

BỘI CHUNG NHỎ NHẤT CỦA CÁC MA TRẬN

Nguyễn Thị Khánh Hòa⁽¹⁾

⁽¹⁾ Trường Đại học Thủ Dầu Một

Ngày nhận 29/12/2016; Chấp nhận đăng 29/01/2017; Email: hoanguyenthikhanh@gmail.com

Tóm tắt

Dựa trên những kiến thức đã có về bội chung nhỏ nhất của các số nguyên, kết hợp với khái niệm bội chung nhỏ nhất của các ma trận đã được Eugene Cahen định nghĩa trong [1] và sử dụng một số kết quả về môđun tự do, các phép toán đối với ma trận, các phép biến đổi sơ cấp trên ma trận, cách xác định nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất trên miền chính. Bài viết làm rõ định nghĩa bội chung nhỏ nhất của các ma trận thông qua các ví dụ và tính chất. Bài viết cũng chứng minh sự tồn tại và phương pháp tìm bội chung nhỏ nhất của các ma trận vuông cùng cấp và của các ma trận chỉ có cùng số dòng trên miền chính. Bài viết cũng trình bày chi tiết hơn về thuật toán tìm bội chung nhỏ nhất của các ma trận trên vành số nguyên.

Từ khóa: bội của ma trận, bội chung nhỏ nhất của các ma trận, ma trận trên miền chính.

Abstract

LEAST COMMON MULTIPLE OF MATRICES

Based on existing knowledge about the least common multiple of integers, in combination with the definition of least common multiple of matrices that Eugene Cahen definite in [1] and used some results of free modules, matrix calculators, the matrix operations and how to determine solution of a homogeneous system of equations over the main domain. The article clarifies definition of least common multiple of matrices by examples and properties. The article also proves the existence and how to find least common multiple of square matrices which have same size and least common multiple of matrices which have same numbers of rows on the main domain. The article also presents more detail about how to find least common multiple of matrices with elements as integers.

1. Giới thiệu

Khái niệm bội chung nhỏ nhất (BCNN) của các ma trận đã được Eugene Cahen định nghĩa trong [1]. Khái niệm này được định nghĩa tương tự như BCNN của các số nguyên. Tuy nhiên, giữa vành số nguyên $\mathbb{Z}$ và vành các ma trận $M_{m \times n}(R)$ với R là vành tùy ý, là có sự khác biệt. Chẳng hạn: phép nhân các số nguyên có tính giao hoán nhưng phép nhân các ma trận thì không. Hay ta luôn thực hiện được phép nhân trong vành $\mathbb{Z}$ nhưng đối với vành $M_{m \times n}(R)$ thì không phải lúc nào cũng thực hiện được. Do đó, khi R là vành tùy ý thì sự tồn tại BCNN của các ma trận không được đảm bảo và phương pháp tìm BCNN của các ma trận cũng không thể làm tương tự như trong vành số nguyên được. Trong [1], Eugene Cahen cũng đã đề cập đến

phương pháp tìm BCNN của các ma trận, tuy nhiên chúng ngắn gọn và gần như chỉ là sự hướng dẫn. Vì vậy, để góp phần làm sáng tỏ vấn đề trên, trong bài viết này, tác giả sẽ đưa ra điều kiện để BCNN của các ma trận trên vành R tồn tại và trình bày chi tiết phương pháp tìm BCNN của hai ma trận vuông với các phần tử là số nguyên.

2. Kiến thức chuẩn bị

2.1. Bổ đề 1 (Định lý 5.3, [4]): Cho R là miền nguyên và $A \in M_{m \times n}(R)$. Khi đó hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$ có nghiệm không tầm thường khi và chỉ khi $\text{rank}(A) < n$.

2.2. Bổ đề 2: Cho R là một vành giao hoán và $A \in M_{m \times n}(R)$. Tập nghiệm N của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$ (1) là R -môđun con của R -môđun R^n .

Chứng minh

Vì (1) luôn nhận $X = 0$ làm một nghiệm nên $N \neq \emptyset$.

