

# DÁNG ĐIỀU TIỆM CẬN CỦA MÔ HÌNH DỊCH TỄ SIR VỚI BƯỚC CHUYỂN MARKOV ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF A STOCHASTIC SIR MODEL UNDER MARKOVIAN SWITCHING

Nguyễn Viết Dương<sup>1</sup>, Trần Đình Tường<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Khoa Cơ bản 2, Học viện Công nghệ Bưu chính Viễn thông cơ sở tại TP. Hồ Chí Minh

<sup>2</sup>Khoa Cơ bản, Trường Đại học Giao thông Vận tải TP. Hồ Chí Minh

**Tóm tắt:** Bài báo nghiên cứu mô hình dịch tễ SIR với nhiễu trắng và nhiễu màu. Với những giả thiết thích hợp, điều kiện tồn tại và duy nhất nghiệm của hệ được chỉ ra. Hơn nữa, bài báo còn chỉ ra ngưỡng để xác định tính chất nghiệm của hệ khi thời gian đủ lớn. Các ví dụ và mô phỏng số được trình bày để minh họa kết quả lý thuyết.

**Từ khóa:** Mô hình dịch tễ SIR, sự tuyệt chủng, bước chuyển Markov.

**Chỉ số phân loại:** 1.1

**Abstract:** This work is concerned with long - time behavior of a SIR epidemic model perturbed by both white noise and colour noise. The existence and unique solution are given. Further, a threshold value whose sign specifies whether or not the disease goes to extinct or survive permanently is provided. Finally, some numerical solutions to illustrate our results are presented.

**Keywords:** SIR epidemic model; extinction; regime switching; markovian switching.

**Classification number:** 1.1

## 1. Giới thiệu

Lịch sử nhân loại đã trải qua rất nhiều dịch bệnh nguy hiểm. Từ năm 165 – 180 dịch bệnh Antonine đã làm suy tàn đế chế La Mã từng hùng bá châu Âu, hơn 1/3 dân số châu Âu thời đó ước tính hơn 5 triệu người đã thiệt mạng do bệnh dịch này. Tới những năm 1338 – 1351 nổi ám ảnh kinh hoàng của loài người phải nhắc đến đại dịch “cái chết đen” đã lấy đi sinh mạng hơn 75 triệu người. Ngày nay loài người cũng đã trải qua nhiều bệnh dịch nguy hiểm như bệnh HIV/AIDS, dịch bệnh tả, sởi, sốt rét, cúm gà H5N1, SARS,...các đại dịch này đã lấy đi hàng triệu sinh mạng dẫn đến những tác động xấu đến kinh tế, xã hội. Với các thiệt hại nặng nề do bệnh dịch gây ra, các nhà toán học đã nghiên cứu mô hình của các bệnh dịch nhằm dự đoán được tốc độ phát triển, phát hiện các quy luật dịch tễ, các yếu tố phát triển dịch bệnh và đưa ra cơ sở toán trong y học, sinh học để xây dựng các biện pháp phòng tránh bệnh dịch cũng như giảm thiểu khả năng thiệt hại của bệnh tật.

Trong những khoảng thời gian gần đây, Bernoulli đã dùng công cụ toán để nghiên cứu ảnh hưởng của việc tiêm phòng ngừa bệnh đậu mùa tới tuổi thọ trung bình của con người. Tiếp theo đó hai nhà toán học Kermack và

Mckendrick đã đưa ra được mô hình dịch tễ để nghiên cứu tính chất mức độ ảnh hưởng của loại dịch bệnh và mô hình đó được đặt tên là SIR (Susceptible – Infected – Removed). Trong mô hình này các cá thể của quần thể được chia làm ba loại: (S) lớp cá thể miễn cảm dễ bị mắc bệnh, (I) lớp những cá thể bị nhiễm bệnh và có khả năng truyền bệnh đến cá thể khác, (R) lớp những cá thể nhiễm bệnh đã chết hoặc các cá thể bị nhiễm bệnh nhưng có khả năng hồi phục. Với mô hình như sau:

$$\begin{cases} dS(t) = [\mu K - \mu S(t) - \beta S(t)]dt \\ dI(t) = [\beta S(t)I(t) - (\mu + \rho + \gamma)I(t)]dt \\ dR(t) = [\gamma I(t) - \mu R(t)]dt. \end{cases} \quad (1)$$

