p + \frac{1}{6}(k_{1p} + 2k_{2p} + 2k_{3p} + k_{4p}) \\ y_j^{p+1} = y_j^p + \frac{1}{6}(l_{1p} + 2l_{2p} + 2l_{3p} + l_{4p}) \end{cases} \quad (16)$$

Trong đó:

$$\begin{cases} k_{1p} = -\Delta t \alpha(x_i^p, y_j^p, t_k^p) \\ k_{2p} = -\Delta t \alpha\left(x_i^p + \frac{k_{1p}}{2}, y_j^p + \frac{l_{1p}}{2}, t_k^p - \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_{3p} = -\Delta t \alpha\left(x_i^p + \frac{k_{2p}}{2}, y_j^p + \frac{l_{2p}}{2}, t_k^p - \frac{\Delta t}{2}\right) \\ k_{4p} = -\Delta t \alpha(x_i^p + k_{3p}, y_j^p + l_{3p}, t_k^p - \Delta t) \\ l_{1p} = -\Delta t \beta(x_i^p, y_j^p, t_k^p) \\ l_{2p} = -\Delta t \beta\left(x_i^p + \frac{k_{1p}}{2}, y_j^p + \frac{l_{1p}}{2}, t_k^p - \frac{\Delta t}{2}\right) \\ l_{3p} = -\Delta t \beta\left(x_i^p + \frac{k_{2p}}{2}, y_j^p + \frac{l_{2p}}{2}, t_k^p - \frac{\Delta t}{2}\right) \\ l_{4p} = -\Delta t \beta(x_i^p + k_{3p}, y_j^p + l_{3p}, t_k^p - \Delta t) \end{cases}$$

Khi $p = 2s-1$ ta thu được $\begin{cases} x_i^A = x_i^{2s} \\ y_j^A = y_j^{2s} \end{cases}$,

đồng thời tại các bước của vòng lặp, ta lưu lại các tọa độ $(x_i^1, y_j^1), \dots, (x_i^{2s-1}, y_j^{2s-1})$ để sử dụng cho bài toán 3.

4.2. Giải bài toán 3 (tìm $u_{i,j}^k$)

Giả sử bài toán 2 đã thực hiện, nghĩa là có xấp xỉ $u(x_i^A, y_j^A, t_{k-1}) \approx u_{i,j}^A$. Áp dụng phương pháp RK4 cho bài toán (13) trên đoạn $[t_{k-1}; t_k]$. Để sử dụng được các tọa độ $(x_i^1, y_j^1), \dots, (x_i^{2s}, y_j^{2s})$ dọc theo $\gamma_{i,j}^k$, chia đoạn $[t_{k-1}; t_k]$ thành s đoạn bằng nhau với

bước: $\Delta z = \frac{h_t}{s} = 2 \frac{h_t}{2s} = 2\Delta t$, các điểm chia:

$$z_{k-1}^r = t_{k-1} + r \Delta z, r = \overline{0, s} \quad (17)$$

Khi $r \in \{0, 1, \dots, s-1\}$, ta có:

$$\begin{cases} z_{k-1}^r = t_k - 2s \Delta t + 2r \Delta t = t_k^{2s-2r} \\ z_{k-1}^r + 0.5\Delta z = t_k^{2s-2r} + \Delta t = t_k^{2s-2r-1} \\ z_{k-1}^r + \Delta z = t_k^{2s-2r} + 2\Delta t = t_k^{2s-2r-2} \end{cases} \quad (18)$$

Suy ra:

$$\begin{cases} x(z_{k-1}^r) \approx x_i^{2s-2r} \\ x(z_{k-1}^r + 0.5\Delta z) \approx x_i^{2s-2r-1} \\ x(z_{k-1}^r + \Delta z) \approx x_i^{2s-2r-2} \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} y(z_{k-1}^r) \approx y_j^{2s-2r} \\ y(z_{k-1}^r + 0.5\Delta z) \approx y_j^{2s-2r-1} \\ y(z_{k-1}^r + \Delta z) \approx y_j^{2s-2r-2} \end{cases} \quad (20)$$

