

Dạy học giải bài toán thực tiễn nhằm phát triển năng lực mô hình hóa toán học cho học sinh trung học phổ thông

Lê Hoàng Khâm*

* Trường THPT Tân Hiệp, Tiền Giang

Received: 22/11/2024; Accepted: 29/11/2024; Published: 10/12/2024

Abstract: According to the 2018 General Education Curriculum, mathematical modeling competency is one of the components of mathematical competency that needs to be formed and developed for students. Mathematical modeling competency helps students solve practical problems by using mathematical models to convert practical problems into mathematical problems.

Keywords: Mathematical modeling competency, General Education Curriculum 2018.

1. Mở đầu

Theo mục tiêu của Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán 2018: môn Toán góp phần hình thành và phát triển cho học sinh (HS) năng lực toán học, bao gồm các thành phần cốt lõi như năng lực tư duy và lập luận toán học; năng lực mô hình hóa toán học (MHHTH); năng lực giải quyết vấn đề toán học; năng lực giao tiếp toán học; năng lực sử dụng công cụ, phương tiện học toán (Bộ GD-ĐT, 2018). Do vậy, năng lực MHHTH là một năng lực cơ bản, cần hình thành và phát triển cho HS phổ thông.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Một số vấn đề lí luận

2.1.1. Quy trình mô hình hóa toán học

Theo Blum và Leiss (2007), quy trình MHHTH gồm các bước sau:

- Bước 1: Đọc hiểu nhiệm vụ đã cho và xây dựng mô hình cho tình huống đó;
- Bước 2: Đơn giản hóa và xác định các biến phù hợp nhằm xây dựng mô hình thực của tình huống;
- Bước 3: Từ cơ sở mô hình thực, chuyển sang mô hình toán;
- Bước 4: Giải bài toán bằng kiến thức toán học để tìm kết quả;
- Bước 5: Chuyển kết quả toán học thành trở lại giải quyết vấn đề của thực tiễn; -
- Bước 6: Xác định tính phù hợp của kết quả với mô hình thực;
- Bước 7: Trình bày cách giải quyết cho tình huống thực.

Quy trình MHHTH của Swetz và Hartzler (1991) gồm 4 giai đoạn như sau:

- Giai đoạn 1: Quan sát các tình huống thực tiễn, phân tích các tình huống và phát hiện các yếu tố quan trọng (như biến số, tham số) có tác động đến vấn đề đó;

- Giai đoạn 2: Lập giả thuyết về mối quan hệ giữa các yếu tố thông qua ngôn ngữ toán học, từ đó phác họa mô hình toán học tương ứng;

- Giai đoạn 3: Áp dụng các phương pháp và công cụ toán học phù hợp để mô hình hóa và phân tích mô hình;

- Giai đoạn 4: Thông báo kết quả, đối chiếu mô hình với thực tiễn và đưa ra kết luận.

2.1.2. Năng lực mô hình hóa toán học

Theo Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán của Bộ GD-ĐT (2018), năng lực MHHTH của HS THPT gồm có 03 thành tố với các biểu hiện tương ứng như sau:

| Thành phần năng lực | Biểu hiện |
|--|--|
| MH1. Xác định được mô hình toán học (gồm công thức, phương trình, bảng biểu, đồ thị,...) cho tình huống xuất hiện trong bài toán thực tiễn. | MH1.1. Thiết lập được mô hình toán học (gồm công thức, phương trình, sơ đồ, hình vẽ, bảng biểu, đồ thị,...) để mô tả tình huống đặt ra trong một số bài toán thực tiễn. |
| MH2. Giải quyết được những vấn đề toán học trong mô hình được thiết lập. | MH2.1. Giải quyết được những vấn đề toán học trong mô hình được thiết lập. |
| MH3. Thể hiện và đánh giá được lời giải trong ngữ cảnh thực tế và cải tiến được mô hình nếu cách giải quyết không phù hợp. | MH3.1. Lí giải được tính đúng đắn của lời giải (những kết luận thu được từ các tính toán là có ý nghĩa, phù hợp với thực tiễn hay không). MH3.2. Nhận biết được cách đơn giản hoá, cách điều chỉnh những yêu cầu thực tiễn (xấp xỉ, bổ sung thêm giả thiết, tổng quát hóa,...) để đưa đến những bài toán giải được. |