Trong đó  $\mu$  cường độ chết tự nhiên của cá thể trong quần thể,  $\rho$  cường độ chết của cá thể bị nhiễm bệnh,  $\beta$  là hệ số truyền bệnh,  $\gamma$  là cường độ phục hồi của các cá thể đã bị nhiễm bệnh, hằng số  $K$  là sức chứa các cá thể trong quần thể. Tuy nhiên khi hệ sinh thái trên bị tác động các yếu tố bên ngoài, tính ổn định và cấu trúc hệ sinh thái có thể thay đổi. Khi đó đòi hỏi cần có nghiên cứu về dáng điệu tiệm cận của quần thể hay cụ thể hơn là điều kiện để hệ thoát li các mầm bệnh hay các cá thể bị nhiễm bệnh bị mất đi mà không để lại các yếu tố lan truyền

bệnh tật khi môi trường bị tác động bởi các yếu tố ngẫu nhiên như vậy là bài toán đang được quan tâm. Nếu hệ số truyền bệnh  $\beta$  chịu tác động bởi “nhiều trắng”. Khi đó hệ số truyền bệnh sẽ bị chịu thêm tác động của nhiễu trắng và hệ (1) trở thành:

$$\begin{cases} dS(t) = [\mu K - \mu S(t) - \beta S(t)]dt \\ \quad - \sigma S(t)I(t)dB(t) \\ dI(t) = [\beta S(t)I(t) - (\mu + \rho \\ \quad + \gamma)I(t)]dt + \sigma S(t)I(t)dB(t) \\ dR(t) = [\gamma I(t) - \mu R(t)]dt. \end{cases} \quad (2)$$

Trong một số trường hợp, ngoài tác động của nhiễu trắng, hệ sinh thái còn chịu tác động của nhiễu điện tín hay còn gọi là nhiễu màu. Chẳng hạn sự khác biệt về mùa mưa và mùa khô cũng gây nên ảnh hưởng đến hệ sinh thực vật của quần thể. Những tác động này có tính không nhớ (memoryless) và có thể minh họa như một bước chuyển Markov giữa ít nhất là hai trạng thái của môi trường. Hệ với bước chuyển Markov này đã được ứng dụng rộng khắp trong lý thuyết điều khiển, hệ sinh thái và toán tài chính. .. Ngày càng nhiều tác giả tập trung vào hướng nghiên cứu này (xem [1,3,4,7]). Trong bài báo này nhóm nghiên cứu đang điều nghiệm của mô hình:

$$\begin{cases} dS(t) = [\mu(r_t)K - \mu(r_t)S(t) - \beta(r_t)S(t)I(t)]dt \\ \quad - \sigma(r_t)S(t)I(t)dB(t) \\ dI(t) = [\beta(r_t)S(t)I(t) - (\mu(r_t) + \rho(r_t) \\ \quad + \gamma(r_t))I(t)]dt + \sigma(r_t)S(t)I(t)dB(t) \\ dR(t) = [\gamma(r_t)I(t) - \mu(r_t)R(t)]dt. \end{cases} \quad (3)$$

Tiêu điểm và cấu trúc chính của bài báo được trình bày thành như sau. Mục 1 đề cập về tổng quan và hướng nghiên cứu bài báo. Mục 2 trình bày những kết quả chính của bài báo. Đầu tiên chúng tôi chứng minh (3) tồn tại nghiệm dương duy nhất và tính bất biến của tập  $\mathbb{R}_+^2$ . Tiếp theo chúng tôi đưa ra ngưỡng  $\lambda$  mà theo đó ta có thể xác định đáng điều nghiệm của hệ khi thời gian đủ dài. Sử dụng kỹ thuật tương tự như trong [8], chúng tôi chứng minh được khi  $\lambda < 0$  hệ tuyệt chủng nghĩa là các cá thể bị nhiễm bệnh sẽ bị diệt vong. Mục 3 dành để tóm tắt những kết quả chính đã đạt được và trình bày những hướng nghiên cứu tiếp theo.

