

Nghiên cứu khử phân kỳ hồng ngoại cho bài toán tán xạ ở trường điện từ ngoài

Đỗ Thu Hà*

*ThS, Trường Đại học Tài Nguyên và Môi Trường Hà Nội

Received: 02/10/2023; Accepted: 12/10/2023; Published: 20/10/2023

Abstract: In field theory, there exist two types of divergence: The first is ultraviolet divergence that occurs in the momentum region of large virtual particles in the inner line of the Feynman diagram. The second is infrared divergence that occurs in the momentum region of small real and virtual particles. To eliminate ultraviolet divergence, there are 3 methods: Pauli-Vallars method, dimension adjustment method, large momentum cutting method. To eliminate infrared divergence, the $\lambda_{\min}$ method is used. In this article, we study the application of correction methods of ultraviolet divergence to infrared divergence and discuss the relationship between the two above methods. Calculate the scattering amplitude and its correction for the problem of electron scattering in the external field.

Keywords: De-divergence; Electron scattering; Field theory.

1. Đặt vấn đề

Trong lý thuyết trường tồn tại hai loại phân kỳ: Thứ nhất là phân kỳ tử ngoại xảy ra ở vùng xung lượng của các hạt ảo lớn thuộc đường trong của giản đồ Feynman. Thứ hai là phân kỳ hồng ngoại xảy ra ở vùng xung lượng của các hạt thực và hạt ảo nhỏ. Để khử phân kỳ tử ngoại có 3 phương pháp: Phương pháp Pauli-Vallars, phương pháp điều chỉnh thứ nguyên, phương pháp cắt xung lượng lớn. Để khử phân kỳ hồng ngoại người ta sử dụng phương pháp $\lambda_{\min}$. Trong bài báo này chúng tôi nghiên cứu việc áp dụng các phương pháp điều chỉnh của phân kỳ tử ngoại cho phân kỳ hồng ngoại và thảo luận mối liên hệ giữa hai phương pháp trên. Tính toán biên độ tán xạ và bổ chính của nó cho bài toán tán xạ electron ở trường ngoài.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. S – ma trận và giản đồ Feynman cho bài toán tán xạ electron ở trường ngoài

Biên độ xác suất của các quá trình tán xạ được xác định bằng các yếu tố của S- ma trận.

$$S = S^{(0)} + S^{(1)} + \dots = 1 + iT \int L_{\text{int}}(x) d^4x +$$

$$\frac{(i)^2}{2!} T \int L_{\text{int}}(x) L_{\text{int}}(y) d^4x d^4y + \dots, (1)$$

Yếu tố ma trận của các quá trình vật lý có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\langle f | S | i \rangle = \delta_{fi} + i(2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) M_{fi}, (2)$$

Thay (1) vào (2) ta có:

$$\langle f | S | i \rangle = \langle f | 1 | i \rangle + iT \langle f | \int L_{\text{int}}(x) d^4x | i \rangle + \frac{(i)^2}{2!} T$$

$$\langle f | \int L_{\text{int}}(x) L_{\text{int}}(y) d^4x d^4y | i \rangle + \dots (3)$$

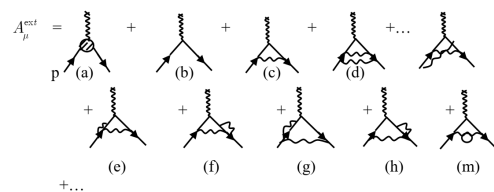
Xét quá trình tán xạ đàn tính của electron ở trường điện từ ngoài trong gần đúng bậc 1.

$$S = T \exp\left(\int L_{\text{int}}(x) d^4x\right); L_{\text{int}}(x) = ieN(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi A_{\mu}^{\text{ext}});$$

$$S_0 = 1; S_1 = T\left(\int L_{\text{int}}(x) d^4x\right) = T\left(ie\int N(\bar{\psi}\gamma_{\mu}\psi) A_{\mu}^{\text{ext}}(x) d^4x\right);$$

(4)

Quá trình tán xạ này có thể mô tả bởi các giản đồ Feynman [2 - 4] theo lý thuyết nhiễu loạn hiệp biến. Giản đồ Feynman trong gần đúng bậc thấp nhất (a) theo điện tích e và các giản đồ Feynman tiếp theo mô tả các bậc cao (bổ chính) cho quá trình tán xạ này.