$\forall \alpha, \beta \in R; \forall X_1, X_2 \in N$ ta có $AX_1 = AX_2 = 0$ nên

$$A(\alpha X_1 + \beta X_2) = \alpha(A X_1) + \beta(A X_2) = 0$$

Điều này có nghĩa là $\alpha X_1 + \beta X_2$ cũng là một nghiệm của (1), tức là $\alpha X_1 + \beta X_2 \in N$.

Vậy N là R -môđun con của R -môđun R^n .

2.3. Bổ đề 3 (Định lý 6.1, [3]): Cho R là miền chính và M là môđun con của R -môđun R^n . Khi đó M là môđun tự do với hạng không vượt quá n .

2.4. Bổ đề 4 (Bổ đề 2, [5]): Cho R là miền chính. I là ideal phải (trái) của $M_n(R)$. Khi đó I là ideal phải (trái) chính của $M_n(R)$.

2.5. Bổ đề 5 (định lý 3, [5]): Xét trên vành $M_{m \times n}(\mathcal{C})$. Bằng cách sử dụng hai phép biến đổi sơ cấp trên dòng (đổi chỗ 2 dòng; Cộng vào 1 dòng một bội của dòng khác) ta luôn đưa được một ma trận C bất kỳ về dạng bậc thang H và tồn tại một ma trận khả nghịch V sao cho $VC = H$.

3. Nghiệm của phương trình tuyến tính thuần nhất

Trong phần này ta luôn giả sử R là miền chính.

3.1. Mệnh đề 1: Cho $A \in M_{m \times n}(R)$. Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$AX = 0$. (1). Khi đó tập nghiệm của hệ (1) là một môđun tự do.

Chứng minh: Từ Bổ đề 2 và Bổ đề 3 ta suy ra điều phải chứng minh. Các mệnh đề sau đây ta xét trong trường hợp $R = \mathcal{C}$. Cho $D = [d_{ij}] \in M_{m \times n}(\mathcal{C})$ là ma trận có tính chất $d_{ii} \neq 0, \forall i = \overline{1, r}$ ($r \leq m$) và các phần tử khác bằng 0. D được kí hiệu là $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$ với $d_i = d_{ii}$, với mọi $i = 1, \dots, r$. Đặt $s = n - r$.

3.2. Mệnh đề 2: Hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $DX = 0$ có vô số nghiệm được xác định bằng công thức $X = \begin{bmatrix} 0 \\ I_s \end{bmatrix} [\alpha_i]_{s \times 1}$.

Với 0 là ma trận không cấp $r \times s$. I_s là ma trận đơn vị cấp s . $\alpha_i (\forall i = \overline{1, s})$ là các tham số thuộc $\mathcal{C}$.

Chứng minh

Vì $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$ nên hệ phương trình đã cho có dạng

$$\begin{cases} d_1 x_1 & = 0 \\ & d_2 x_2 & = 0 \\ & & \text{O} \\ & & & d_r x_r = 0 \end{cases}$$

Vì $d_i \neq 0 \ (\forall i = \overline{1, r})$ nên ta suy ra $x_1 = \dots = x_r = 0$. Do đó hệ có vô số nghiệm xác định bằng công thức: $(x_1, \dots, x_n) = (0, \dots, 0, \beta_{r+1}, \dots, \beta_n)$

với $\beta_i \ (\forall i = \overline{r+1, n})$ là các tham số tùy ý thuộc $\mathcal{C}$.

Ta đặt $\alpha_1 = \beta_{r+1}, \dots, \alpha_s = \beta_n$. Khi đó công thức xác định nghiệm được viết lại:

$$(x_1, \dots, x_n) = \alpha_1 (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0) + \alpha_2 (0, \dots, 0, 0, 1, \dots, 0) + \dots + \alpha_s (0, \dots, 0, \dots, 0, 1)$$

Vậy
$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ I_s \end{bmatrix} [\alpha_i]_{s \times 1}.$$

3.3. Mệnh đề 3: Cho hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $AX = 0$. Khi đó luôn tồn tại các ma trận khả nghịch $L \in M_m(\mathcal{C})$; $R \in M_n(\mathcal{C})$ sao cho

i) $([2]) \ LAR = D = \text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$.