## 2. Kết quả chính

Xét không gian xác suất  $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}, P)$ . Gọi  $B(t)$  là quá trình Wiener một chiều được xác định trên không gian xác suất. Kí hiệu:

$$\mathbb{R}_+^2 = (x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0, y > 0,$$

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}_+^2 : x + y < K\}; \mathbb{R}^2$$

là không gian Euclide hai chiều và  $|\cdot|$  là chuẩn Euclide thông thường. Gọi  $r_t, t \geq 0$  là xích Markov liên tục phải trên không gian xác suất đầy đủ nhận giá trị trên không gian hữu hạn trạng thái  $S = (1, 2, \dots, N)$ ;  $(1 \leq N < \infty)$  với ma trận sinh  $\Gamma = (\gamma_{ij})_{n \times n}$  xác định bởi:

$$\begin{aligned} P\{r_{t+\delta} = j | r_t = i\} \\ = \begin{cases} \gamma_{ij}\delta + o(\delta) & \text{khi } i \neq j \\ 1 + \gamma_{ii}\delta + o(\delta) & \text{khi } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

khi  $\delta \rightarrow 0$ . Do vậy,  $\gamma_{ij}$  là cường độ chuyển từ  $i$  đến  $j$  và  $\gamma_{ij} \geq 0$  nếu  $i \neq j$ . Do vậy  $\gamma_{ii} = -\sum_{i \neq j} \gamma_{ij}$ . Giả sử rằng xích Markov  $r_t$  luôn độc lập với  $B_t$ .

**Bổ đề 2.1** (Lipschitz địa phương) Xét phương trình vi phân ngẫu nhiên với bước chuyển Markov có dạng:

$$\begin{aligned} dx(t) = f(x(t), t, r(t))dt \\ + g(x(t), t, r(t))dW(t) \end{aligned} \quad (4)$$

với  $t \geq 0$ , giá trị ban đầu  $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^2$ ,  $W(t)$  là chuyển động Brown  $m$ -chiều và hàm  $f, g$  được định nghĩa:

$$f, g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+ \times S \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$\begin{aligned} |f(x, t, u) - f(y, t, u)|^2 \vee |g(x, t, u) - g(y, t, u)|^2 \\ \leq \bar{L}_k |x - y|^2 \end{aligned}$$

khi đó (4) tồn tại nghiệm dương địa phương duy nhất cực đại.

*Chứng minh.* Xem [6].

**Định lý 2.1** Với các giá trị ban đầu  $(S(0), I(0)) \in \mathbb{R}_+^2$ , thì (3) có một nghiệm dương duy nhất  $(S(t), I(t)) \in \mathbb{R}_+^2$  với  $t \geq 0$  và

nghiệm này sẽ ở lại  $\mathbb{R}_+^2$  với xác suất 1, nghĩa là  $(S(t), I(t)) \in \mathbb{R}_+^2$  với mọi  $t \geq 0$  hầu chắc chắn.

**Chứng minh.** Với các hệ số của hệ phương trình là (3) là Lipschitz liên tục địa phương, theo Bổ đề 2.1 với bất kỳ giá trị ban đầu  $(S(0), I(0)) \in \mathbb{R}_+^2$  thì tồn tại duy nhất  $(S(t), I(t))$  là nghiệm địa phương cực đại với  $t \in [0, \tau_e)$ , trong đó  $\tau_e$  là thời điểm nổ. Để chứng minh nghiệm trên là toàn cục ta cần chứng minh rằng  $\tau_e = \infty$  hầu chắc chắn. Việc chứng minh phần còn lại khá cơ bản bằng việc xét hàm Lyapunov  $V(x, y) = x - 1 - \ln x + y - 1 - \ln y$  và để đảm bảo khuôn khổ bài báo nhóm nghiên cứu bỏ qua phần chứng minh còn lại, nếu quan tâm thêm có thể xem tài liệu [5]. ■