Hình 2.1: Giản đồ Feynman diễn tả quá trình tán xạ của electron trong trường điện từ ngoài.

Yếu tố ma trận trong bậc thấp nhất của lý thuyết nhiễu loạn, tương ứng với giản đồ (1a) theo quy tắc Feynman có thể viết như sau:

$$\langle p'r' | S_1 | pr \rangle = -e \left(\frac{m}{p_0 p'_0} \right)^{1/2} \bar{u}^{r'}(p') \gamma_{\mu} u^r(p) A_{\mu}^{\text{ext}}(p' - p)$$

(5)

Chú ý có thể viết yếu tố ma trận (5) dưới dạng:

$$\langle p'r' | S_1 | pr \rangle = \delta(p'_0 - p_0) R_{fi} (6)$$

trong đó R_{fi} được gọi là biên độ tán xạ của electron

trong trường điện từ ngoài tĩnh:

$$R_{fi} = -2\pi a \left(\frac{m^2}{p_0 p_0'} \right)^{1/2} \bar{u}^{r'}(p') \gamma_\mu u^r(p) A_\mu^{\text{ext}}(p' - p), \quad (7)$$

Ta có: $R_{fi} = \delta(P_f - P_i) M_{fi}$. Trong trường hợp tán xạ trên thế Coulomb, thì M_{fi} có dạng:

$$M_{fi} = -\frac{me}{2\pi} \bar{u}^{r'}(p') \gamma_\mu u^r(p) A_\mu^{\text{ext}}(p' - p). \quad (8)$$

Thay (8) vào công thức tiết diện tán xạ vi phân và lấy giới hạn phi tương đối tính ta có:

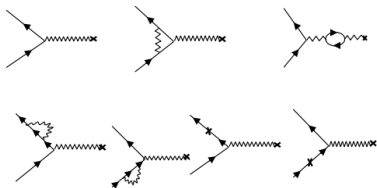
$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)^0 = \left(\frac{Ze^2}{16\pi E \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^2. \quad (9)$$

Công thức (9) khác công thức Rutherford bởi bổ chính $\frac{p^2}{m^2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$, là sự đóng góp spin của e.

2.2. Bổ chính cho biên độ tán xạ ở trường ngoài

2.2.1. Bổ chính photon ảo cho biên độ tán xạ gần đúng bậc nhất

Giản đồ Feynman cho bổ chính photon ảo được đưa ra trong hình 2. Trong vùng hồng ngoại chúng ta chỉ cần tính đối với giản đồ (2b) bởi vì tất cả các giản đồ còn lại đều hội tụ [3].



Hình vẽ 2.2: Giản đồ Feynman cho bổ chính cho tán xạ đàn tính của electron trong trường điện từ ngoài

Theo quy tắc Feynman ta có bổ chính cho giản đồ đỉnh (2b):

$$\Lambda_\mu(p', p) = -ie^2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma_\nu (p' - k + im) \gamma_\mu (p - k + im) \gamma^\nu}{k^2 (k^2 - 2p'k) (k^2 - 2pk)} \quad (10)$$

