

ĐIỀU KIỆN CẦN HỮU HIỆU CHO NGHIỆM HỮU HIỆU HENIG ĐỊA PHƯƠNG CỦA BÀI TOÁN CÂN BẰNG VECTO CÓ RÀNG BƯỚC QUA ĐẠO HÀM STUDNIARSKI

Đinh Diệu Hằng^{1*}, Trần Văn Sự², Nguyễn Thùy Trang¹, Phạm Văn Ngọc¹

¹Trường Đại học Công nghệ thông tin và Truyền thông - ĐH Thái Nguyên

²Trường Đại học Quảng Nam

TÓM TẮT

Bài toán cân bằng vectơ được Blum - Oettli đưa ra năm 1994. Lớp các bài toán cân bằng vectơ bao gồm nhiều lớp bài toán quan trọng như: bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ, bài toán tối ưu vectơ, bài toán điểm bất động, bài toán bù vectơ, bài toán cân bằng Nash vectơ. Điều kiện tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ và bài toán bất đẳng thức biến phân vectơ đã được nhiều tác giả quan tâm nghiên cứu. Trong bài báo này, chúng tôi sử dụng khái niệm đạo hàm Studniarski được đề xuất bởi Studniarski (M. Studniarski (1986)), thiết lập điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm hữu hiệu Henig địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát trong không gian Banach. Kết quả thu được này được áp dụng trực tiếp cho nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán.

Từ khóa: điều kiện cần tối ưu cho bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc; điều kiện cần hữu hiệu; nghiệm hữu hiệu Henig địa phương; nghiệm siêu hữu hiệu địa phương; đạo hàm Studniarski.

Ngày nhận bài: 21/11/2019; Ngày hoàn thiện: 27/5/2020; Ngày đăng: 31/5/2020

NECESSARY EFFICIENCY CONDITIONS FOR THE LOCAL HENIG EFFICIENT SOLUTIONS OF VECTOR EQUILIBRIUM PROBLEMS WITH CONSTRAINTS IN TERMS OF STUDNIARSKI'S DERIVATIVES

Đinh Diệu Hằng^{1*}, Trần Văn Sự², Nguyễn Thùy Trang¹, Phạm Văn Ngọc¹

¹TNU - University of Information and Communication Technology

²Quang Nam University

ABSTRACT

The equilibrium problem was first proposed in 1994 by Blum - Oettli which including a number of important problems such as vector variational inequalities, vector optimization problems, fixed point problems, vector complementarity problems, vector Nash equilibrium problems. Currently, optimality conditions for vector equilibrium problems and vector variational inequalities are widely studied by many authors. In this paper, we're using the concept of Studniarski's derivative was proposed by Studniarski in the reference (M. Studniarski (1986)), we establish in this article the necessary efficiency conditions for local Henig efficient solution of vector equilibrium problems with set and generalized inequality constraints in terms of studniarski's derivatives in Banach spaces. This obtained result is directly applied to local superefficient solution of the problem.

Keywords: Necessary optimality conditions for vector equilibrium problem; necessary efficiency conditions; local Henig efficient solutions; local superefficient solutions; Studniarski's derivatives.