Theo công thức Itô, gọi ngưỡng:

$$\begin{aligned} \lambda &:= \sum_{i=1}^N \left[ \beta(i)K - (\mu(i) + \rho(i) + \gamma(i) + \frac{\sigma^2(i)K^2}{2}) \right] \pi_i \\ &= \sum_{i=1}^N \lambda(i) \pi_i. \end{aligned} \quad (5)$$

**Định lý 2.2** Với  $\lambda < 0$  được xác định như trên và với điều kiện ban đầu

$I(0), S(0) \in \Delta$ , trạng thái  $i \in N$  ta có:

a)  $\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = K$  hầu chắc chắn.

b)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln I(t)}{t} = \lambda < 0$  hầu chắc chắn.

Để chứng minh Định lý 2.2 ta cần chứng minh hai bổ đề sau.

**Bổ đề 2.2** Nếu  $\lambda < 0$ , với bất kỳ  $\varepsilon > 0$ , tồn tại một  $\delta > 0$  sao cho với mọi  $(s_0, i_0, i) \in \mathcal{U}_\delta \times N := (K - \delta, K] \times [0, \delta) \times N$ , với điều kiện ban đầu  $S(0) = s_0; I(0) = i_0$

ta có  $P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0\right\} \geq 1 - \varepsilon$ ,

$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = K\right\} \geq 1 - \varepsilon$ .

**Chứng minh.** Với  $\lambda < 0$ , chúng ta có thể chọn  $k > 0$  đủ nhỏ sao cho:

$$\sum_{j \in N} (\lambda(i) + k) \pi_j < 0. \text{ Xét hàm Lyapunov}$$

$V(x, y, i) = (K - x)^2 + y^p$  với  $p \in (0, 1)$  là hằng số cho trước. Bằng tính toán trực tiếp toán tử  $\mathcal{L}$  tương ứng với (3) với  $(x, y, i) \in \Delta \times N$  ta được:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_i V(x, y, i) &= -2(K - x)[- \beta(i)xy + \mu(i)(K - x)] \\ &\quad + py^p[\beta(i)x - \mu(i) - \rho(i)] \\ &\quad - \gamma(i) - \frac{\sigma^2(i)x^2}{2} + x^2 y^2 \sigma^2(i) + \frac{p^2 \sigma^2(i)x^2 y^p}{2} \\ &\leq -2\mu(i)(K - x)^2 + py^p[\beta(i)x - (\mu(i) + \rho(i)) \\ &\quad + \gamma(i) + \frac{\sigma^2(i)x^2}{2}] + y(2(K - x)\beta(i)x + x^2 y \sigma^2(i)) \\ &\quad + \frac{p^2 \sigma^2(i)x^2 y^p}{2}. \end{aligned}$$

Do tính liên tục của các hệ số, tính compact của tập  $\Delta \times N$  và  $y^{1-p} \rightarrow 0$  khi  $y \rightarrow 0$ , ta có thể chọn  $p \in (0, 1)$  và  $\delta_1 \in (0, K)$  sao cho với mỗi  $(x, y, i) \in \mathcal{U}_{\delta_1} \times N$ , với

$\mathcal{U}_{\delta_1} := (K - \delta_1, K] \times [0, \delta_1)$ , ta có

$$\begin{aligned} &py^p(\beta(i)x - (\mu(i) + \rho(i) + \gamma(i) + \frac{\sigma^2(i)x^2}{2})) \\ &+ y(2(K - x)\beta(i)x + x^2 y \sigma^2(i)) + \frac{p^2 \sigma^2(i)x^2 y^p}{2} \\ &\leq p(\lambda(i) + \kappa)y^p. \end{aligned}$$

Khi  $p$  đủ nhỏ, ta có:

$$-2\mu(i)(K - x)^2 \leq p(\lambda(i) + \kappa)(K - x)^2.$$

Do vậy,

$\mathcal{L}_i V(x, y, i) \leq p[\lambda(i) + \kappa]V(x, y, i)$ , với mọi  $(x, y, i) \in \mathcal{U}_{\delta_1} \times N$ .

