

TÍNH LIÊN TỤC CỦA TOÁN TỬ HESSIAN PHỨC TRÊN LỚP CEGRELL CỦA HÀM M- ĐIỀU HOÀ DƯỚI VÀ ỨNG DỤNG

Nguyễn Văn Phú
Trường Đại học Điện lực

TÓM TẮT

Năm 2015, L. H. Chinh chứng minh sự tồn tại và tính liên tục dưới dãy giảm các hàm thuộc lớp hàm $E_{m0}(\Omega)$ của toán tử Hessian phức $H_m(u)$ với hàm $u \in F_m(\Omega)$. Sử dụng kết quả trên và công thức tích phân từng phần trên lớp hàm $F_m(\Omega)$, chúng tôi chứng minh nếu hàm $u \in F_m(\Omega)$ thì toán tử $hH_m(u)$ liên tục dưới dãy giảm các hàm trên lớp $E_{m0}(\Omega)$ với mọi hàm $h \in SH_m \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$. Đồng thời, chúng tôi mở rộng một kết quả của các tác giả N. V. Khue và P. H. Hiep từ lớp các hàm đa điều hoà dưới đến lớp các hàm $F_m(\Omega)$.

Từ khóa: *Toán tử Monge - Ampere phức; toán tử Hessian phức; hàm đa điều hoà dưới; hàm m-điều hoà dưới; tính liên tục.*

Ngày nhận bài: 24/3/2020; Ngày hoàn thiện: 25/5/2020; Ngày đăng: 29/5/2020

CONTINUITY OF THE COMPLEX HESSIAN OPERATOR ON CEGRELL'S CLASSES OF MSUBHARMONIC FUNCTIONS AND ITS APPLICATION

Nguyen Van Phu
Electric Power University

ABSTRACT

In 2005, L. H. Chinh proved the existence and continuity of the complex Hessian operator $H_m(u)$ with $u \in F_m(\Omega)$ under the sequence of decreasing functions in classes $E_{m0}(\Omega)$. By using the above result and the integration by parts formula for functions in $F_m(\Omega)$, we prove that if $u \in F_m(\Omega)$ then operator $hH_m(u)$ is continuous under the sequence of decreasing functions in classes $E_{m0}(\Omega)$ for all functions $h \in SH_m \cap L^\infty_{loc}(\Omega)$. At the same time, we extend N. V. Khue and P. H. Hiep's result from the classes of plurisubharmonic functions to the class $F_m(\Omega)$.

Keywords: *Monge - Ampere operator; Hessian operator; plurisubharmonic functions; msubharmonic functions; Continuity.*

Received: 24/3/2020; Revised: 25/5/2020; Published: 29/5/2020

1 Mở đầu

Lý thuyết đa thể vị là một lĩnh vực quan trọng của giải tích phức và toán tử Monge - Ampère phức $(dd^c u)^n$ là nền tảng, trọng tâm của lý thuyết đa thể vị. Năm 1982 hai tác giả E. Bedford và B. Taylor trong [1] đã chỉ ra sự tồn tại của toán tử Monge- Ampère trên lớp các hàm đa điều hoà dưới bị chặn địa phương và tính liên tục của nó trên các dãy đơn điệu. Tiếp đó, năm 1998 trong [2] U. Cegrell giới thiệu các lớp hàm đa điều hoà dưới không bị chặn địa phương mà trên đó toán tử Monge-Ampère vẫn xác định. Năm 2004, trong [3] U. Cegrell chứng minh tính liên tục của toán tử Monge - Ampère trên dãy giảm các hàm đa điều hoà dưới không bị chặn địa phương. Gần đây, trong [4] Z. Blocki giới thiệu lớp hàm m - điều hoà dưới là sự mở rộng của lớp hàm đa điều hoà dưới và nghiên cứu toán tử m - Hessian phức $H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ tổng quát hơn toán tử Monge - Ampère phức. Trong bài báo trên Z. Blocki đã định nghĩa toán tử m - Hessian phức trên lớp các hàm m - điều hoà dưới bị chặn địa phương và chỉ ra tính liên tục của nó trên các dãy giảm các hàm m -điều hoà dưới bị chặn địa phương. Trong bài báo [5] L. H. Chinh giới thiệu lớp Cegrell $\mathcal{F}_m(\Omega)$ các hàm m - điều hoà dưới không bị chặn địa phương mà toán tử m - Hessian phức xác định và liên tục dưới dãy giảm (Định lý 3.11). Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng kết quả của L. H. Chinh tới một dạng mạnh hơn bằng cách xét tính liên tục dưới dãy giảm của toán tử $hH_m(u)$ với mọi hàm $h \in SH_m \cap L_{loc}^\infty(\Omega)$ và ứng dụng kết quả đạt được để mở rộng Định lý 4.1 trong bài báo [6] từ lớp các hàm đa điều hoà dưới tới lớp các hàm $\mathcal{F}_m(\Omega)$.