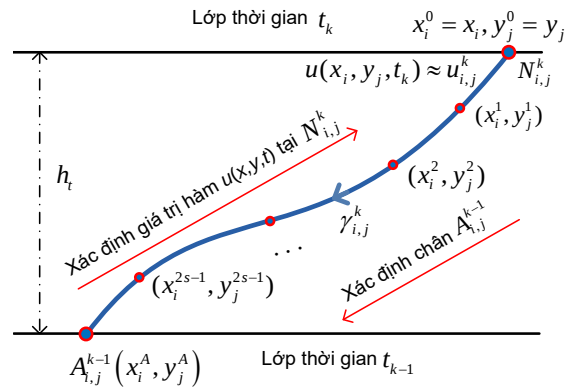
Công thức RK4 xác định $u_{i,j}^k$:

$$\begin{cases} u_{i,j}^{k,0} = u_{i,j}^A \\ u_{i,j}^{k,r+1} = u_{i,j}^{k,r} + \frac{m_{1r} + 2m_{2r} + 2m_{3r} + m_{4r}}{6} \end{cases} \quad (21)$$

Khi $r = s-1$, thu được $u_{i,j}^k = u_{i,j}^{k,s}$.

Trong đó:

$$\begin{cases} m_{1r} = \Delta z F(x_i^{2s-2r}, y_j^{2s-2r}, z_{k-1}^r, u_{i,j}^{k,r}) \\ m_{2r} = \Delta z F\left(x_i^{2s-2r-1}, y_j^{2s-2r-1}, z_{k-1}^r + \frac{\Delta z}{2}, u_{i,j}^{k,r} + \frac{m_{1r}}{2}\right) \\ m_{3r} = \Delta z F\left(x_i^{2s-2r-1}, y_j^{2s-2r-1}, z_{k-1}^r + \frac{\Delta z}{2}, u_{i,j}^{k,r} + \frac{m_{2r}}{2}\right) \\ m_{4r} = \Delta z F(x_i^{2s-2r-2}, y_j^{2s-2r-2}, z_{k-1}^r + \Delta z, u_{i,j}^{k,r} + m_{3r}) \end{cases}$$



Hình 2. Đường đặc trưng xuất phát từ $N_{i,j}^k$.

5. Phương pháp hàm cơ sở bán kính, giải bài toán 2

Phương pháp hàm cơ sở bán kính (RBF) được Powell (1987) đề xuất để giải quyết bài toán nội suy hàm nhiều biến [3]. Sau đó được Broomhead và Lowe (1988) giới thiệu như là mạng nơron [4]. Ưu điểm của mạng RBF là thời gian huấn luyện nhanh và luôn đảm bảo hội tụ đến cực trị toàn cục của sai số trung bình phương. Với các hàm cơ sở bán kính có tâm là các mốc nội suy thì có thể cho lời giải của bài toán nội suy. Vì vậy, mạng RBF tỏ ra là một phương pháp hiệu quả và được ứng dụng rộng rãi để nội suy và xấp xỉ hàm nhiều biến ([2],[3], [4], [5], [7], [8], [9], [11]).

5.1. Hàm cơ sở bán kính và bài toán nội suy

Xét hàm nhiều biến $f: D(\subset \mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}^m$ cho bởi tập N mẫu (mốc nội suy):

$$\{x^k, y^k\}_{k=1}^N \text{ với } x^k \in \mathbb{R}^n, y^k \in \mathbb{R}^m$$

Sao cho $f(x^k) = y^k, k = \overline{1, N}$.