Theo [2, Định lý 3.4] với mỗi  $\varepsilon > 0$ , với điều kiện ban đầu ở trạng thái  $i \in N$   $S(0) = s_0; I(0) = i_0$ , ta có  $0 < \delta < \delta_1$  sao cho

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} (I(t) = 0)\right\} \geq 1 - \varepsilon; P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} (S(t) = K)\right\} \geq 1 - \varepsilon.$$

■

Với mỗi  $\delta > 0$ , và điều kiện ban đầu ở trạng thái  $i \in N$ ,  $S(0) = s_0; I(0) = i_0$ , gọi thời điểm đầu tiên mà  $(S(t), I(t))$  thuộc  $\mathcal{U}_\delta$  là  $\tau_\delta := \inf\{t > 0 : (S(t), I(t)) \in \mathcal{U}_\delta\}$ .

Xét bỏ đề sau:

**Bổ đề 2.3.** Với mỗi  $\delta > 0$ , và với điều kiện ban đầu ở trạng thái  $i \in N$ ,  $S(0) = s_0$ ;  $I(0) = i_0$  ta có  $\tau_\delta < \infty$  hầu chắc chắn.

*Chứng minh.* Xét hàm Lyapunov  $U(x, y, i) = c_1 - (x+1)^{c_2}$ , trong đó  $c_1, c_2$  là hai hằng số dương được xác định. Ta có

$$\mathcal{L}U(x, y, i) = -c_2(x+1)^{c_2-2}[(x+1)(\mu(i)(K-x) - \beta(i)xy) + \frac{c_2-1}{2}\sigma^2(i)x^2y^2].$$

Đặt  $\mu_m = \min\{\mu(i) : i \in N\}$ . Do  $(x+1)\mu(i)(K-x) \geq \delta$  với mỗi  $x \in [0, K-\delta]$ , ta có thể tìm được  $c_2$  đủ lớn sao cho

$$(x+1)\mu(i)(K-x) - \beta(i)xy + \frac{c_2-1}{2}x^2y^2\sigma(i) \geq 0.5\mu_m\delta,$$

với  $(s_0, i_0, i) \in \Delta \times N, x \leq K-\delta$ ,

$$\mathcal{L}U(x, y, i) \leq -0.5c_2\mu_m\delta$$

trong đó  $(x, y, i) \in \Delta \times N, x \leq K-\delta$

Với điều kiện ban đầu ở trạng thái  $i \in N, S(0) = s_0$ ;  $I(0) = i_0$ . Theo công thức Dynkin ta có

$$\begin{aligned} EU(S(\tau_\delta), I(\tau_\delta), r_{\tau_\delta}) &= U(s_0, i_0, i) \\ &+ E \int_0^{\tau_\delta} \mathcal{L}U((S(t), I(t)), r_t) dt \\ &\leq U(s_0, i_0, i) - 0.5c_2\mu_m\delta E\tau_\delta. \end{aligned}$$

Do  $U$  bị chặn trên trên miền  $\mathbb{R}_+^2$ , do vậy  $E\tau_\delta < \infty$ . Điều này dẫn đến  $\tau_\delta < \infty$  hầu chắc chắn. ■

*Chứng minh Định lý 2.2.a.*

Theo Bổ đề 2.2,  $I(t) \rightarrow 0$  (trạng thái hết nhiễm bệnh) là ổn định địa phương. Mặt khác theo Bổ đề 2.3, với mọi  $\delta > 0$  cho trước, và điều kiện ban đầu ở trạng thái  $i \in N, S(0) = s_0$ ;  $I(0) = i_0$ , thời điểm đầu tiên để  $\mathcal{U}_\delta \in (S(t), I(t))$  là vô cùng. Kết hợp với tính Markov mạnh của hệ, ta có:

$$P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0\right\} \geq 1 - \varepsilon; P\left\{\lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = K\right\} \geq 1 - \varepsilon.$$