ii) Hệ phương trình thuần nhất $AX = 0$ luôn có nghiệm xác định bằng công thức

$$X = R \begin{bmatrix} 0 \\ I_s \end{bmatrix} [\alpha_i]_{s \times 1}.$$

Chứng minh

i) Theo Bổ đề 5, bằng cách sử dụng 2 phép biến đổi trên dòng, luôn tồn tại một ma trận khả nghịch L sao cho $LA = H$ với H có dạng bậc thang. Hoàn toàn tương tự, bằng cách sử dụng 2 phép biến đổi sơ cấp trên cột đối với H , luôn tồn tại ma trận khả nghịch R sao cho $HR = D$ với $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$.

ii) Vì R khả nghịch nên ta có thể đặt $X = RY$ và vì L khả nghịch nên $AX = 0 \Leftrightarrow LAX = 0 \Leftrightarrow LARY = 0 \Leftrightarrow DY = 0$.

Theo Mệnh đề 2, hệ phương trình $DY = 0$ luôn có nghiệm xác định bằng công thức

$Y = \begin{bmatrix} 0 \\ I_s \end{bmatrix} [\alpha_i]_{s \times 1}$. Do đó nghiệm của hệ $AX = 0$ được xác định bằng công thức:

$$X = RY = R \begin{bmatrix} 0 \\ I_s \end{bmatrix} [\alpha_i]_{s \times 1}.$$

4. Bội chung nhỏ nhất của các ma trận

Trong phần này, ta luôn giả sử R là vành có đơn vị.

4.1. Các định nghĩa

Các định nghĩa dưới đây là của *Eugene Cahen* định nghĩa trong [1].

4.1.1. Bội của ma trận

Định nghĩa: Giả sử $A \in M_{m \times n}(R)$. Ta nói $M \in M_{m \times p}(R)$ là *bội bên trái của ma trận A*, nếu tồn tại $Q \in M_{n \times p}(R)$ sao cho $M = AQ$. Ta nói $M \in M_{p \times n}(R)$ là *bội bên phải của ma trận A*, nếu tồn tại $Q \in M_{p \times m}(R)$ sao cho $M = QA$.

Ví dụ: Trong $M_n(R)$, ma trận 0 là bội bên phải và bên trái của mọi ma trận A vì $0 = 0.A = A.0$.

Tính chất:

- i) Mọi ma trận đều là bội (bên phải và bên trái) của chính nó.
- ii) Nếu A là bội bên phải (trái) của B và B là bội bên phải (trái) của C thì A là bội bên phải (trái) của C .

4.1.2. Bội chung của các ma trận

Định nghĩa: Cho các ma trận $A_1, A_2, \dots, A_n$. Ma trận M được gọi là *bội chung bên trái (phải) của các ma trận $A_1, A_2, \dots, A_n$* nếu M là bội bên trái (phải) đồng thời của mỗi ma trận đó.

Ví dụ: Xét vành số nguyên $\mathbb{Z}$.

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ là bội chung của bên trái của } A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\text{Vì tồn tại các ma trận } P = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ để } M = AP = BQ.$$

Nhận xét: Ta biết rằng phép nhân hai ma trận chỉ thực hiện được khi số cột của ma trận đứng trước bằng số dòng của ma trận đứng sau. Do đó khái niệm bội chung bên trái (phải) của các ma trận $A_1, A_2, \dots, A_n$ chỉ tồn tại khi chúng có cùng số dòng (cột). Vì vậy nếu không có gì gây nhầm lẫn và để cho gọn, từ giờ ta chỉ xét trong các trường hợp mà phép nhân ma trận là thực hiện được.

4.1.3. Bội chung nhỏ nhất của các ma trận

Định nghĩa: Giả sử M là bội chung bên trái (phải) của các ma trận $A_1, A_2, \dots, A_n$. Nếu mọi bội chung bên trái (phải) của $A_1, A_2, \dots, A_n$ đều là bội bên trái (phải) của M thì M được gọi là *BCNN bên trái (phải) của các ma trận đó*.