2 Tính liên tục

Trước tiên chúng tôi nhắc lại một số khái niệm và kết quả về lớp hàm m -điều hoà dưới được giới thiệu bởi Z. Blocki trong [4].

Giả sử Ω là tập con mở của $\mathbb{C}^n$. Nếu u là một hàm xác định trên miền Ω thì ta định nghĩa toán tử $\partial u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial z_j} dz_j$ và toán tử

$\bar{\partial} u = \sum_{j=1}^n \frac{\partial u}{\partial \bar{z}_j} d\bar{z}_j$. Kí hiệu $\beta = dd^c \|z\|^2$ là dạng Kähler chính tắc trên $\mathbb{C}^n$ với $d = \partial + \bar{\partial}$ và $d^c = \frac{\partial - \bar{\partial}}{4i}$.

Với mọi $1 \leq m \leq n$, chúng ta định nghĩa

$$\begin{aligned} \hat{\Gamma}_m &= \{\eta \in \mathbb{C}_{(1,1)} : \eta \wedge \beta^{n-1} \geq 0, \dots, \\ &\eta^m \wedge \beta^{n-m} \geq 0\}, \end{aligned}$$

ở đó kí hiệu $\mathbb{C}_{(1,1)}$ là không gian các $(1, 1)$ -dạng với hệ số hằng.

Giả sử T là một dòng song bậc $(n - k, n - k)$ ($k \leq m$) trên tập mở $\Omega \in \mathbb{C}^n$. T được gọi là dòng m - dương nếu với mọi $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ thuộc $\hat{\Gamma}_m$ chúng ta có bất đẳng thức sau đây

$$\alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_k \wedge T \geq 0.$$

Định nghĩa 2.1. Giả sử u là hàm điều hoà dưới trên tập con mở $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Khi đó hàm u được gọi là một hàm m -điều hoà trên Ω nếu với mọi $\eta_1, \dots, \eta_{m-1}$ thuộc $\hat{\Gamma}_m$ chúng ta có bất đẳng thức sau đây

$$dd^c u \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{m-1} \wedge \beta^{n-m} \geq 0,$$

theo nghĩa dòng.

Chúng ta kí hiệu $SH_m(\Omega)$ là tập các hàm m -điều hoà dưới trên Ω và $SH_m^-(\Omega)$ là tập các hàm m -điều hoà dưới âm trên Ω .

Nếu hàm $u \in \mathcal{C}^2(\Omega)$ thì từ Mệnh đề 3.1 trong [4] chúng ta khẳng định u là hàm m -điều hoà dưới trên Ω khi và chỉ khi $(dd^c u)^k \wedge \beta^{n-k} \geq 0$, với mọi $k = 1, \dots, m$. Tổng quát, giả sử $u_1, \dots, u_k \in \mathcal{C}^2(\Omega)$, thì

với mọi $\eta_1, \dots, \eta_{m-k} \in \widehat{\Gamma}_m$, chúng ta có bất đẳng thức sau đây theo nghĩa dòng.

$$dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_k \wedge \eta_1 \wedge \dots \wedge \eta_{m-k} \wedge \beta^{n-m} \geq 0$$

Toán tử Hessian phức cho các hàm m - điều hoà bị chặn địa phương được định nghĩa như sau

Định nghĩa 2.2. Giả sử $u_1, \dots, u_p \in SH_m(\Omega) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$. Khi đó, toán tử Hessian phức $H_m(u_1, \dots, u_p)$ được định nghĩa quy nạp theo công thức

$$dd^c u_p \wedge \dots \wedge dd^c u_1 \wedge \beta^{n-m} = dd^c(u_p dd^c u_{p-1} \wedge \dots \wedge dd^c u_1 \wedge \beta^{n-m}).$$

Trong [4] Z. Blocki cũng chứng minh rằng toán tử $H_m(u_1, \dots, u_p)$ là dòng dương đóng song bậc $(n - m + p, n - m + p)$ và liên tục dưới dãy giảm các hàm m -điều hoà bị chặn địa phương. Khi $u = u_1 = \dots = u_m \in SH_m(\Omega) \cap L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$ thì độ đo Borel $H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ được gọi là m -Hessian của hàm u .