Do vậy ta có

$$\lim_{t \rightarrow \infty} I(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} S(t) = K \quad (12)$$

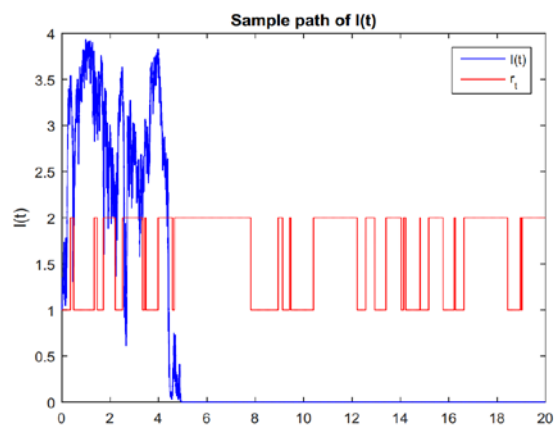
hầu chắc chắn trong đó  $(x, y, i) \in \Delta \times N$ .

Kết quả Định lý 2.2.b. được suy ra trực tiếp từ việc áp dụng công thức Itô cho phương trình của các cá thể bị nhiễm bệnh. ■

### Ví dụ minh họa

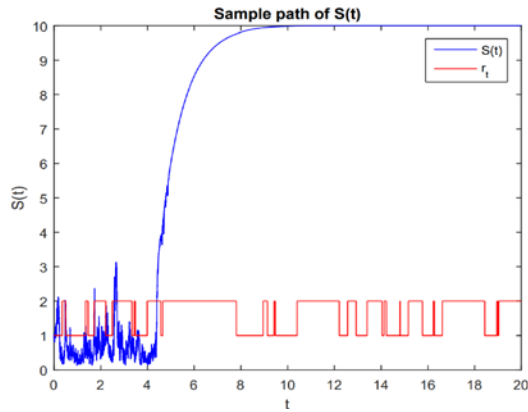
Để minh họa kết quả trên chúng tôi xét ví dụ sau. Giả sử rằng xích Markov liên tục  $\{r_t, t \geq 0\}$  chỉ nhận hai giá trị của trạng thái  $N = \{1, 2\}$  nghĩa là khi  $r_t = 1$  chúng ta xét ở trạng thái 1 và  $r_t = 2$  chúng ta xét ở trạng thái 2. Cường độ để chuyển từ trạng thái 1 sang trạng thái 2 là  $v_{12} = 0.5$  và chuyển từ trạng thái 2 sang trạng thái 1 là  $v_{21} = 0.8$ , thì phân phối dừng  $\pi = (\pi_1, \pi_2) = \left(\frac{8}{13}, \frac{5}{13}\right)$ . Giả sử rằng

$K = 10$ ;  $\mu(1) = 1.3$ ;  $\mu(2) = 1$ ;  $\beta(1) = 8$ ;  $\beta(2) = 4$ ;  $\sigma(1) = 1$ ;  $\sigma(2) = 1, 2$ ;  $\gamma(1) = 1$ ;  $\gamma(2) = 2$ . Bằng tính toán trực tiếp ta có  $\lambda = -2.3 < 0$ , bởi vậy với  $t \rightarrow \infty$  thì  $I(t) \rightarrow 0$  và  $S(t) \rightarrow K$ , cho ta kết quả minh họa bởi hình 1.



**Hình 1.** Quỹ đạo của  $I(t)$  trong trường hợp  $\lambda < 0$  (đường màu xanh).

Trong hình 1 ta thấy rằng khi  $t \rightarrow \infty$  thì  $I(t) \rightarrow 0$  có nghĩa là các cá thể bị nhiễm bệnh bị tuyệt chủng. Trong khi đường màu đỏ thể hiện sự dịch chuyển giữa hai trạng thái của hệ.