Lấy tích phân n chiều và công thức ma trận Dirac γ , công thức tham số hóa Feynman ta có:

$$\Lambda_\mu(p', p) = \frac{e^2}{(2\sqrt{\pi})^n} \int_0^1 dx dy \left\{ \gamma_\mu \frac{1}{2} (2-n) \Gamma \left(2 - \frac{1}{2}n \right) C^{\frac{1}{2}n-3} \right. \\ \left. - \gamma_\mu \frac{1}{2} \Gamma \left(3 - \frac{1}{2}n \right) C^{\frac{1}{2}n-3} \times \left[m^2 (4 + 2y - 12xy - 4xy^2 + (4-n)2xy^2) + q^2 (-2 + 2y - 2xy^2 + 2x^2 y^2 + (4-n)(xy^2 - x^2 y^2)) \right] \right. \\ \left. + 2im\sigma_{\mu\nu} q^\nu \Gamma \left(3 - \frac{1}{2}n \right) C^{\frac{1}{2}n-3} [2y - 2xy - 2xy^2 + (4-n)xy^2] \right\}$$

$$\equiv A(q^2) \gamma_\mu + iB(q^2) m \sigma_{\mu\nu} q^\nu \quad (11)$$

Trong đó:

$$A(q^2) = \frac{e^2}{(2\sqrt{\pi})^n} \int_0^1 dx dy \left\{ \frac{1}{2} (2-n) \Gamma \left(2 - \frac{1}{2}n \right) C^{\frac{1}{2}n-3} \right. \\ \left. - 12xy - 4xy^2 + (4-n)2xy^2 + q^2 (-2 + 2y - 2xy^2 + 2 \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \Gamma \left(3 - \frac{1}{2}n \right) C^{\frac{1}{2}n-3} \times [m^2 (4 + 2y - 12xy - 4xy^2 + (4-n)2xy^2) \right. \\ \left. + q^2 (-2 + 2y - 2xy^2 + 2x^2 y^2 + (4-n)(xy^2 - x^2 y^2))] \right\} \\ B(q^2) = \frac{e^2}{(2\sqrt{\pi})^n} \int_0^1 dx dy \left\{ 2 \Gamma \left(3 - \frac{1}{2}n \right) C^{\frac{1}{2}n-3} [2y - 2xy - 2xy^2 + (4-n)xy^2] \right\}$$

Ta thấy B hội tụ trong vùng hồng ngoại khi $n = 4$. Lấy tích phân theo dy của $A(q^2)$:

$$\delta_v = A(q^2) - A(0) = \frac{e^2}{(2\sqrt{\pi})^n} \int_0^1 dx \left\{ \Gamma \left(2 - \frac{1}{2}n \right) \frac{1}{2} (2-n) \right. \\ \left. \left[m^2 - q^2 x(1-x) \right]^{\frac{1}{2}n-2} - m^{n-4} \right. \\ \left. - \Gamma \left(3 - \frac{1}{2}n \right) m^2 \left[m^2 - q^2 x(1-x) \right]^{\frac{1}{2}n-2} - m^{n-6} \right] \left[\frac{4}{n-4} + \frac{2-12x}{n-3} - 2x \right] \\ \left. - \Gamma \left(3 - \frac{1}{2}n \right) \left[m^2 - q^2 x(1-x) \right]^{\frac{1}{2}n-2} q^2 \left[-\frac{2}{n-4} + \frac{2}{n-3} + x^2 - x \right] \right\} \quad (12)$$

Từ công thức (12) ta nhận thấy, phân kỳ hồng ngoại xuất hiện khi $n = 4$ và $n = 3$. Giá trị thặng dư của δ_v được tính như sau:

$$\text{Res } \delta_v = \frac{a}{\pi} \frac{q^2}{2} \int_0^1 dx \frac{1-2x(1-x)}{m^2 - q^2 x(1-x)} \quad (13)$$

2.2.2. Bổ chính photon thực cho biên độ tán xạ trong gần đúng bậc nhất

Phương pháp điều chỉnh thứ nguyên



Hình 2.3: Giản đồ Feynman cho tán xạ trong trường điện từ ngoài bức xạ photon thực “mềm”