Received: 21/11/2019; Revised: 27/5/2020; Published: 31/5/2020

* Corresponding author. Email: dinhhangch16tn@gmail.com

1 MỞ ĐẦU

Bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tổng quát được thiết lập vào năm 1997 bởi nhóm tác giả Bianchi, Hadjisavvas và Schaible [1] và chúng giữ một vai trò quan trọng trong giải tích phi tuyến (xem Feng và Qiu [2], Gong [3],[4], Long, Huang và Peng [5], Luu và Hang [6]). Đầu tiên nhóm tác giả [1] chỉ đề xuất khái niệm nghiệm hữu hiệu và nghiệm hữu hiệu yếu kiểu toàn cục và địa phương cho bài toán và sau đó Gong [3] lại xây dựng bổ sung khái niệm nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu bên cạnh khái niệm hữu hiệu yếu đã biết. Bên cạnh nghiên cứu sự tồn tại nghiệm cho bài toán cân bằng vectơ, điều kiện tối ưu cũng được quan tâm nghiên cứu nhiều, xem [3],[4],[5],[2],[7]. Gong [3],[4] thiết lập điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig trong [3],[4] của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát từ tính lồi theo nón sang lồi suy rộng theo nón. Hằng và Sự [7] cung cấp các điều kiện cần tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu cho bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát theo ngôn ngữ đạo hàm theo hướng. Studniarski [8] đề xuất khái niệm đạo hàm Dini trên và dưới theo hướng và khái niệm này được đặt lại tên là đạo hàm Studniarski bởi nhiều nhà nghiên cứu, xem Luu [9]. Vai trò của đạo hàm Studniarski dùng để thiết lập điều kiện tối ưu cho các bài toán tối ưu vectơ tổng quát, ví dụ Luu [9] cung cấp điều kiện cần và đủ tối ưu cho cực tiểu chặt Pareto địa phương của bài toán tối ưu vectơ theo ngôn ngữ của đạo hàm Studniarski. Hiện nay theo sự hiểu biết của chúng tôi là chưa có kết quả nghiên cứu điều kiện cần và đủ tối ưu cho nghiệm hữu hiệu Henig và Henig địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát sử dụng công cụ của đạo hàm Studniarski trong không gian vô hạn chiều.

Mục đích của chúng tôi trong bài báo là sử dụng đạo hàm Studniarski để thiết lập điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm hữu hiệu Henig địa phương và siêu hữu hiệu địa phương của bài toán cân bằng vectơ và bất đẳng thức biến phân vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát. Kết quả thu được của chúng tôi là hoàn toàn mới và chưa được nghiên cứu trước đây và thêm nữa nó có thể được áp dụng để xây dựng các thuật toán số cho bài toán cân bằng nói chung và bài toán tối ưu nói riêng trong tương lai.

2 KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

2.1 Một số ký hiệu

Xuyên suốt bài báo chúng tôi quy ước X, Y và Z là các không gian Banach thực và không gian đối ngẫu tôpô của Y và Z theo thứ tự được ký hiệu là Y^* và Z^* . Cho A là một tập khác rỗng của X . Phần trong và bao đóng của A được ký hiệu tương ứng bởi $\text{int}A$ và $\text{cl}A$. Cho $\bar{x} \in X$ và $\delta > 0$, hình cầu mở tâm $\bar{x}$ bán kính δ là tập $B(\bar{x}, \delta) = \{x \in X : \|x - \bar{x}\| < \delta\}$. Quy ước $t_n \rightarrow 0^+$ là một dãy số dương $(t_n)_{n \geq 1}$ hội tụ về 0. Gọi C và K là các nón lồi, đóng và có phần trong khác rỗng xác định một thứ tự bộ phận trong các không gian Y và Z tương ứng. Các nón đối ngẫu của C và K được ký hiệu theo thứ tự bởi C^+ và K^+ là lồi và đóng yếu* và được định nghĩa

$$C^+ = \{\xi \in Y^* : \langle \xi, c \rangle \geq 0 \ (\forall c \in C)\},$$

$$K^+ = \{\xi \in Z^* : \langle \xi, d \rangle \geq 0 \ (\forall d \in K)\}.$$

Tựa phần trong của nón C^+ là tập hợp

$$C^\# = \{\xi \in C^+ : \langle \xi, c \rangle > 0 \ (\forall c \in C, c \neq 0)\}.$$

Cho tập lồi $B \subset Y$ là cơ sở của nón C , nghĩa là $0 \notin \text{cl}B$ và $C = \text{cone}B := \{tb : t \geq 0, b \in B\}$. Vì $0 \notin \text{cl}B$, dùng một định lý tách trong giải tích lồi (xem Rockafellar [11]), tồn tại $y^* \in Y^* \setminus \{0\}$ sao cho

$$r = \inf\{\langle y^*, b \rangle : b \in B\} > \langle y^*, 0 \rangle = 0.$$

Ký hiệu

$$C^\Delta(B) = \{\xi \in C^\# : \exists t > 0, \langle \xi, b \rangle \geq t \ (\forall b \in B)\}.$$

Xét một lân cận lồi mở cân đối V_B của gốc O trong Y , trong đó

$$V_B = \{y \in Y : |\langle y^*, y \rangle| < \frac{r}{2}\}.$$

Cho trước một lân cận lồi U của O với $U \subset V_B$, ta có $\text{cone}(U+B)$ là nón lồi và nhọn thỏa mãn $0 \notin \text{cl}(U+B)$ và sự bao hàm $C \setminus \{0\} \subset \text{intcone}(U+B)$ đúng.