Tiếp theo, chúng ta nhắc lại các khái niệm, kết quả về các lớp hàm $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$ và $\mathcal{F}_m(\Omega)$ được giới thiệu trong [5]. Giả sử Ω là miền m -siêu lồi bị chặn trong $\mathbb{C}^n$. Ký hiệu

$\mathcal{E}_m^0(\Omega)$ là tập các hàm $u \in SH_m^-(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ thoả mãn $\lim_{z \rightarrow \partial\Omega} u(z) = 0, \int_{\Omega} H_m(u) < \infty$. Ký

hiệu $\mathcal{F}_m(\Omega)$ là tập các hàm $u \in SH_m^-(\Omega)$ sao cho tồn tại dãy hàm $\{u_j\} \in \mathcal{E}_m^0$ giảm tới u trên Ω và $\sup_j \int_{\Omega} H_m(u_j) < \infty$.

Trong trường hợp $m = n$ chúng ta có các lớp hàm $\mathcal{E}_m^0(\Omega)$ và $\mathcal{F}_m(\Omega)$ tương ứng là các lớp hàm $\mathcal{E}^0(\Omega)$ và $\mathcal{F}(\Omega)$ được giới thiệu bởi U. Cegrell trong [3]. Định lý 3.11 trong [5] chỉ ra rằng nếu $u \in \mathcal{F}_m(\Omega)$ thì toán tử m -Hessian phức $H_m(u) = (dd^c u)^m \wedge \beta^{n-m}$ được xác định và liên tục dưới dãy giảm. Định lý dưới đây mở rộng kết quả của của

Định lý 3.11 trong [5] tới toán tử $hH_m(u)$ với mọi hàm $h \in SH_m \cap L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$.

Định lý 2.1. Giả sử $u^p \in \mathcal{F}_m(\Omega), p = 1, \dots, m$ và $(g_j^p) \in \mathcal{E}_m^0(\Omega) \searrow u^p, \forall p$. Khi đó, chúng ta có $hH_m(g_j^1, g_j^2, \dots, g_j^m) \rightarrow hH_m(u^1, u^2, \dots, u^m)$ theo nghĩa yếu khi $j \rightarrow \infty$ với mọi hàm $h \in SH_m \cap L_{\text{loc}}^\infty(\Omega)$.

Chứng minh.

Theo Định lý 3.11 trong [5] chúng ta có

$$H_m(g_j^1, g_j^2, \dots, g_j^m) \rightarrow H_m(u^1, u^2, \dots, u^m).$$

Giả sử

$$hH_m(g_j^1, g_j^2, \dots, g_j^m) \rightarrow \nu.$$

Khi đó, chúng ta có

$$\nu \leq hH_m(u^1, u^2, \dots, u^m).$$

Áp dụng tích phân từng phần trên lớp hàm $\mathcal{F}_m(\Omega)$ (xem Định lý 3.16 trong [5]) chúng

ta có

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} d\nu \\
& \geq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h dd^c g_j^1 \wedge dd^c g_j^2 \wedge \dots \wedge dd^c g_j^m \\
& \wedge \beta^{n-m} \\
& = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_j^1 dd^c h \wedge dd^c g_j^2 \wedge \dots \wedge dd^c g_j^m \\
& \wedge \beta^{n-m} \\
& \geq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u^1 dd^c h \wedge dd^c g_j^2 \wedge \dots \wedge dd^c g_j^m \\
& \wedge \beta^{n-m} \\
& = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_j^2 dd^c h \wedge dd^c u^1 \wedge \dots \wedge dd^c g_j^m \\
& \wedge \beta^{n-m} \\
& \geq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} u^2 dd^c h \wedge dd^c u^1 \wedge \dots \wedge dd^c g_j^m \\
& \wedge \beta^{n-m} \\
& \geq \dots \\
& \geq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega} h dd^c u^1 \wedge dd^c u^2 \wedge \dots \wedge dd^c u^m \\
& \wedge \beta^{n-m} \\
& = h H_m(u^1, u^2, \dots, u^m).
\end{aligned}$$

Như vậy chúng ta có

$$\nu = h H_m(u^1, u^2, \dots, u^m).$$

3 Ứng Dụng

Trong mục này chúng tôi sử dụng Định lý 2.1 để đạt được một kết quả là mở rộng Định lý 4.1 trong [6] đến các hàm thuộc lớp $\mathcal{F}_m(\Omega)$.