Nhận xét: Nếu trong các ma trận $A_1, A_2, \dots, A_n$ có một ma trận 0 thì 0 là bội chung duy nhất của chúng và do đó 0 cũng sẽ là BCNN của các ma trận đó. Vì vậy, sau đây ta chỉ xét BCNN của các ma trận khác không và cũng chỉ xét BCNN bên trái, gọi tắt là BCNN và viết tắt BCNN của $A_1, A_2, \dots, A_n$ là $BCNN(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

$$\text{Ví dụ: Trên } M_2(\mathbb{Z}), \text{ cho } A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \text{ Khi đó, } I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ là } BCNN(A, B).$$

$$\text{Thật vậy, ta có: } I = AA^{-1} = BB^{-1} \text{ với } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ nên } I \text{ là bội}$$

chung bên trái của A và B . Hơn nữa, nếu M là một bội chung khác của A và B thì ta luôn có $M = IM$. Điều này có nghĩa M cũng là bội chung bên trái của I . Vậy I là $BCNN(A, B)$.

Chú ý: 1) Nếu M và M' là $BCNN(A_1, A_2, \dots, A_n)$ thì M và M' sai khác nhau một ma trận.
Chứng minh:

Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_n \in M_{m \times n}(R)$ và $M \in M_{m \times p}(R), M' \in M_{m \times q}(R)$.

Vì M, M' là $BCNN(A_1, A_2, \dots, A_n)$ nên M là bội của M' và M' là bội của M . Do đó tồn tại $P \in M_{p \times q}(R), Q \in M_{q \times p}(R)$ để $M' = MP$ và $M = M'Q$.

2) Giả thiết thêm R là miền nguyên và M, M' là các ma trận vuông khác 0 cùng cấp có định thức khác 0 thì M và M' sai khác nhau một ma trận khả nghịch.

Chứng minh: Theo trên ta có $M = M'Q = MPQ$. Suy ra $\det M = \det M \cdot \det P \cdot \det Q$. Vì R là miền nguyên nên $\det P \cdot \det Q = 1$. Suy ra P, Q khả nghịch.

3) Nếu các ma trận $A_1, A_2, \dots, A_n \neq 0$ có $BCNN$ là 0 thì 0 là $BCNN$ duy nhất của chúng.

Chứng minh:

Giả sử $M \neq 0$ là một $BCNN$ của các ma trận $A_1, A_2, \dots, A_n \neq 0$. Theo nhận xét 1, tồn tại một ma trận P sao cho $M = 0 \cdot P$. Điều này là vô lý. Do đó 0 là $BCNN$ duy nhất.

4) Theo chú ý 1 và 3, ta có thể kết luận nếu các ma trận $A_1, A_2, \dots, A_n$ có $BCNN$ khác 0 thì $BCNN$ của chúng là không duy nhất.

4.2. Sự tồn tại và phương pháp tìm bội chung nhỏ nhất của các ma trận

Trước tiên, tác giả xin trình bày định lý về sự tồn tại $BCNN$ của các ma trận vuông khác 0 với điều kiện R là miền chính và $BCNN$ này cũng sẽ có cùng cấp với các ma trận đó.

4.2.1. Định lý 1: Giả sử R là miền chính. Khi đó, luôn tồn tại $BCNN$ của các ma trận vuông khác 0 thuộc $S = M_n(R)$.

Chứng minh: Giả sử $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các ma trận khác 0 tùy ý thuộc $M_n(R)$, ta sẽ chứng minh luôn tồn tại $BCNN(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Xét $I = A_1 S \cup A_2 S \cup \dots \cup A_n S$.

* Ta thấy I là ideal phải của S . Theo bổ đề 4, vì R là miền chính nên mọi ideal phải của S đều là ideal phải chính. Suy ra tồn tại $M \in S$ sao cho: $I = MS = \{M \cdot K \mid K \in S\}$.

* Vì $M \in I$ nên tồn tại $Q_1, Q_2, \dots, Q_n \in S$ sao cho $M = A_1 Q_1 = A_2 Q_2 = \dots = A_n Q_n$. Như vậy M là bội chung của $A_1, A_2, \dots, A_n$. (1)

Giả sử $N \in S$ cũng là một bội chung của $A_1, A_2, \dots, A_n$. Khi đó $N \in I$. Tức là tồn tại $K \in S$ sao cho $N = MK$. Như vậy N cũng là một bội của M . (2)

Từ (1) và (2) suy ra M là $BCNN(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Đối với hai ma trận khác 0 có cùng số dòng, $BCNN$ của chúng cũng luôn tồn tại với điều kiện R là miền chính và định lý sau cho ta cách tìm $BCNN$ của chúng.