2.2 Nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc

Xét bài toán (CVEP): Tìm $\bar{x} \in K$ sao cho

$$F_{\bar{x}}(x) \notin -\text{intcone}(U+B) \ \forall x \in S. \quad (2.1)$$

Trong đó, song hàm $F : A \times A \rightarrow Y$ thỏa mãn $F(x_0, x_0) = 0$ với mọi $x_0 \in A$. Với tập chấp nhận được $S = \{x \in A : g(x) \in -K\}$, $g : A \rightarrow Z$ là hàm ràng buộc của (CVEP). Mỗi $\bar{x} \in X$, đặt

$$F_{\bar{x}}(S) = F(\bar{x}, S) = \bigcup_{x \in S} F(\bar{x}, x).$$

- Một vectơ $\bar{x}$ thỏa mãn điều kiện (2.1) được gọi là nghiệm hữu hiệu Henig của bài toán (CVEP).
- Nếu tồn tại $\delta > 0$ sao cho (2.1) đúng với mọi $x \in S \cap B(\bar{x}, \delta)$ thì $\bar{x}$ được gọi là nghiệm hữu hiệu Henig địa phương của bài toán (CVEP).
- Nếu với mỗi lân cận V của 0, tồn tại một lân cận U của 0 và $\delta > 0$ thỏa mãn

$$\text{cone}(F_{\bar{x}}(S \cap B(\bar{x}, \delta))) \cap (U - C) \subset V,$$

thì $\bar{x} \in S$ là nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (CVEP).

Mệnh đề 2.2.1 Cho B là cơ sở của nón C .

(i) Nếu $\bar{x} \in S$ là nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (CVEP) thì nó cũng là nghiệm hữu hiệu Henig địa phương của bài toán (CVEP).

(ii) Nếu B đóng và bị chặn thì một nghiệm hữu hiệu Henig địa phương của bài toán (CVEP) cũng là nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (CVEP). Ngoài ra,

$$\text{int}C^+ = C^\Delta(B).$$

Chứng minh. Đặt $K_1 := K \cap B(\bar{x}, \delta)$ và áp dụng kết quả của Long *et al.* [5] ta nhận được kết luận. $\square$

Tiếp theo chúng tôi nhắc lại khái niệm đạo hàm Studniarski trong [8].

Định nghĩa 2.2.1 ([8]) Cho $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 1$, $\bar{x}, v \in X$ và ánh xạ $f : X \rightarrow Y$. Đạo hàm Studniarski cấp m của f tại $(\bar{x}, v)$ được ký hiệu $d_S^m f(\bar{x}, v)$ và được định nghĩa như sau:

$$d_S^m f(\bar{x}; v) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0^+ \\ u \rightarrow v}} \frac{f(\bar{x} + tu) - f(\bar{x})}{t^m},$$

nếu giới hạn tồn tại. Trong trường hợp $m = 1$, ta viết $d_S f(\bar{x}; v)$ thay cho $d_S^1 f(\bar{x}; v)$.

Khái niệm các nón tiếp liên sau làm cơ sở cho việc thiết lập điều kiện cần hữu hiệu cho nghiệm hữu hiệu Henig địa phương của bài toán (CVEP).

