

PHƯƠNG PHÁP PROPER GENERALIZED DECOMPOSITION CHO BÀI TOÁN TẮM MỎNG CHỊU UỐN

Lê Quốc Cường⁽¹⁾, Nguyễn Bá Duy⁽²⁾

⁽¹⁾ Trường Đại học Sư phạm Kỹ thuật TP.HCM; ⁽²⁾ Trường Đại học Thủ Dầu Một

Ngày nhận 29/12/2016; Chấp nhận đăng 29/01/2017; Email: lecuong2109@gmail.com

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi trình bày phương pháp Proper Generalized Decomposition (PGD) để giải quyết bài toán tấm mỏng chịu uốn trong không gian hai chiều. Phương pháp PGD được áp dụng để đưa bài toán hai chiều thành chuỗi các bài toán một chiều. Sau đó, mỗi bài toán một chiều được giải bằng phương pháp sai phân hữu hạn. Kết quả mô phỏng số được áp dụng cho bài toán tấm mỏng chịu uốn với các điều kiện biên khác nhau. Các kết quả tính toán sẽ được so sánh với lời giải giải tích.

Từ khóa: giảm bậc mô hình, Proper Generalized Decomposition, tấm mỏng chịu uốn

Abstract

PROPER GENERALIZED DECOMPOSITION METHOD FOR THE THIN PLATE BENDING PROBLEM

In this paper, we present Proper Generalized Decomposition (PGD) method to solve the problem of thin plate bending in two-dimensional space. PGD method is applied to transform the two-dimensional problem into a series of one-dimensional problems. Then, each one-dimensional problem is solved by the finite difference method. Numerical simulation results are applied to thin plate bending problem with different boundary conditions. The calculation results are compared with analytical solutions.

1. Giới thiệu

Nhiều mô hình bài toán thường gặp trong khoa học và kỹ thuật thường được định nghĩa trong không gian đa chiều, điều đó làm cho vấn đề chiều thứ nguyên trở nên cực kỳ phức tạp khi áp dụng kỹ thuật chia lưới rời rạc thông thường. Hơn nữa các mô hình theo tiêu chuẩn có thể trở thành đa chiều khi các thông số thay đổi. Vì vậy việc phát triển một phương pháp mới nhằm giải quyết bài toán một cách nhanh chóng hơn là rất cần thiết.

Phương pháp PGD lần đầu tiên được giới thiệu bởi giáo sư Chinesta và các cộng sự [1]. Sự ra đời của phương pháp PGD đã góp phần hỗ trợ giải quyết bài toán có số chiều không gian lớn một cách hiệu quả với thời gian xử lý nhanh và độ chính xác cao. Phương pháp PGD ngày càng được mở rộng ứng dụng để giải quyết các bài toán đa chiều trong các lĩnh vực như cơ lưu chất [2], truyền nhiệt [3], vật liệu composite [4].

Phương pháp PGD là phương pháp giảm bậc mô hình dựa trên cơ sở tách biến, lời giải của bài toán được tìm dưới dạng tổng của các tích hàm số trên mỗi chiều không gian.

Giả sử trường u phụ thuộc N biến số $(x_1, x_2, \dots, x_N)$, khi đó giá trị u được viết dưới dạng tách biến như sau:

$$u(x_1, x_2, \dots, x_N) = \sum_{i=1}^Q F_i(x_1) \cdot F_i(x_2) \dots F_i(x_N) \quad (1)$$

trong đó x_i ($i = 1, 2, \dots, N$) là biến số không gian, thời gian hay tham số mà bài toán cần khảo sát.

Bài toán phân tích tấm mỏng chịu uốn đã được thực hiện thành công với nhiều phương pháp số khác nhau (phần tử hữu hạn, sai phân hữu hạn, phương pháp phổ, ...). Trong bài báo này, phương pháp PGD được đề xuất để giải quyết bài toán tấm mỏng chịu uốn. Phương pháp PGD được áp dụng để đưa phương trình vi phân đạo hàm riêng của bài toán tấm mỏng chịu uốn trong không gian hai chiều thành chuỗi các phương trình vi phân trong không gian một chiều. Sau đó, phương pháp sai phân hữu hạn dựa trên sơ đồ sai phân trung tâm bậc hai được áp dụng để giải các phương trình một chiều.