Theo công thức tính tiết diện tán xạ vi phân ta có: $d\sigma^B = (2\pi)^4 S_f \bar{S}_f \delta(p' + k - p - q) \left| \langle p'k | M | p \rangle \right|^2 \quad (14)$

Theo quy tắc Feynman ta tính được các yếu tố ma trận:

$$S_f \left| \langle p'k | M^{(2)} | p \rangle \right|^2 = \left| \langle p'k | M^{(0)} | p \rangle \right|^2 \frac{e}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 k}{2k_0} \left[\frac{2p \cdot p'}{k \cdot p k \cdot p'} - \frac{m^2}{(k \cdot p)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p')^2} \right] \quad (15)$$

thay (15) vào (14) ta thu được:

$$\frac{d\sigma^B}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{dantinh}}^0 \cdot e^2 \int \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} \left[\frac{2p \cdot p'}{k \cdot p k \cdot p'} - \frac{m^2}{(k \cdot p)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p')^2} \right] = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{dantinh}}^0 \cdot \delta_B$$

(16) ở đây, $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{dantinh}}^0$ là giá trị nhỏ nhất của tiết diện

tán xạ đàn tính đã thu được từ giản đồ Feynman (1a) và được xác định bởi công thức (9). Trong đó thừa số δ_B :

$$\delta_B = e^2 2\pi \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \delta(k^2) \theta(k_0) \theta(\Delta E - k_0) \left[\frac{2p \cdot p'}{k \cdot p k \cdot p'} - \frac{m^2}{(k \cdot p)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p')^2} \right] \quad (17)$$

Để tính tích phân (17) ta cần chuyển tích phân theo k và k_0 thành tích phân theo $|k|$ và ω .

$$\int \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} \rightarrow \int \frac{d^n k}{2\omega(2\pi)^n} \rightarrow \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \int \frac{d^{n-4} k}{2\omega(2\pi)^{n-4}} \quad (18)$$

Trong biểu thức (17) thì k_0 chính là giá trị ω , viết lại biểu thức δ_B dạng:

$$\delta_B = e^2 \int \frac{d^{n-4} |k|}{2\omega(2\pi)^{n-4}} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^2} \times \left[2p \cdot p' \int_0^1 \frac{dx}{(k \cdot P_x)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p')^2} \right] \quad (19)$$

Tích phân (19) trong hệ tọa độ cực, ta tìm được thừa số liên quan của bức xạ hãm như sau:

$$\delta_B = \frac{a}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{\Delta E}{2\sqrt{\pi}} \right)^{n-4} \frac{1}{(n-4)\Gamma\left(\frac{1}{2}(n-4)\right)} \left[{}_2F_1\left(1, \frac{1}{2}n-2; \frac{1}{2}(n-1); -\frac{P^2}{m^2}\right) \right]$$

(20)

Phương pháp $\lambda_{\min}$

Trong điện động lực học lượng tử (QED) ta hay gặp phân kỳ hồng ngoại. Muốn các tích phân hội tụ ta phải cho photon một khối lượng $\lambda_{\min}$ nào đó, trong biểu thức dưới dấu tích phân ta sẽ thay hàm truyền photon $1/k^2$ bằng hàm truyền $1/k^2 + \lambda_{\min}^2$, trong đó $\lambda_{\min}^2 = m^2$ và trong kết quả cuối cùng ta cho $\lambda_{\min} \rightarrow 0$.

Từ (16) ta dẫn lại công thức tính tiết diện tán xạ. Tích phân này chứa phân kỳ hồng ngoại.

$$\delta_B = e^2 \int \frac{d^3k}{2k_0(2\pi)^3} \left[\frac{2p \cdot p'}{k \cdot p k \cdot p'} - \frac{m^2}{(k \cdot p)^2} - \frac{m^2}{(k \cdot p')^2} \right]. \quad (21)$$