Định lý 3.1. Giả sử $u, u_1, \dots, u_{m-1} \in$

$\mathcal{F}_m(\Omega)$, $v \in SH_m^-(\Omega)$. Khi đó chúng ta có

$$\begin{aligned}
& 1_{\{u > v\}} dd^c \max(u, v) \wedge dd^c u_1 \wedge \dots \\
& \wedge dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m} = 1_{\{u > v\}} dd^c u \\
& \wedge dd^c u_1 \wedge \dots \wedge dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m}.
\end{aligned}$$

Chứng minh. Chúng ta chia chứng minh làm 2 bước như sau:

Bước 1. Chúng ta chứng minh Định lý cho trường hợp hàm $v \equiv r < 0$.

Theo Định lý 3.1 trong [5] tồn tại dãy các hàm $u^j \in \mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $u^j \searrow u$ và với mọi $k = 1, \dots, m-1$ ta có dãy các hàm $u_k^j \in \mathcal{E}_m^0(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$, $u_k^j \searrow u_k$.

Do tập $\{u^j > r\}$ là tập mở nên chúng ta có

$$\begin{aligned}
& 1_{\{u^j > r\}} dd^c \max(u^j, r) \wedge dd^c u_1^j \wedge \dots \wedge \\
& dd^c u_{m-1}^j \wedge \beta^{n-m} = 1_{\{u^j > r\}} dd^c u^j \wedge dd^c u_1^j \\
& \wedge \dots \wedge dd^c u_{m-1}^j \wedge \beta^{n-m}.
\end{aligned}$$

Từ bao hàm thức $\{u > r\} \subset \{u^j > r\}$ chúng ta có

$$\begin{aligned}
& 1_{\{u > r\}} dd^c \max(u^j, r) \wedge dd^c u_1^j \wedge \dots \wedge \\
& dd^c u_{m-1}^j \wedge \beta^{n-m} = 1_{\{u > r\}} dd^c u^j \wedge dd^c u_1^j \\
& \wedge \dots \wedge dd^c u_{m-1}^j \wedge \beta^{n-m}.
\end{aligned}$$

Theo Định lý 2.1 khi $j \rightarrow \infty$ chúng ta có

$$\begin{aligned}
& \max(u - r, 0) dd^c \max(u^j, r) \wedge dd^c u_1^j \wedge \dots \\
& \wedge dd^c u_{m-1}^j \wedge \beta^{n-m}
\end{aligned}$$

hội tụ yếu đến

$$\begin{aligned}
& \max(u - r, 0) dd^c \max(u, r) \wedge dd^c u_1 \wedge \dots \\
& \wedge dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m}
\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}
& \max(u - r, 0) dd^c u^j \wedge dd^c u_1^j \wedge \dots \wedge \\
& dd^c u_{m-1}^j \wedge \beta^{n-m}
\end{aligned}$$

hội tụ yếu đến

$$\begin{aligned}
& \max(u - r, 0) dd^c u \wedge dd^c u_1 \wedge \dots \wedge \\
& dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m},
\end{aligned}$$

do đó chúng ta có

$$\begin{aligned} & \max(u-r, 0)[dd^c \max(u, r) \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \\ & \wedge dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m} - dd^c u \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \\ & \wedge dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m}] = 0. \end{aligned}$$

Tiếp theo chúng ta chứng minh rằng

$$\begin{aligned} \mu &= dd^c \max(u, r) \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge \\ & dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m} - dd^c u \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge \\ & dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m} = 0, \end{aligned}$$

trên $\{u > r\}$. Thật vậy, chúng ta chỉ cần chứng minh rằng $\mu = 0$ trên $\Omega_\varepsilon = \{\max(u-r, 0) > \varepsilon > 0\}$. Theo Định lý phân tích Hahn [7] tồn tại các tập con Ω_ε^+ và Ω_ε^- của Ω_ε sao cho $\Omega_\varepsilon = \Omega_\varepsilon^+ \cup \Omega_\varepsilon^-$, $\Omega_\varepsilon^+ \cap \Omega_\varepsilon^- = \emptyset$ và $\mu \geq 0$ trên Ω_ε^+ , $\mu \leq 0$ trên Ω_ε^- . Khi đó

$$\varepsilon \mu(\Omega_\varepsilon^+) \leq \int_{\Omega_\varepsilon^+} \max(u-r, 0) d\mu = 0$$

và

$$\varepsilon \mu(\Omega_\varepsilon^-) \geq \int_{\Omega_\varepsilon^-} \max(u-r, 0) d\mu = 0.$$

Như vậy ta có $\mu(\Omega_\varepsilon^+) = \mu(\Omega_\varepsilon^-) = 0$, do đó $\mu = 0$ trên Ω_ε . Từ đó ta có

$$\begin{aligned} & dd^c \max(u, r) \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_{m-1} \\ & \wedge \beta^{n-m} - dd^c u \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_{m-1} \\ & \wedge \beta^{n-m} = 0, \end{aligned}$$

trên $\{u > r\}$.