Bài báo này được tổ chức như sau, phần 2 trình bày phương trình vi phân chủ đạo của bài toán tấm mỏng chịu uốn. Phần 3 trình bày phương pháp PGD cho phương trình biharmonic trong không gian hai chiều. Sau cùng, các kết quả mô phỏng được trình bày ở phần 4.

2. Phương trình vi phân chủ đạo cho bài toán tấm mỏng chịu uốn

Phương trình vi phân chủ đạo của bài toán tấm mỏng chịu uốn trong không gian hai chiều có dạng phương trình biharmonic [7] như sau

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D}, \quad (2) \text{ ở đây } w \text{ độ võng của tấm, } p \text{ lực tác dụng lên bề mặt tấm}$$

và $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ độ cứng chịu uốn của tấm. Trong đó, E là mô đun đàn hồi, h là chiều dày tấm

và ν là hệ số poisson.

3. Phương pháp PGD cho phương trình biharmonic

Xét phương trình biharmonic trong không gian hai chiều như sau

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = f(x, y) \text{ trong miền } \Omega = \Omega_x \times \Omega_y \quad (3)$$

Mục tiêu của chúng ta là áp dụng phương pháp PGD để tìm nghiệm xấp xỉ của phương trình (3). Giả sử nghiệm xấp xỉ của phương trình được viết dưới dạng tách biến như sau

$$u(x, y) \approx \sum_{i=1}^N X_i(x) \cdot Y_i(y) \quad (4)$$

Giả sử lời giải ở bước lặp thứ n đã biết, chúng ta cần tìm lời giải ở bước lặp thứ $n+1$

$$u^{n+1}(x, y) \approx \sum_{i=1}^n X_i(x) \cdot Y_i(y) + R(x) \cdot S(y) \quad (5) \text{ ở đây: } R(x) = X_{n+1}(x) \text{ và } S(y) = Y_{n+1}(y).$$

Phương trình (3) được đưa về dạng yếu như sau

$$\int_{\Omega_x \times \Omega_y} u^* \cdot \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - f \right) dx dy = 0, \quad (6)$$

$$\text{với } u^* = R^* \cdot S + R \cdot S^* \text{ là hàm trọng số.} \quad (7)$$

Thay (5) và (7) vào phương trình (6), ta được

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_x \times \Omega_y} (R^* \cdot S + R \cdot S^*) \cdot \left(\frac{d^4 R}{dx^4} \cdot S + 2 \frac{d^2 R}{dx^2} \cdot \frac{d^2 S}{dy^2} + R \cdot \frac{d^4 S}{dy^4} \right) dx dy &= \int_{\Omega_x \times \Omega_y} (R^* \cdot S + R \cdot S^*) \cdot f dx dy \\ &- \int_{\Omega_x \times \Omega_y} (R^* \cdot S + R \cdot S^*) \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{d^4 X_i}{dx^4} \cdot Y_i \right) dx dy \\ &- 2 \int_{\Omega_x \times \Omega_y} (R^* \cdot S + R \cdot S^*) \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2} \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} \right) dx dy \\ &- \int_{\Omega_x \times \Omega_y} (R^* \cdot S + R \cdot S^*) \cdot \sum_{i=1}^n \left(X_i \cdot \frac{d^4 Y_i}{dy^4} \right) dx dy \end{aligned} \quad (8)$$

Để giải phương trình (8) tìm $R(x)$ và $S(y)$, chúng ta sử dụng giải thuật lặp cố định luân phiên gồm các bước sau:

Bước 1: Tìm hàm $R(x)$

Giả sử $S(y)$ đã biết, khi đó $S^* = 0$, thay vào phương trình (8) ta được

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_x \times \Omega_y} R^* \cdot S \cdot \left(\frac{d^4 R}{dx^4} \cdot S + 2 \frac{d^2 R}{dx^2} \cdot \frac{d^2 S}{dy^2} + R \cdot \frac{d^4 S}{dy^4} \right) dx dy &= \int_{\Omega_x \times \Omega_y} R^* \cdot S \cdot f dx dy \\ &- \int_{\Omega_x \times \Omega_y} R^* \cdot S \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{d^4 X_i}{dx^4} \cdot Y_i \right) dx dy \\ &- 2 \int_{\Omega_x \times \Omega_y} R^* \cdot S \cdot \sum_{i=1}^n \left(\frac{d^2 X_i}{dx^2} \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} \right) dx dy \\ &- \int_{\Omega_x \times \Omega_y} R^* \cdot S \cdot \sum_{i=1}^n \left(X_i \cdot \frac{d^4 Y_i}{dy^4} \right) dx dy \end{aligned} \quad (9)$$

Vì tất cả các hàm phụ thuộc y ở phương trình (9) đã biết, chúng ta có thể thực hiện tích phân một chiều trên Ω_y

$$\left\{ \begin{aligned} a_y &= \int_{\Omega_y} S^2 dy \\ b_y &= \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^2 S}{dy^2} dy \\ c_y &= \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^4 S}{dy^4} dy \\ f_y(x) &= \int_{\Omega_y} S \cdot f dy \\ a_y^i &= \int_{\Omega_y} S \cdot Y_i dy \\ b_y^i &= \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^2 Y_i}{dy^2} dy \\ c_y^i &= \int_{\Omega_y} S \cdot \frac{d^4 Y_i}{dy^4} dy \end{aligned} \right. \quad (10)$$

Khi đó phương trình (9) trở thành

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_x} R^* \cdot \left(a_y \frac{d^4 R}{dx^4} + 2b_y \frac{d^2 R}{dx^2} + c_y R \right) dx &= \int_{\Omega_x} R^* \cdot f_y(x) dx - \int_{\Omega_x} R^* \cdot \sum_{i=1}^n a_y^i \frac{d^4 X_i}{dx^4} dx \\ &\quad - 2 \int_{\Omega_x} R^* \cdot \sum_{i=1}^n b_y^i \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx \quad (11) \\ &\quad - \int_{\Omega_x} R^* \cdot \sum_{i=1}^n c_y^i X_i dx \end{aligned}$$

Phương trình (11) là dạng yếu một chiều được định nghĩa trên Ω_x . Ngoài ra chúng ta có thể đưa về dạng mạnh như sau

$$a_y \frac{d^4 R}{dx^4} + 2b_y \frac{d^2 R}{dx^2} + c_y R = f_y(x) - \sum_{i=1}^n a_y^i \frac{d^4 X_i}{dx^4} - 2 \sum_{i=1}^n b_y^i \frac{d^2 X_i}{dx^2} - \sum_{i=1}^n c_y^i X_i \quad (12)$$

Bước 2: Tìm hàm $S(y)$

Với $R(x)$ vừa tính ở bước trên, khi đó $R^* = 0$, tiến hành tương tự như bước tìm hàm $R(x)$, ta được phương trình dạng mạnh của hàm $S(y)$ như sau

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_y} S^* \cdot \left(a_x \frac{d^4 S}{dy^4} + 2b_x \frac{d^2 S}{dy^2} + c_x S \right) dy &= \int_{\Omega_y} S^* \cdot f_x(y) dy - \int_{\Omega_y} S^* \cdot \sum_{i=1}^n a_x^i \frac{d^4 Y_i}{dy^4} dy \\ &\quad - 2 \int_{\Omega_y} S^* \cdot \sum_{i=1}^n b_x^i \frac{d^2 Y_i}{dy^2} dy \quad (13) \\ &\quad - \int_{\Omega_y} S^* \cdot \sum_{i=1}^n c_x^i Y_i dy \end{aligned}$$