Thay thế $p \rightarrow p_1$; $p' \rightarrow p_2$ và $\lambda_{\min} \rightarrow \lambda$. Chú ý $0 \leq |k| \leq \varepsilon$, ở đây ε là giới hạn để (21) là phân kỳ hồng ngoại. Khi đó ta được:

$$\delta_B = \frac{e^2}{4\pi^2} \left\{ 2(2y \operatorname{th} 2y - 1) \left[\ln \frac{2\varepsilon}{\lambda} - \frac{1}{2} \right] + 4y \operatorname{cth} 2y [1 - h(2y)] \right\} \quad (22)$$

Đặt $2y = \operatorname{th}^{-1} \beta$ và $\operatorname{cth} 2y = \frac{1}{\beta}$. Từ (22) ta có:

$$\delta_B = C_1 \left\{ \ln \frac{1}{\lambda} + \ln \varepsilon \right\} + C(\beta), \text{ biểu thức này phân kỳ } \lambda \rightarrow 0.$$

2.3. Tiết diện tán xạ

Giá trị thăng dư của (20) khi $n = 1$ ta nhận được:

$$\operatorname{Res} \delta_B = -\frac{a}{\pi} \int_0^1 dx \frac{q^2(1-2x+2x^2)}{m^2 - q^2 x(1-x)} \quad (23)$$

Từ (13) và (22) tiết diện tán xạ vi phân trong vùng hồng ngoại được cho bởi:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{IR} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^0 [2\delta_v + \delta_B] \equiv \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^0 \delta_{IR} \quad (24)$$

Ta thấy rằng khi $n = 4$ thì (23) có giá trị:

$$\delta_{IR} = 2 \frac{a}{\pi} \frac{q^2}{2} \int_0^1 dx \frac{1-2x(1-x)}{m^2 - q^2 x(1-x)} - \frac{a}{\pi} \int_0^1 dx \frac{q^2(1-2x(1-x))}{m^2 - q^2 x(1-x)} = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{IR} = 0$$

Kết quả (24) chứng tỏ rằng các phân kỳ hồng ngoại của các bộ chính cho bài toán tán xạ ở gần đúng bậc nhất của lý thuyết nhiễu loạn bị triệt tiêu lẫn nhau.

Tóm lại: Tiết diện tán xạ vi phân của electron trong trường điện từ ngoài ở gần đúng bậc nhất theo lý thuyết nhiễu loạn có thể biểu diễn dưới dạng:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{\text{vật lý}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^{\text{đơn giản}} + \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)^R = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_0 \quad (25)$$

3. Kết quả đạt được

Trên cơ sở bài toán tán xạ của electron trong trường điện từ ngoài ở bậc thấp nhất của lý thuyết nhiễu loạn, chúng tôi đã chỉ ra rằng:

1. Các phân kỳ hồng ngoại trong điện động lực học lượng tử có thể bị loại bỏ được nhờ sử dụng phương pháp điều chỉnh thứ nguyên – phương pháp của khử phân kỳ từ ngoại.

2. Tiết diện tán xạ vi phân vật lý bằng tiết diện tán xạ đàn tính, phân kỳ hồng ngoại bị triệt tiêu lẫn nhau, ở bậc thấp nhất của lý thuyết nhiễu loạn cho đóng góp không đáng kể.

Việc mở rộng phương pháp khử phân kỳ bằng điều chỉnh thứ nguyên có ý nghĩa quan trọng trong vật lý hiện đại vì khả năng khử cả hai loại phân kỳ bằng cùng một phương pháp.

Tài liệu tham khảo

- [1]. Nguyễn Xuân Hân, Cơ sở lý thuyết trường lượng tử, ĐHQG Hà Nội, 1998
- [2]. J. M. Jauch and F. Rohrlich, Theory of photons and electrons, Addison-Wesley Reading Mass., 1955.
- [3]. N. N. Bogoliubov and D. V. Shirkov, Introduction to the Theory of Quantized Fields, 3th Edition, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [4]. A. I. Akhiezer and V. B. Berestetskii, Quantum Electrodynamics, New York, 1965.