Bước 2. Lấy hàm $v \in SH_m^-(\Omega)$. Do biểu diễn $\{u > v\} = \bigcup_{r_j \in \mathbb{Q}^-} \{u > r_j > v\}$, nên ta chỉ cần chứng minh rằng với mọi số hữu tỉ âm r_j ta có

$$\begin{aligned} & dd^c \max(u, v) \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_{m-1} \\ & \wedge \beta^{n-m} = dd^c u \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_{m-1} \\ & \wedge \beta^{n-m}, \end{aligned}$$

trên $\{u > r_j > v\}$.

Thật vậy, ta có $\max(u, v) \in \mathcal{F}_m(\Omega)$, theo bước 1 chúng ta có

$$\begin{aligned} & 1_{\{\max(u, v) > r_j\}} dd^c \max(u, v) \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge \\ & dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m} = 1_{\{\max(u, v) > r_j\}} \\ & dd^c \max(\max(u, v), r_j) \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge \\ & dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m} = 1_{\{\max(u, v) > r_j\}} \\ & dd^c \max(u, v, r_j) \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_{m-1} \\ & \wedge \beta^{n-m} \end{aligned} \quad (1)$$

và

$$\begin{aligned} & 1_{\{u > r_j\}} dd^c u \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_{m-1} \wedge \\ & \beta^{n-m} = 1_{\{u > r_j\}} dd^c \max(u, r_j) \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \\ & \wedge dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m}. \end{aligned} \quad (2)$$

Ta có $\max(u, v, r_j) = \max(u, r_j)$ trên tập mở $\{r_j > v\}$, do đó

$$\begin{aligned} & 1_{\{r_j > v\}} dd^c \max(u, v, r_j) \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \\ & \wedge dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m} = 1_{\{r_j > v\}} dd^c \max(u, r_j) \\ & \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m}. \end{aligned} \quad (3)$$

Từ bao hàm thức $\{u > r_j > v\} \subset \{u > r_j\}$, $\{r_j > v\}$, $\{\max(u, v) > r_j\}$ và (1), (2), (3) chúng ta có đẳng thức

$$\begin{aligned} & 1_{\{u > r_j > v\}} dd^c \max(u, v) \wedge dd^c u_1 \wedge \cdots \wedge \\ & dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m} = 1_{\{u > r_j > v\}} dd^c u \wedge dd^c u_1 \wedge \\ & \cdots \wedge dd^c u_{m-1} \wedge \beta^{n-m}. \end{aligned}$$

4 Kết Luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã chứng minh một dạng mạnh hơn của Định lý về tính liên tục trên lớp các hàm m-điều hoà dưới (Định lý 3.11 trong [5]) của L. H. Chinh và sử dụng kết quả đó để chứng minh một kết quả mở rộng Định lý 4.1 trong [6] từ lớp các hàm đa điều hoà dưới đến lớp các hàm m - điều hoà dưới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. E. Bedford and B. A. Taylor, "A new capacity for plurisubharmonic functions," *Acta Math*, Vol. 149, pp. 1-40, 1982.
2. U. Cegrell, "Pluricomplex energy," *Acta Math*, Vol. 180, pp. 187-217, 1998.
3. U. Cegrell, "The general definition of the complex Monge-Ampere operator," *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, Vol. 54, pp.159-179, 2004.
4. Z. Blocki, "Weak solutions to the complex Hessian equation," *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, Vol. 55, no.5, pp. 1735-1756, 2005.
5. L. H. Chinh, "A variational Approach to complex Hessian equations in $\mathbb{C}^n$," *J. Math. Anal. Appl.*, Vol. 431, no.1, pp. 228-259, 2015.
6. N. V. Khue and P. H. Hiep, "A Comparison Principle for the complex Monge-Ampere operator in Cegrell's classes and applications," *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 361, pp. 5539-5554, 2010.
7. N. Falkner, "Hahn's Proof of the Hahn Decomposition Theorem, and Related Matters," *Amer. Math. Monthly.*, Vol. 126, no. 3, pp. 264-268, 2019.