4.2.2. Định lý 2: Giả sử R là miền chính. Khi đó luôn tồn tại $BCNN$ của hai ma trận khác 0 có cùng số dòng.

Chứng minh: Giả sử $A \in M_{m \times n}(R), B \in M_{m \times p}(R), A, B \neq 0$. Ta sẽ tìm $BCNN(A, B)$.

* Nếu M là bội chung của A và B thì tồn tại hai ma trận P, Q sao cho

$$M = AP = BQ.$$

Đặt $C = \begin{bmatrix} A & -B \end{bmatrix}$ là ma trận cấp $m \times (n + p)$.

Khi đó mỗi vector cột của $\begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix}$ sẽ là một nghiệm của hệ phương trình tuyến tính thuần nhất

$$CX = 0. \quad (1)$$

* Theo Bổ đề 1 và Mệnh đề 1, nếu

+ $rank(C) = n + p$ thì hệ (1) chỉ có nghiệm tầm thường. Khi đó ma trận 0 là bội chung duy nhất và do đó là $BCNN(A, B)$.

+ $rank(C) < n + p$ thì hệ (1) có tập nghiệm là một môđun tự do với cơ sở S gồm k vector ($1 \leq k \leq n + p$). Khi đó các nghiệm của hệ (1) được xác định bằng công thức:

$$X = \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} [\alpha_i] \text{ với } [\alpha_i] \text{ là ma trận cột các tham số cấp } k \times 1. \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} \text{ là ma trận gồm các}$$

cột tọa độ của các vector trong cơ sở S và A_0, B_0 lần lượt là các ma trận cấp $n \times k$ và $p \times k$.

Vì mỗi vector cột của $\begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix}$ cũng là một nghiệm của (1) nên

$$\begin{bmatrix} A & -B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow AA_0 = BB_0$$

Như vậy $M = AA_0$ chính là bội chung của A và B .

* Giả sử $N \in M_{m \times q}(R)$ là một bội chung khác của A và B , tức là $N = AA_1 = BB_1$ với $A_1 \in M_{n \times q}(R); B_1 \in M_{p \times q}(R)$.

Rõ ràng mỗi vector cột của ma trận $\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix}$ cũng là một nghiệm của hệ (1). Do đó tồn tại

các giá trị $\beta_{ij} \in R (i = \overline{1, k}; j = \overline{1, q})$ sao cho

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} [\beta_{ij}]_{k \times q}$$

$$\text{Tức là } A_1 = A_0 [\beta_{ij}]_{k \times q}. \text{ Vì vậy } N = AA_1 = AA_0 [\beta_{ij}]_{k \times q} = M [\beta_{ij}]_{k \times q}.$$

Điều này có nghĩa N là một bội của M . Vậy M là $BCNN(A, B)$.

4.2.3. Phương pháp tìm bội chung nhỏ nhất của nhiều ma trận

Cho $A_1, A_2, \dots, A_n$ là các ma trận khác 0 có cùng số dòng trên miền chính R .

Gọi M_2 là $BCNN(A_1, A_2)$, M_3 là $BCNN(M_2, A_3)$, ..., M_n là $BCNN(M_{n-1}, A_n)$.

Khi đó M_n là $BCNN(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Thật vậy, ta thấy rằng mọi bội chung của $A_1, A_2, \dots, A_n$ đều là bội chung của $M_2, A_3, \dots, A_n$ và ngược lại. Vì vậy ta có $BCNN(A_1, A_2, \dots, A_n) = BCNN(M_2, A_3, \dots, A_n)$.

Lặp lại lí luận này nhiều lần, ta sẽ được $BCNN(A_1, A_2, \dots, A_n) = BCNN(M_2, A_3, \dots, A_n) = BCNN(M_3, A_4, \dots, A_n) = \dots = BCNN(M_{n-1}, A_n)$

nghĩa là M_n là $BCNN(A_1, A_2, \dots, A_n)$.