Định nghĩa 2.2.2 ([9]) Nón tiếp liên của tập A tại $\bar{x} \in cl A$ được định nghĩa bởi

$$T_A(\bar{x}) = \{v \in X : \exists t_n > 0, \exists x_n \in A, x_n \rightarrow \bar{x} \text{ sao cho } t_n(x_n - \bar{x}) \rightarrow v\}.$$

Định nghĩa 2.2.3 ([9]) Nón tiếp liên phần trong của tập A tại $\bar{x} \in cl A$ được định nghĩa bởi

$$IT_A(\bar{x}) = \{v \in X : \exists t_n \rightarrow 0^+ \text{ sao cho } \forall v_n \rightarrow v, \bar{x} + t_n v_n \in A, \forall n \text{ đủ lớn}\}.$$

Mệnh đề 2.2.2 ([10]) Nón tiếp liên của tập A tại $\bar{x} \in cl A$ được phát biểu ở dạng tương đương sau

$$T_A(\bar{x}) = \{v \in X : \exists x_n \in A \setminus \{\bar{x}\}, x_n \rightarrow \bar{x} \text{ sao cho } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|} = \frac{v}{\|v\|}\} \cup \{0\}.$$

Tiếp theo chúng tôi giới thiệu nón tiếp liên trung gian sau:

$$\begin{aligned} \tilde{T}_A(\bar{x}) &= \{v \in X : \exists t_n \rightarrow 0^+ \text{ sao cho} \\ &\quad \bar{x} + t_n v \in A, \forall n \text{ đủ lớn}\}. \end{aligned}$$

Dễ dàng kiểm tra được rằng

$$IT_A(\bar{x}) \subset \tilde{T}_A(\bar{x}) \subset T_A(\bar{x}).$$

Cho $T : X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ là ánh xạ giá trị vectơ, ở đây $\mathcal{L}(X, Y)$ không gian các ánh xạ tuyến tính bị chặn từ X vào Y . Bài toán (CVEP) bao gồm bất đẳng thức biến phân vectơ (CVVI) như trường hợp đặc biệt, nghĩa là song hàm F được xác định bởi

$$F(x, y) = \langle Tx, y - x \rangle, \quad \forall x, y \in X.$$

Định nghĩa 2.2.4 Nếu $F(x, y) = \langle Tx, y - x \rangle$, $\forall x, y \in X$, và nếu $\bar{x} \in S$ là một nghiệm hữu hiệu Henig địa phương hay một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (CVEP) thì $\bar{x} \in S$ là một nghiệm hữu hiệu Henig địa phương hay một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của bài toán (CVVI) tương ứng.

3 KẾT QUẢ MỚI CỦA BÀI BÁO

Chúng tôi thiết lập điều kiện cần cho nghiệm Henig địa phương của bài toán (CVEP) theo ngôn ngữ đạo hàm Studniarski trong không gian Banach và một số áp dụng của chúng.

Định lý 3.1 Cho $\bar{x} \in S$ và B là cơ sở của C . Giả sử các đạo hàm Studniarski $d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v)$ và $d_S g(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\bar{x}$ là một nghiệm hữu hiệu Henig địa phương của bài toán (CVEP) thì $\forall v \in T_A(\bar{x})$ thỏa mãn $d_S g(\bar{x}; v) \in -\text{int}K$, tồn tại $(\xi, \eta) \in (Y \times Z)^*$ sao cho

$$\xi \in C^\Delta(B), \quad \eta \in K^+, \quad (3.1)$$

$$\langle \xi, d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v) \rangle + \langle \eta, d_S g(\bar{x}; v) \rangle \geq 0. \quad (3.2)$$

Chứng minh. Giả sử $\bar{x} \in S$ là một nghiệm hữu hiệu Henig địa phương của bài toán (CVEP). Khi đó với lân cận lồi cân đối U của 0 với $U \subset V_B$ (xem Mục 2.1) tồn tại một số thực $\delta > 0$ thỏa mãn

$$\text{cone}F_{\bar{x}}(S^*) \cap (-\text{intcone}(U^*)) = \emptyset, \quad (3.3)$$

ở đây $S^* := S \cap B(\bar{x}, \delta)$, $U^* := U + B$. Xét một nón lồi nhọn và đóng $D = \text{cl cone}(U^*)$. Ta có D thỏa mãn quan hệ bao hàm $C \setminus \{0\} \subset \text{int}D$. Từ (3.3) và đẳng thức $\text{intcone}(U^*) = \text{int cl cone}(U^*)$, ta có

$$\text{cone}(F_{\bar{x}}(S \cap B(\bar{x}, \delta))) \cap (-\text{int}D) = \emptyset. \quad (3.4)$$