Powell [3] đề xuất hàm nội suy dưới dạng tổ hợp tuyến tính của các hàm cơ sở bán

kính dạng Gauss:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^N w_k \varphi_k(x) + w_0 \quad (22)$$

Thỏa mãn:

$$\varphi(x^j) = y^j, j = \overline{1, N} \quad (23)$$

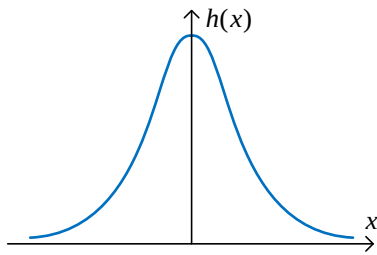
Trong đó:

$$\varphi_k(x) = e^{-\|x-x^k\|^2/\sigma_k^2}; k = \overline{1, N} \quad (24)$$

$$w_0 = \frac{1}{N}(y^1 + \dots + y^N) \quad (25)$$

Hàm φ_k trong (24) được gọi là **hàm cơ sở bán kính dạng Gauss**, x^k là tâm của φ_k , các tham số w_k, σ_k cần tìm sao cho thỏa hệ (23), $\|\cdot\|$ là ký hiệu một chuẩn nào đó (thông thường là chuẩn Euclide).

Khi $\|x - x_k\| > 3\sigma_k$ thì $\varphi(x) < e^{-9}$. Do đó σ_k còn được gọi là **tham số độ rộng** của φ_k , nó dùng để điều khiển miền ảnh hưởng của hàm cơ sở bán kính φ_k .



Hình 3. Hàm Gauss $h(x) = e^{-x^2}$, $\sigma = 1$.

Xét ma trận vuông A cấp N :

$$\begin{cases} A = [\varphi_{i,j}]_{N \times N} \\ \varphi_{i,j} = \varphi_j(x_i) = e^{-\|x^i - x^j\|^2/\sigma_j^2} \end{cases} \quad (26)$$

$$\text{Đặt } W = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_N \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} y^1 - w_0 \\ \vdots \\ y^N - w_0 \end{bmatrix}$$

Khi đó hệ (23) tương đương với phương trình ma trận

$$AW = Z \quad (27)$$

Micchelli [2] đã chứng minh rằng nếu các tham số σ_k đã được chọn và các mốc x^k khác nhau thì A là ma trận khả nghịch. Do đó hệ (23) (hay phương trình (27)) tồn tại duy nhất nghiệm $w_1, \dots, w_N$.

Giải (27) theo phương pháp lặp đơn. Khi đó (27) được viết lại như sau:

$$W = BW + Z \quad (28)$$

Trong đó:

$$B = I_N - A = [b_{i,j}]_{N \times N} \quad (29)$$

Với I_N là ma trận đơn vị cấp N và

$$b_{i,j} = \begin{cases} 0, & i = j \\ -e^{-\|x^i - x^j\|^2/\sigma_j^2}, & i \neq j \end{cases} \quad (30)$$

Chuẩn của ma trận được xét là chuẩn cột:

$$\|B\| = \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=1}^N |b_{i,j}| \quad (31)$$

Công thức lặp của phương pháp lặp đơn:

$$\begin{cases} W^0 = Z \\ W^{k+1} = BW^k + Z, k = 0, 1, \dots \end{cases} \quad (32)$$

Định lý 1. Nếu $\|B\| = q_B < 1$ thì dãy $\{W^k\}$ được xác định ở (32) hội tụ về nghiệm đúng W^* . Hơn nữa, có đánh giá sai số:

$$\|W^k - W^*\| \leq \frac{q_B}{1 - q_B} \cdot \|W^k - W^{k-1}\| \quad (33)$$

Chứng minh:

$$\text{Ta có: } \begin{cases} W^* = BW^* + Z \\ W^k = BW^{k-1} + Z \end{cases}$$

$$\Rightarrow W^k - W^* = B(W^{k-1} - W^*)$$

$$\Rightarrow \|W^k - W^*\| \leq \|B\| \|W^{k-1} - W^*\| \leq \dots \leq q_B^k \cdot \|Z - W^*\|$$