Từ Mệnh đề 3 và chứng minh của Định lý 2, ta có được thuật toán tìm BCNN của các ma trận trên vành ϕ như sau:

4.3. Thuật toán tìm BCNN của hai ma trận trên vành ϕ

Giả sử cần tìm BCNN của $A \in M_{m \times n}(\phi)$, $B \in M_{m \times p}(\phi)$, $A, B \neq 0$.

Bước 1: Đặt $C = \begin{bmatrix} A & -B \end{bmatrix}$ là ma trận cấp $m \times (n + p)$ và $r = \text{rank}(C)$.

Xét hệ phương trình tuyến tính thuần nhất $CX = 0$. (1)

- Nếu $r = n + p$ thì hệ (1) chỉ có nghiệm tầm thường. Do đó $BCNN(A, B)$ là ma trận 0.

- Nếu $r < n + p$ thì chuyển sang bước 2.

Bước 2: Tương tự thuật toán tìm UCLN của hai ma trận vuông trong [5], ta đưa ma trận C về dạng $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_r, 0, \dots, 0)$ bằng hai phép biến đổi sơ cấp trên dòng (cột). Khi đó ta có hai ma trận khả nghịch $L \in M_m(\phi)$; và $R \in M_{(n+p) \times (n+p)}(\phi)$ sao cho $LCR = D$.

Bước 3: Giải hệ $DY = 0$. Giả sử tìm được nghiệm là $Y = \begin{bmatrix} 0 \\ I_s \end{bmatrix}_{(n+p) \times s} [\alpha_i]_{s \times 1}$.

Với $s = n + p - r$. I_s là ma trận đơn vị cấp s . $[\alpha_i]_{s \times 1}$ là ma trận cột các tham số.

Bước 4: Nghiệm của hệ (1) được tính theo công thức

$$X = RY = \begin{bmatrix} A_0 \\ B_0 \end{bmatrix} [\alpha_i]_{s \times 1}$$

với A_0, B_0 lần lượt là các ma trận cấp $n \times s$ và $p \times s$.

Bước 5: Khi đó $BCNN(A, B)$ là $M = A.A_0$.

Ví dụ: Tìm BCNN của hai ma trận A và B , biết $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ và $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Đặt $C = \begin{bmatrix} A & -B \end{bmatrix}$. Ta đưa ma trận C về dạng chéo bằng cách sử dụng hai phép biến đổi sơ cấp trên dòng, cột như sau:

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[c3 \rightarrow c3 + 2c1]{c2 \rightarrow c2 + c1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d2 \leftrightarrow d3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{d3 \rightarrow d3 - 2d2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = D$$

Phép biến đổi thứ nhất tương đương với việc nhân thêm bên phải C hai ma trận sơ cấp

$$R_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ và } R_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Phép biến đổi thứ hai và ba tương đương với việc nhân thêm bên trái C hai ma trận sơ cấp

$$L_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ và } L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Đặt $R = R_1 R_2$ và $L = L_2 L_1$. Khi đó $LCR = D$.

$$\text{Hệ phương trình } DY = 0 \text{ có nghiệm là } Y = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [a] \text{ với } a \in \mathbb{C} \text{ là tham số.}$$

$$\text{Khi đó hệ phương trình } CX = 0 \text{ có nghiệm là } X = RY = \begin{bmatrix} 2a \\ 0 \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [a].$$

$$\text{Vậy } BCNN(A, B) \text{ là } M = A.A_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot [2] = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Éugene Cahen, *Théorie des nombres*, Librairie Scientifique A. Hermann & Fils, 1914.
- [2] N. Jacobson, *Basic Algebra I*, W.H. Freeman and Co., San Francisco, 1974.
- [3] Thomas W. Hungerford, *Algebra*, Springer Science & Business Media, 1974.
- [4] William Brown, *Matrices over commutative rings*, Marcel Dekker, 1993.
- [5] Nguyễn Thị Khánh Hòa, Nguyễn Thị Kiều Trinh (2016), *Ước chung lớn nhất của các ma trận vuông*, Tạp chí khoa học Đại học Thủ Dầu Một, số 2 (27).