Theo Bổ đề 2.1 ([5], tr. 720), ta có

$$[\text{cone}(U + B)]^+ \setminus \{0\} \subset C^\Delta(B).$$

Để hoàn thành chứng minh định lí, ta chỉ ra rằng tồn tại $\xi \in [\text{cone}(U+B)]^+ \setminus \{0\}$ và $\eta \in S^+$ thỏa mãn (3.2) là đủ. Để làm điều này trước tiên ta phải kiểm tra điều kiện

$$d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v) \notin -\text{int}D \quad (3.5)$$

$$\forall v \in T_A(\bar{x}) \cap \{u \in X : d_S g(\bar{x}; u) \in -\text{int}K\}.$$

Giả sử (3.5) không đúng, khi đó tồn tại một phương $v \in T_A(\bar{x}) \setminus \{0\}$ sao cho $d_S g(\bar{x}; v) \in -\text{int}K$ và $d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v) \in -\text{int}D$. Theo Mệnh đề 2.2.2, tồn tại một dãy $(x_n)_{n \geq 1} \subset A \setminus \{\bar{x}\}$ với $x_n \rightarrow \bar{x}$ thỏa mãn

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n - \bar{x}}{\|x_n - \bar{x}\|} = \frac{v}{\|v\|}.$$

Chọn các dãy $t_n = \frac{\|x_n - \bar{x}\|}{\|v\|}$ và $v_n = \frac{x_n - \bar{x}}{t_n}$. Khi đó, $t_n \rightarrow 0^+$, $v_n \rightarrow v$ và

$$x_n = \bar{x} + t_n v_n \in A \quad \forall n \geq 1. \quad (3.6)$$

Theo định nghĩa đạo hàm Studniarski:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g(\bar{x} + t_n v_n) - g(\bar{x})}{t_n} = d_S g(\bar{x}; v) \in -\text{int}K.$$

Lúc này tồn tại $N_1 > 0$ sao cho $\forall n \geq N_1$,

$$g(\bar{x} + t_n v_n) - g(\bar{x}) \in -\text{int}K, \text{ hay}$$

$$g(\bar{x} + t_n v_n) \in g(\bar{x}) - \text{int}K \quad \forall n \geq N_1.$$

Không khó để kiểm tra rằng

$$g(\bar{x} + t_n v_n) \in -K \quad \forall n \geq N_1. \quad (3.7)$$

Kết hợp (3.6)-(3.7) ta kết luận

$$\bar{x} + t_n v_n \in S \quad \forall n \geq N_1. \quad (3.8)$$

Do $\bar{x} + t_n v_n \rightarrow \bar{x} \in B(\bar{x}, \delta)$, tồn tại $N_2 > 0$ với

$$\bar{x} + t_n v_n \in S \cap B(\bar{x}, \delta) \quad \forall n \geq \max\{N_1, N_2\}.$$

Đặt $N_3 = \max\{N_1, N_2\}$, ta thu được kết quả

$$\bar{x} + t_n v_n \in S \cap B(\bar{x}, \delta) \quad \forall n \geq N_3. \quad (3.9)$$

Ta có

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{\bar{x}}(\bar{x} + t_n v_n) - F_{\bar{x}}(\bar{x})}{t_n} = d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v) \in -\text{int}D,$$

nên tồn tại $N_4 > 0$ sao cho $\forall n \geq N_4$,

$$F_{\bar{x}}(\bar{x} + t_n v_n) - F_{\bar{x}}(\bar{x}) \in -\text{int}D \text{ hay}$$

$$F_{\bar{x}}(\bar{x} + t_n v_n) \in -\text{int}D \quad \forall n \geq N_4.$$

Chọn $N = \max\{N_3, N_4\}$, và từ (3.9) suy ra

$$\bar{x} + t_n v_n \in S \cap B(\bar{x}, \delta) \quad \forall n \geq N, \quad (3.10)$$

$$F_{\bar{x}}(\bar{x} + t_n v_n) \in -\text{int}D \quad \forall n \geq N. \quad (3.11)$$