Vì $q_B < 1$ nên $\lim_{k \rightarrow \infty} q_B^k = 0$

Suy ra: $\lim_{k \rightarrow \infty} W^k = W^*$

$$\begin{cases} W^{k+1} = BW^k + b \\ W^k = BW^{k-1} + b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \|W^{k+1} - W^k\| \leq q \|W^k - W^{k-1}\|$$

$$\|W^k - W^*\| \leq \|W^k - W^{k+1}\| + \|W^{k+1} - W^*\| \leq q_B \|W^k - W^{k-1}\| + q_B \|W^k - W^*\|$$

$$\Rightarrow \|W^k - W^*\| \leq \frac{q_B}{1 - q_B} \cdot C_n^r \cdot \|W^k - W^{k-1}\|$$

Một cách tổng quát để tìm hàm nội suy $\varphi(x)$ xác định trong (22) (xem chi tiết [5]), người ta thực hiện hai pha: **pha 1** tìm các σ_k ; **pha 2** giải (28) bằng phương pháp lặp đơn để tìm nghiệm $w_1, \dots, w_N$. Trường hợp các mốc x^k cách đều, pha 1 của bài toán được xác định theo định lý 2 sau đây:

Định lý 2. Với mỗi số thực $q \in (0, 1)$ cho

trước, nếu lấy:

$$\sigma_k = \left[-\ln \left(\left(\sqrt[3]{1+q} - 1 \right) / 8 \right) \right]^{-1/2}, \forall k \quad (34)$$

$$\text{Thì } \|B\| = \max_{1 \leq j \leq N} \sum_{i=1}^N |b_{i,j}| < q.$$

Trong đó: n là số chiều của vector x , chuẩn của $x = (x_1 \dots x_n)^T$ được thay bằng **chuẩn Mahalanobis**:

$$\|x\|^2 = \frac{x_1^2}{h_1^2} + \dots + \frac{x_n^2}{h_n^2} \quad (35)$$

với h_j ($j=1, \dots, n$) là các bước.

Xem chứng minh chi tiết trong [11].

5.2. Giải bài toán 2 bằng phương pháp RBF

Bài toán 1 đã xác định được $A_{i,j}^{k-1}$. Để tìm giá trị nội suy $u_{i,j}^A$, xét $N=9$ điểm mẫu trên lớp $t = t_{k-1}$ (Hình 1):

$$\{(x_s, y_p); u_{s,p}^{k-1}\}, \begin{cases} s \in \{i-1, i, i+1\} \\ p \in \{j-1, j, j+1\} \end{cases} \quad (36)$$

Các tọa độ x_i, y_j, t_k xác định ở (5).

Hàm nội suy sử dụng RBF:

$$\varphi(x, y) = \sum_{s=i-1}^{i+1} \sum_{p=j-1}^{j+1} w_{s,p} \varphi_{s,p}(x, y) + w_0 \quad (37)$$

Trong đó:

$$\varphi_{s,p}(x, y) = e^{-L \frac{(x-x_s)^2}{h_x^2} + L \frac{(y-y_p)^2}{h_y^2}} \quad (38)$$

$$\text{Với } L = -\frac{1}{\sigma_k^2} = \ln \left(\frac{\sqrt{1+q}-1}{8} \right) \quad (39)$$

$$w_0 = \frac{1}{9} \sum_{s=i-1}^{i+1} \sum_{p=j-1}^{j+1} u_{s,p}^{k-1} \quad (40)$$

$$W = \begin{bmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_9 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} u_{i-1,j-1}^{k-1} - w_0 \\ \vdots \\ u_{i+1,j+1}^{k-1} - w_0 \end{bmatrix} \quad (41)$$

$B = [b_{s,p}^{\alpha,\beta}]_{9 \times 9}$ là ma trận đối xứng, với:

$$b_{s,p}^{\alpha,\beta} = \begin{cases} 0, & (\alpha, \beta) = (s, p) \\ -e^{-L \frac{(x_\alpha - x_s)^2}{h_x^2} + L \frac{(y_\beta - y_p)^2}{h_y^2}}, & (\alpha, \beta) \neq (s, p) \end{cases} \quad (42)$$

Giải (28) bằng phương pháp lặp đơn thu được nghiệm $w_1, \dots, w_9$.