ở đây

$$\left\{ \begin{aligned} a_x &= \int_{\Omega_x} R^2 dx \\ b_x &= \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^2 R}{dx^2} dx \\ c_x &= \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^4 R}{dx^4} dx \\ f_x(y) &= \int_{\Omega_x} R \cdot f dx \\ a_x^i &= \int_{\Omega_x} R \cdot X_i dx \\ b_x^i &= \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^2 X_i}{dx^2} dx \\ c_x^i &= \int_{\Omega_x} R \cdot \frac{d^4 X_i}{dx^4} dx \end{aligned} \right. \quad (14)$$

Phương trình (13) có thể được đưa về dạng mạnh như sau

$$a_x \frac{d^4 S}{dy^4} + 2b_x \frac{d^2 S}{dy^2} + c_x S = f_x(y) - \sum_{i=1}^n a_x^i \frac{d^4 Y_i}{dy^4} - 2 \sum_{i=1}^n b_x^i \frac{d^2 Y_i}{dy^2} - \sum_{i=1}^n c_x^i Y_i \quad (15)$$

Các bước giải phương trình (12) và phương trình (15) để tìm $R(x)$ và $S(y)$ được lặp cho đến khi kết quả hội tụ. Nếu kí hiệu $R^{(q)}(x)$ và $R^{(q-1)}(x)$ là hàm $R(x)$ đã được tính ở bước lặp hiện tại và bước lặp trước, tương tự với $S^{(q)}(y)$ và $S^{(q-1)}(y)$, tiêu chuẩn dừng được chọn như sau

$$e = \|R^{(q)}(x) \cdot S^{(q)}(y) - R^{(q-1)}(x) \cdot S^{(q-1)}(y)\| < \varepsilon_{RS} \quad (16)$$

ở đây ε_{RS} là hằng số được chọn đủ bé để đảm bảo độ chính xác.

Sau khi các bước lặp tìm $R(x)$ và $S(y)$ hội tụ, chúng ta xác định được $X_{n+1}(x) = R(x)$ và $Y_{n+1}(y) = S(y)$. Quá trình tìm các cặp hàm $(X_i(x), Y_i(y))$ phải được tiếp tục cho đến khi đạt được sự hội tụ toàn cục của bài toán ở bước lặp thứ N , khi đó nghiệm xấp xỉ của bài toán được tính như sau

$$u(x, y) \approx \sum_{i=1}^N X_i(x) \cdot Y_i(y) \quad (17)$$

Điều kiện dừng toàn cục của bài toán được tính như sau

$$E = \frac{\|res\|_2}{\|f(x, y)\|_2} < \varepsilon_u \quad (18)$$

ở đây ε_u là một hằng số được chọn đủ nhỏ và res là hàm thặng dư của bài toán

$$res = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} - f(x, y) \quad (19)$$

Chúng ta thấy rằng phương trình Biharmonic hai chiều ban đầu được định nghĩa trên $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$ đã được chuyển đổi thành các bài toán một chiều trên Ω_x và Ω_y với phương pháp PGD.

Sơ đồ sai phân trung tâm bậc hai được sử dụng để giải các phương trình vi phân một chiều có dạng như phương trình (12) và (15) để tìm $R(x)$ và $S(y)$ tương ứng. Sơ đồ sai phân bậc hai cho đạo hàm bậc hai và bậc 4 của một hàm $f(x)$ bất kỳ được tính như sau:

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} \approx \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (20)$$

$$\frac{\partial^4 f(x)}{\partial x^4} \approx \frac{f(x+2h) - 4f(x+h) + 6f(x) - 4f(x-h) + f(x-2h)}{h^2} + O(h^2) \quad (21)$$

ở đây h là kích thước bước lưới.