Kết hợp (3.10)-(3.11) mâu thuẫn với điều kiện (3.4). Do đó với mọi $v \in T_A(\bar{x})$ thỏa mãn $d_S g(\bar{x}; v) \in -\text{int}K$ ta có

$$\{d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v)\} \cap (-\text{int}D) = \emptyset.$$

Suy ra

$$\{d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v), d_S g(\bar{x}; v)\} \cap (-\text{int}D) \times (-\text{int}K) = \emptyset.$$

Áp dụng định lí tách mạnh các tập rời nhau $\{d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v), d_S g(\bar{x}; v)\}$ và $(-\text{int}D) \times (-\text{int}K)$ (xem Rockafellar [11]), tồn tại $\xi \in Y^*$ và $\eta \in Z^*$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} &\langle \xi, d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v) \rangle + \langle \eta, d_S g(\bar{x}; v) \rangle > \langle \xi, -c \rangle \\ &+ \langle \eta, -d \rangle \quad \forall c \in \text{int}D, d \in \text{int}K. \end{aligned}$$

Điều này dẫn đến bất đẳng thức sau

$$\begin{aligned} &\langle \xi, d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v) \rangle + \langle \eta, d_S g(\bar{x}; v) \rangle \quad (3.12) \\ &+ \langle \xi, c \rangle + \langle \eta, d \rangle \geq 0 \quad \forall c \in D, d \in K. \end{aligned}$$

Vậy $\langle \xi, d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v) \rangle + \langle \eta, d_S g(\bar{x}; v) \rangle \geq 0$, nghĩa là bất đẳng thức (3.2) được thỏa mãn. Bây giờ ta kiểm tra (3.1). Thật vậy, trong (3.12) ta chọn $t > 0$ thỏa mãn

$$\begin{aligned} &\langle \xi, d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v) \rangle + \langle \eta, d_S g(\bar{x}; v) \rangle \quad (3.13) \\ &+ \langle \xi, tc \rangle + \langle \eta, td \rangle \geq 0 \quad \forall c \in D, d \in K. \end{aligned}$$

Chia cả 2 vế (3.13) bởi $t > 0$ ta được

$$\begin{aligned} &\frac{1}{t} (\langle \xi, d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v) \rangle + \langle \eta, d_S g(\bar{x}; v) \rangle) \quad (3.14) \\ &+ \langle \xi, c \rangle + \langle \eta, d \rangle \geq 0 \quad \forall c \in D, d \in K. \end{aligned}$$

Cho $t \rightarrow +\infty$ trong (3.14) ta thu được

$$\langle \xi, c \rangle + \langle \eta, d \rangle \geq 0 \quad \forall c \in D, d \in K.$$

Đầu tiên chúng ta chọn $d = 0 \in K$, $\xi \in D^+ \setminus \{0\} = [\text{cone}(U+B)]^+ \setminus \{0\}$ và sau đó chọn $c = 0$, $\eta \in K^+$. Chú ý $\xi \neq 0$ là do giả thiết $d_S g(\bar{x}; v) \in -\text{int}K$ suy ra điều phải chứng minh. $\square$

Trong trường hợp nón C có cơ sở đóng và bị chặn B , ta có

Hệ quả 3.2 Cho $\bar{x} \in S$ và B là cơ sở đóng, bị chặn của C . Giả sử các đạo hàm Studniarski $d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v)$ và $d_S g(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Khi đó, nếu $\bar{x}$ là một nghiệm siêu hữu hiệu địa phương của (CVEP) thì $\forall v \in T_A(\bar{x})$ thỏa mãn $d_S g(\bar{x}; v) \in -\text{int}K$, tồn tại $(\xi, \eta) \in (Y \times Z)^*$ sao cho

$$\begin{aligned} &\xi \in \text{int}C^+, \quad \eta \in K^+ \\ &\langle \xi, d_S F_{\bar{x}}(\bar{x}; v) \rangle + \langle \eta, d_S g(\bar{x}; v) \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Chứng minh. Áp dụng Mệnh đề 2.1 ta nhận được kết quả. $\square$

Tiếp theo chúng ta áp dụng kết quả thu được cho bài toán (CVVI).