2.2. Dạy học giải bài toán thực tiễn nhằm phát triển năng lực mô hình hóa Toán học cho học sinh THPT được thể hiện thông qua một số ví dụ minh họa như sau

Ví dụ 1. Khi mắc song song hai điện trở R_1 và R_2 thì điện trở tương đương R của mạch điện bằng $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$. Một điện trở 10Ω được mắc song song

với một biến trở $x(\Omega)$. Biến trở chỉ thay đổi được từ 5Ω đến 30Ω . Khi đó điện trở tương đương

- a) bằng 5Ω khi biến trở là 30Ω .
- b) luôn giảm khi biến trở ngày càng lớn.
- c) không thể vượt quá 10Ω .

d) nhỏ nhất có thể là $\frac{10}{3}$.

Lời giải

a) Sai vì $R = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10x}{x + 10}, x > 0$.

$$x = 30 \Rightarrow y = \frac{10 \cdot 30}{30 + 10} = 7.5$$

b) Sai vì $y' = \frac{100}{(x + 10)^2} > 0$ do đó điện trở tương

đương luôn tăng.

c) Đúng vì $\lim_{x \rightarrow +\infty} y = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{10x}{x + 10} = 10$ nên điện trở

tương đương của mạch không bao giờ vượt quá 10Ω

d) Đúng vì hàm số đồng biến trên $(5; 30)$, Khi đó

điện trở tương đương nhỏ nhất là: $R = \frac{10}{3}$ khi $x = 5$

Phân tích:

+ Ví dụ này đánh giá năng lực MHI.1. Thiết lập được mô hình toán học (gồm công thức, phương trình, sơ đồ, hình vẽ, bảng biểu, đồ thị,...) để mô tả tình huống đặt ra trong một số bài toán thực tiễn.

+ Để giải được bài toán này học sinh cần vận dụng các kiến thức liên môn, thiết lập được một hàm số toán học.

Ví dụ 2. Số dân của một thị trấn sau t năm kể từ năm 1970 được ước tính bởi công thức $f(t) = \frac{26t + 10}{t + 5}$

($f(t)$ được tính bằng nghìn người). Các khẳng định sau đúng hay sai?

a) Số dân của thị trấn vào đầu năm 1980 là 18 nghìn người.

c) Đạo hàm của hàm số $f(t)$ biểu thị tốc độ tăng dân số của thị trấn (tính bằng nghìn người/năm) có công thức là: $f'(t) = \frac{120}{(t + 5)^2}$.

b) Số dân của thị trấn luôn giảm.

d) Số dân của thị trấn không vượt quá 26 nghìn người

Lời giải

a) Đúng vì năm 1980 = 10; $f(10) = 18$ nghìn người.

b) Đúng.

c) Sai vì $f'(t) > 0$, với mọi $t \geq 0$ nên dân số luôn tăng.

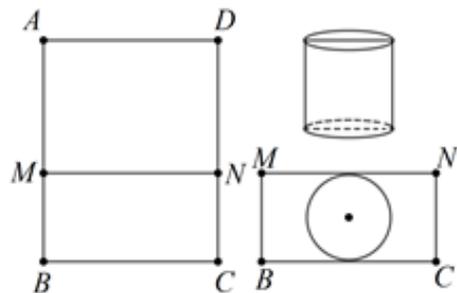
d) Đúng vì $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 26$ dân số luôn tăng nhưng không vượt quá 26 nghìn người

Phân tích:

+ Ví dụ này đánh giá năng lực MH2.1. Giải quyết được những vấn đề toán học trong mô hình được thiết lập.

+ Bài toán dân số thường được ước tính bởi công thức $S_n = S_0 \cdot e^{rt}$, tuy nhiên khi $r > 0$ ước tính theo công thức này thì dân số sẽ tăng mãi đến vô hạn, điều này không phù hợp với điều kiện về kinh tế, xã hội, diện tích... của một thị trấn.

Ví dụ 3. Sử dụng mảnh inox hình chữ nhật ABCD để làm một thùng đựng nước có đáy, không có nắp theo quy trình như sau: Chia hình chữ nhật ABCD thành hai hình chữ nhật ABNM và BCNM, trong đó phần hình chữ nhật ADNM được gò thành phần xung quanh hình trụ có chiều cao bằng AM; phần hình chữ nhật BCNM được cắt ra một hình tròn để làm đáy của hình trụ trên. Biết mảnh inox có diện tích bằng $1m^2$ thì có thể làm được cái thùng có thể tích hơn $2m^3$ hay không?