4. Kết quả mô phỏng số

Bài toán 1:

Xét tấm hình chữ nhật $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ có phương trình vi phân chủ đạo như phương trình (2), với vế phải được cho như sau:

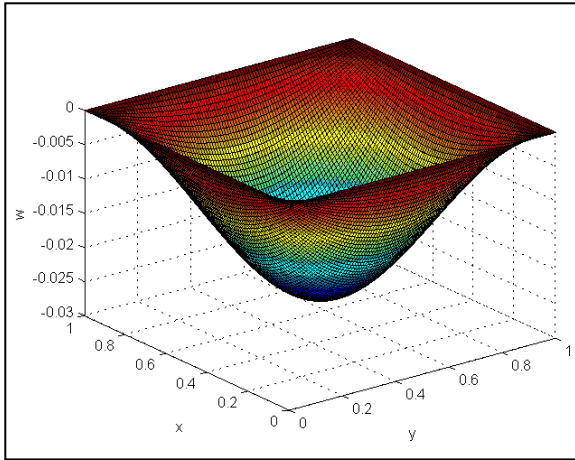
$$f(x, y) = \frac{q}{D} \sin(\pi x) \sin(\pi y). \quad (22)$$

Trong trường hợp tấm với điều kiện biên là gối tựa đơn ở cả bốn cạnh như sau

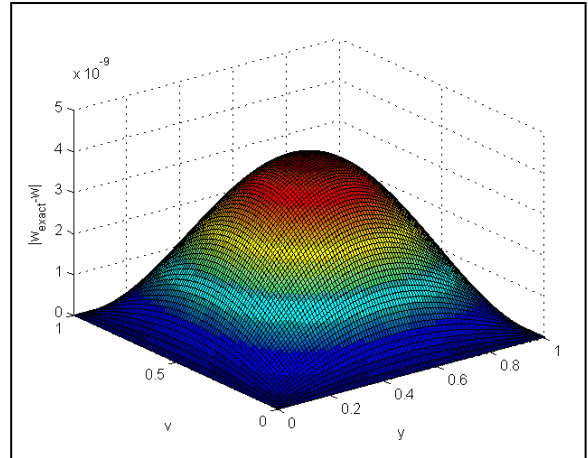
$$w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = 1 \quad (23), \quad w = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \text{ tại } y = 0 \text{ và } y = 1 \quad (24)$$

khí đó lời giải chính xác của bài toán là $w_{\text{exact}} = \frac{q}{4\pi^4 D} \sin(\pi x) \sin(\pi y) \quad (25)$

Phương pháp PGD được áp dụng cho bài toán với các thông số mô phỏng như sau: $p = -1$, $E = 1092000 \text{ MPa}$, $h = 0.01$, $\nu = 0.3$. Miền tính toán được rời rạc với lưới 100 cho mỗi chiều trục x và y . Hình 1 trình bày lời giải PGD cho độ võng của tấm mỏng với điều kiện biên gối tựa đơn ở cả bốn cạnh của tấm. Sai số giữa lời giải PGD và lời giải chính xác được trình bày ở hình 2.



Hình 1. Lời giải của bài toán bằng phương pháp PGD cho tấm mỏng với điều kiện biên gối tựa đơn ở bốn cạnh của tấm trên lưới 100×100



Hình 2. Sai số $|w_{\text{exact}} - w|$ giữa lời giải giải tích và lời giải PGD trên lưới 100×100

Bài toán 2:

Trong trường hợp tấm bị ngàm ở cả bốn cạnh, ta có điều kiện biên tương ứng như sau

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \text{ tại } x = 0 \text{ và } x = 1, \quad (26)$$

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ tại } y = 0 \text{ và } y = 1. \quad (27)$$

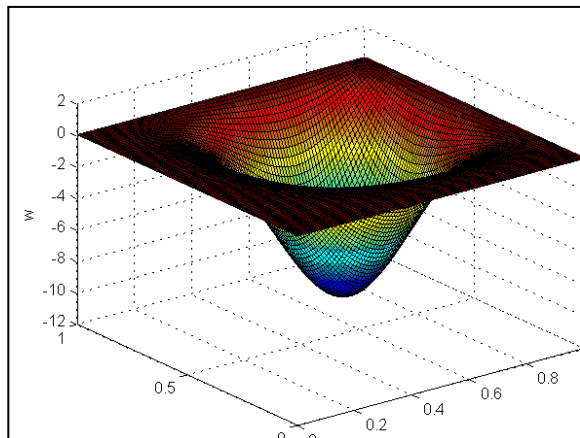
Các thông số mô phỏng được cho tương tự như trường hợp ở bài toán 1, về phải của phương trình vi phân chủ đạo được cho như sau:

$$\begin{aligned} f(x, y) = & \frac{q}{D} 56400 (a^2 - 10ax + 15x^2) (b - y)^2 y^4 \\ & + \frac{q}{D} 18800x^2 (6a^2 - 20ax + 15x^2) y^2 (6b^2 - 20by + 15y^2) \\ & + \frac{q}{D} 56400 (a - x)^2 x^4 (b^2 - 10by + 15y^2) \end{aligned} \quad (28)$$

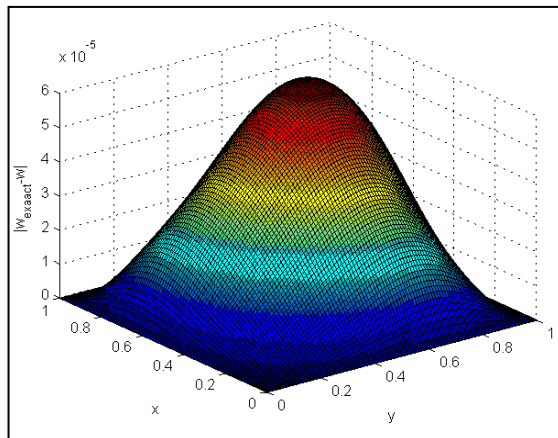
Với điều kiện biên bị ngàm ở bốn cạnh lời giải chính xác của bài toán là

$$w_{\text{exact}} = \frac{q}{D} 2350x^4(x-a)^2y^4(y-b)^2 \quad (29)$$

Hình 3 trình bày lời giải PGD cho độ võng của tấm với điều kiện biên ngàm chặt ở cả bốn cạnh của tấm. Sai số giữa lời giải PGD và lời giải chính xác được trình bày ở hình 4.



Hình 3. Lời giải của bài toán bằng phương pháp PGD cho tấm mỏng với điều kiện biên ngàm ở bốn cạnh của tấm.



Hình 4. Sai số $|w_{\text{exact}} - w|$ giữa lời giải giải tích và lời giải PGD trên lưới 100×100

5. Kết luận

Trong bài báo này, chúng tôi đã sử dụng phương pháp PGD để phân tích bài toán tấm mỏng chịu uốn với các điều kiện biên khác nhau. Các kết quả mô phỏng cho thấy sự đồng thuận khá tốt của phương pháp đề xuất với lời giải chính xác của bài toán. Với việc đưa bài toán đa chiều về các bài toán một chiều, phương pháp PGD sẽ giúp làm giảm chi phí tính toán và tiết kiệm bộ nhớ máy tính.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] F. Chinesta, A. Ammar, E. Cueto (2010), *Proper generalized decomposition of multiscale models*, Int J Numer Methods Eng, 83(8–9), pp. 1114–1132.
- [2] A. Dumon, C. Allery, A. Ammar (2011), *Proper general decomposition (PGD) for the resolution of Navier–Stokes equations*, Journal of Computational Physics, 230, pp. 1387–1407.
- [3] E. Prulière, F. Chinesta, A. Ammar, A. Leygue, A. Poitou (2013), *On the solution of the heat equation in very thin tapes*, International Journal of Thermal Sciences, 65, pp. 148–157.
- [4] P. Vidal, L. Gallimard, O. Polit (2012), *Composite beam finite element based on the Proper Generalized Decomposition*, Computers and Structures, 102–103, pp. 76–86.
- [5] A.J. Chorin (1968), *Numerical solution of the Navier-Stokes equations*, Math. Comput, 22, pp. 745–762.
- [6] U. Ghia, K. Ghia, C. Shin (1982), *High-re solutions for incompressible flow using the Navier–Stokes equations and a multigrid method*, Journal of Computational Physics, 48, pp. 387–411.
- [7] S. P. Timoshenko, S. Woinowsky_Krieger (1970), *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill, New York.