Định lí 3.3 Cho $\bar{x} \in S$ và B là cơ sở của nón C . Giả sử $T : X \rightarrow \mathcal{L}(X, Y)$ là ánh xạ giá trị vectơ và $d_S g(\bar{x}; v)$ tồn tại theo mọi phương $v \in X$. Nếu $\bar{x}$ là nghiệm hữu hiệu Henig địa phương (t.đ. siêu hữu hiệu địa phương nếu thêm B đóng và bị chặn) của (CVVI)

thì $\forall v \in T_A(\bar{x})$ thỏa mãn $d_{Sg}(\bar{x}; v) \in -\text{int}K$, tồn tại $(\xi, \eta) \in (Y \times Z)^*$ sao cho

$$\xi \in C^\Delta(B) \text{ (t.đ. } \xi \in \text{int } C^+), \quad \eta \in K^+, \\ \langle \xi, \langle T\bar{x}, v \rangle \rangle + \langle \eta, d_{Sg}(\bar{x}; v) \rangle \geq 0.$$

Chứng minh. Áp dụng Định lý 3.1 và Hệ quả 3.2 với chú rằng $d_{Sg}F_{\bar{x}}(\bar{x}; v) = \langle T\bar{x}, v \rangle$, ta nhận được kết quả cần chứng minh. $\square$

Chú ý 3.4 Phát biểu trong Định lý 3.1, 3.3 và Hệ quả 3.2 vẫn còn đúng nếu ta thay nón tiếp liên $T_A(\bar{x})$ bởi các nón tiếp liên phần trong $IT_A(\bar{x})$ và $\tilde{T}_A(\bar{x})$ tương ứng.

4 KẾT LUẬN

Bài báo đã xây dựng được điều kiện cần cho nghiệm hữu hiệu Henig và siêu hữu hiệu địa phương của bài toán cân bằng vectơ có ràng buộc tập và bất đẳng thức tổng quát theo ngôn ngữ đạo hàm Studniarski trong không gian Banach. Kết quả nhận được là mới và chưa được nghiên cứu trước đây và thêm nữa, chúng được áp dụng cho bất đẳng thức biến phân vectơ có ràng buộc.

Tài liệu

- [1] M. Bianchi, N. Hadjisavvas, and S. Schaible, "Vector equilibrium problems with generalized monotone bifunctions", *J. Optim. Theory Appl.*, 92, pp.527-542, 1997.
- [2] Y. Feng, and Q. Qiu, "Optimality conditions for vector equilibrium problems with constraints in Banach spaces", *Optim. Lett.*, 8, pp.1931-1944, 2004.

5 Lời cảm ơn

Bài báo này là sản phẩm của Đề tài với mã số T2019-07-01.

- [3] X. H. Gong, "Optimality conditions for vector equilibrium problems", *J. Math. Anal. Appl.*, 342, pp.1455-1466, 2008.
- [4] X. H. Gong, "Scalarization and optimality conditions for vector equilibrium problems", *Nonlinear Analysis*, 73, pp.3598-3612, 2010.
- [5] X. J. Long, Y. Q. Huang, and Z. Y. Peng, "Optimality conditions for the Henig efficient solution of vector equilibrium problems with constraints", *Optim. Letter*, 5, pp.717-728, 2011.
- [6] V. L. Do, and D. H. Dinh, "On efficiency conditions for nonsmooth vector equilibrium problems with equilibrium constraints", *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 36, pp.1622-1642, 2015.
- [7] D. H. Dinh, and V. S. Tran, "On optimality conditions for Henig efficient solution and superefficient solution of constrained vector equilibrium problems", *TNU Journal of Science and Technology*, 181(5), pp.237-242, 2018.
- [8] M. Studniarski, "Necessary and sufficient conditions for isolated local minima of nonsmooth functions", *SIAM J. cont/optim.*, 24, pp.1044-1049, 1986.
- [9] V. L. Do, "Higher-order necessary and sufficient conditions for strict local Pareto minima in terms of Studniarski's derivatives", *Optimization*, 57, pp.593-605, 2008.
- [10] G. Giorgi, and A. Guerraggio, "On the notion of tangent cone in mathematical programming", *Optim.*, 25, pp.11-23, 1992.
- [11] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.