Cuối cùng:

$$u_{i,j}^A = \varphi(x_i^A, y_j^A) \quad (43)$$

6. Giải số

Trong cả hai ví dụ sau, ta áp dụng phương pháp RBF cho hàm hai chiều ($n=2$), điều kiện dừng của (32) với sai số (33) là $\varepsilon = 10^{-6}$; lấy $q = 0.9$ trong định lý 2. Từ (39) suy ra: $L = -3.05123$.

Ví dụ 1. Bài toán nội suy áp dụng RBF

Cho hàm $u(x, y) = 2xy + \sin(3x - y + 1)$ trên miền $D = [0; 0.4] \times [0; 0.4]$. Lấy $N = 99$ điểm mẫu có bước chia và tọa độ sau:

$$hx = 0.05, hy = 0.04$$

$$\{(0.05i, 0.04j) : i = \overline{0; 8}, j = \overline{0; 10}\}$$

Lập trình số bằng phần mềm Mathematica, có bảng giá trị nội suy của hàm $u(x, y)$ tại một số điểm trong miền D .

Bảng 1. Giá trị nội suy của hàm $u(x, y)$ thông qua 99 hàm bán kính cơ sở.

x_i	y_j	Giá trị nội suy	Giá trị Hàm	Sai số tuyệt đối
0.0997	0.0395	0.95997	0.95984	0.00013
0.0012	0.2345	0.69812	0.69605	0.00207
0.1000	0.3246	0.89526	0.89285	0.00241
0.1500	0.3600	0.99463	0.99463	0.00000
0.2018	0.3987	1.09427	1.09536	0.00109
0.2509	0.3619	1.16409	1.16545	0.00136
0.3028	0.1215	1.04981	1.05032	0.00051
0.3500	0.0800	0.97737	0.97737	0.00000
0.3987	0.0397	0.86303	0.86504	0.00200
0.2068	0.1673	1.05424	1.06228	0.00804

Ví dụ 2. Xét phương trình PDE

$$u_t + \alpha u_x + \beta u_y = F(t, x, y, u) \quad (44)$$

Trong đó:

$$\begin{cases} \alpha(x, y, t) = 1 + x + 3t - x^2 - 9t^2 - 2 \cos 2y \\ \beta(x, y, t) = -\sin(2y) \\ F(x, y, t, u) = u^2 + (1 - 2x - 6t)u + 6xt \end{cases} \quad (45)$$

với $(x, y, t) \in (0, 3) \times (0, \pi) \times (0, T)$

Điều kiện đầu:

$$u(x, y, 0) = x - 2 \cos 2y \quad (46)$$

và thỏa các điều kiện biên:

$$\begin{cases} u(0, y, t) = 3t - 2 \cos 2y \\ u(3, y, t) = 3 + 3t - 2 \cos 2y \end{cases} \quad (47)$$

$$u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = x + 3t - 2 \quad (48)$$

Nghiệm đúng của bài toán (44) đến (48) là:

$$u(x, y, t) = x + 3t - 2 \cos 2y \quad (49)$$

Các bước lưới tương ứng trực $0x, 0y, 0t$:

$$h_x = 0.1; h_y = \pi / 20; h_t = 0.04$$

Tập các điểm lưới của miền khảo sát:

$$\begin{cases} x_i = ih_x = 0.1i, & i = \overline{0, 30} \\ y_j = jh_y = 0.05\pi j, & j = \overline{0, 20} \\ t_k = kh_t = 0.04k, & k = \overline{0, 1, 2, \dots} \end{cases}$$