Hình 2. Quỹ đạo của  $S(t)$  trong trường hợp  $\lambda < 0$  (đường màu xanh).

Trong hình 2 ta thấy rằng khi  $t \rightarrow \infty$  thì  $S(t) \rightarrow K = 10$  là sức chứa của hệ. Kết quả mô phỏng phù hợp với kết quả bài báo.

### 3. Kết luận

Bài báo nghiên cứu tính chất nghiệm của mô hình dịch tễ SIR chịu cả nhiễu trắng và nhiễu màu. Bằng việc xây dựng ngưỡng để nghiên cứu đáng điều kiện cận của quần thể, bài báo này chỉ ra khi ngưỡng  $\lambda < 0$  các cá thể bị nhiễm bệnh sẽ bị diệt vong. Khi đó các cá thể còn lại sẽ tồn tại ổn định tới sức chứa tối đa của môi trường. Do sự giới hạn về khuôn khổ của tạp chí, nhiều tính chất và chứng minh chi tiết chưa được trình bày ở đây. Những bài toán lý thú của hệ như trong trường hợp  $\lambda > 0$  thì đáng điều kiện cận hệ sẽ như thế nào, tính chất điều khiển của tập nghiệm cũng như sự tác động đột ngột gây sốc của môi trường sẽ được nghiên cứu trong các bài báo tiếp sau.

### 4. Lời cảm ơn

Bài báo này được tài trợ một phần từ đề tài “Nghiên cứu đáng điều kiện cận của mô hình dịch tễ với bước chuyển Markov” với mã số KH1702. Nhóm tác giả xin bày tỏ lòng biết ơn đến TS. Nguyễn Thanh Diệu đã giúp đỡ và đưa ra những lời nhận xét xác đáng để bài báo của chúng tôi hoàn thiện hơn. Ngoài ra chúng tôi

xin cảm ơn tới Khoa Cơ bản 2, Học viện Công nghệ Bưu chính viễn thông; Khoa Cơ bản, Trường Đại học Giao thông vận tải thành phố Hồ Chí Minh đã tạo điều kiện tốt nhất cho chúng tôi hoàn thành bài báo này. Lời cuối cùng, chúng tôi xin chân thành các phản biện đã dày công đọc và góp nhiều ý kiến xác đáng, giá trị nhằm tăng cường chất lượng bài báo. □

### Tài liệu tham khảo

- [1] B. Cloez and M. Hairer, *Exponential ergodicity for Markov processes with random switching*, Bernoulli 21 (2015), 505-536.
- [2] N. H. Dang, G. Yin, *Stability of Regime-Switching Diffusion Systems with Discrete States Belonging to a Countable Set*, submitted, (2017). Available at <https://arxiv.org/abs/1710.02887>.
- [3] N. H. Du and N. H. Dang, *Dynamics of Kolmogorov systems of competitive type under the telegraph noise*, J. Differential Equations, 250 (2011), 386-409.
- [4] N. H. Du and N. H. Dang, *Asymptotic behavior of Kolmogorov systems with predator-prey type in random environment*, Commun. Pure Appl. Anal. 13 (2014), no. 6, 2693-2712.
- [5] Y. Guo, *The Behavior of an SIR Epidemic Model with Stochastic Perturbation*, Physica A 479, (2017) 1-11.
- [6] C. Ji, Daqing J., Ningzhong S., *Stochastic population dynamics under regime switching*, Stochastic Analysis and Applications, (2012) 755-773.
- [7] M. Pinsky and R. Pinsky, *Transience recurrence and central limit theorem behavior for diffusions in random temporal environments*, Ann. Probab., 21, (1993) 433-452.
- [8] T. D. Tuong, Dang H. Nguyen, N. T. Dieu, Ky Tran, *Extinction and permanence in a stochastic SIRS model in regime-switching with general incidence rate*, (submitted), 2018.

Ngày nhận bài: 28/2/2018

Ngày chuyển phản biện: 2/3/2018

Ngày hoàn thành sửa bài: 23/3/2018

Ngày chấp nhận đăng: 29/3/2018