Xét lớp $t_1 = 0.04$, tại mỗi điểm trong (x_i, y_j) ; $i = \overline{1, 29}, j = \overline{1, 19}$ thực hiện tính toán số bằng phần mềm Mathematica, có bảng sau cho giá trị xấp xỉ và giá trị nghiệm đúng của bài toán (44) đến (48), trong đó bài toán 1 và 3 lấy $s = 10$:

Bảng 2. Giá trị xấp xỉ và nghiệm đúng.

i	j	Giá trị xấp xỉ	Giá trị hàm	Sai số tuyệt đối
1	1	-1.69064	-1.68211	0.00853
1	8	1.82317	1.83803	0.01486
3	19	-1.49124	-1.48211	0.00913
4	11	2.45369	2.42211	0.03158
7	17	-0.38567	-0.35557	0.03010
10	2	-0.52216	-0.49803	0.02413
15	7	2.73841	2.79557	0.05716
16	12	3.29870	3.33803	0.03933
19	18	0.38537	0.40197	0.01660
24	10	4.51196	4.52000	0.00804
27	13	3.94195	3.99557	0.05362
29	9	4.88655	4.92211	0.03556

7. Kết luận

Việc sử dụng kết hợp các phương pháp số như phần trên đã trình bày sẽ giúp chúng ta giải số được nhiều PDEs tựa tuyến tính phức tạp có dạng (1) mà các phương pháp trước đây chưa giải được. Kết quả này là phần mở rộng của bài báo [12] với phần kiến thức bổ sung là phương pháp RBF. Bài báo cũng góp phần nâng cao việc dạy và học đối

với học phần **Phương pháp tính** tại Trường Đại học Giao thông vận tải Thành phố Hồ Chí Minh□

Tài liệu tham khảo

- [1] R.S. Varga, *Functional Analysis and Approximation Theory in Numerical Analysis*, SIAM, Philadelphia, Pennsylvania, 1971.
- [2] C.Micchelli, *Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions*, Constructive approximations, vol.2, pp. 11-22, 1986.
- [3] M.J.D. Powell, *Radial basis function approximations to polynomials*, Proceedings of the Numerical analysis 1987, Dundee, UK, pp. 223-241, 1988.
- [4] D.S. Broomhead and D. Lowe, *Multivariable functional interpolation and adaptive networks*, Complex Syst. vol. 2, pp. 321-355, 1988.
- [5] C.G. Looney, *Pattern recognition using neural networks: Theory and algorithm for engineers and scientist*, Oxford University press, New York, 1997.
- [6] L.C. Evans, *Partial differential Equations*, AMS Press, 1998.
- [7] B.J.C. Baxter, *The interpolation theory of Radial basis functions*, Ph.D, Cambridge University, 1992.
- [8] E. Blazieri, *Theoretical interpretations and applications of radial basis function networks*, Technical Report DIT-03- 023, Informatica e Telecomunicazioni, University of Trento, 2003.
- [9] M. D. Buhmann, *Radial Basis Functions: Theory and Implementations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [10] Trần Đức Vân, *Lý thuyết phương trình vi phân đạo hàm riêng*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội, 2005.
- [11] Đặng Thị Thu Hiền, *Luận án tiến sỹ công nghệ thông tin*, chuyên ngành Khoa học máy tính, mã số: 62.48.0101, Đại học Công nghệ, ĐHQG Hà Nội, 2009.
- [12] Huỳnh Văn Tùng, *Giải số cho phương trình đạo hàm riêng tựa tuyến tính cấp 1 hai biến*, Tạp chí KHCN GTVT, số 20 -08/20.

Ngày nhận bài: 1/3/2018

Ngày chuyển phản biện: 4/3/2018

Ngày hoàn thành sửa bài: 24/3/2018

Ngày chấp nhận đăng: 30/3/2018