Lời giải

Đặt $BC = x$ (m).

Ta có: $AB \cdot BC = 1 \Rightarrow AB = \frac{1}{BC} = \frac{1}{x}$ (m).

Gọi R (m) là bán kính đáy hình trụ inox gò được, ta có chu vi hình tròn đáy bằng $BC = x$ (m).

Do đó $2\pi R = x \Leftrightarrow R = \frac{x}{2\pi}$ (m);

$BM = 2R = \frac{x}{\pi} \Rightarrow AM = AB - BM = \frac{1}{x} - \frac{x}{\pi}$ (m)

Thể tích khối trụ inox gò được là:

$$V = \pi R^2 h = \pi \cdot \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{\pi}\right) = \frac{1}{4\pi^2} x(\pi - x^2)$$

Từ đó ta có thể tích lớn nhất $V \approx 2,14(m^3)$ và chỉ khi $x \approx 1,02m$ (m).

Vậy có thể làm được cái thùng có thể tích hơn $2m^2$

Phân tích:

+ Ví dụ này đánh giá năng lực *MH3.1. Lí giải được tình huống dẫn đến lời giải (những kết luận thu được từ các tính toán là có ý nghĩa, phù hợp với thực tiễn hay không).*

Ví dụ 4. Giá đóng cửa của một cổ phiếu là giá của cổ phiếu đó cuối một phiên giao dịch. Bảng sau thống kê giá đóng cửa (đơn vị: nghìn đồng) của hai mã cổ phiếu A và B trong 50 ngày giao dịch liên tiếp.

| Giá đóng cửa | [120;122) | [122;124) | [124;126) | [126;128) | [128;130) |
|--------------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| Cổ phiếu A | 8 | 9 | | 10 | 11 |
| Cổ phiếu B | 16 | 4 | 3 | | 21 |

Hãy tính tổng độ lệch chuẩn của mẫu số liệu cổ phiếu A và cổ phiếu B. Từ đó, hãy so sánh độ rủi ro của cổ phiếu A và cổ phiếu B.

Lời giải

Ta có bảng thống kê giá đóng cửa theo giá trị đại diện:

| Giá đóng cửa | 121 | 123 | 125 | 127 | 129 |
|--------------|-----|-----|-----|-----|-----|
| Cổ phiếu A | 8 | 9 | 12 | 10 | 11 |
| Cổ phiếu B | 16 | 4 | 3 | 6 | 21 |

Xét mẫu số liệu của cổ phiếu A:

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_1 = \frac{8.121 + 9.123 + 12.125 + 10.127 + 11.129}{50} = 125,28$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_1^2 = \frac{1}{50} (8.121^2 + 9.123^2 + 12.125^2 + 10.127^2 + 11.129^2) - (125,28)^2 = 7,5216$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_1 = \sqrt{S_1^2} = \sqrt{7,5216} \approx 2,7425$$

Xét mẫu số liệu của cổ phiếu B:

Số trung bình của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$\bar{x}_2 = 125,28$$

Phương sai của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_2^2 = 12,4096$$

Độ lệch chuẩn của mẫu số liệu ghép nhóm là

$$S_2 = \sqrt{S_2^2} = \sqrt{12,4096} \approx 3,5227$$

Tổng độ lệch chuẩn của mẫu số liệu cổ phiếu A và cổ phiếu B là: $S_1 + S_2 = 6,3$.

Vậy nếu đánh giá độ rủi ro theo phương sai và độ lệch chuẩn thì cổ phiếu A có độ rủi ro thấp hơn cổ phiếu B.

Phân tích:

+ Ví dụ này đánh giá năng lực *MH3.2. Nhận biết được cách đơn giản hoá, cách điều chỉnh những yêu cầu thực tiễn (xấp xỉ, bổ sung thêm giả thiết, tổng quát hóa,...) để đưa đến những bài toán giải được.*

3. Kết luận

Trong quá trình dạy học môn Toán, thực hiện mô hình hóa giúp HS hiểu được ý nghĩa, vai trò của kiến thức toán học trong cuộc sống; phát triển khả năng phân tích, suy luận, lập luận và giải quyết vấn đề toán học trong những tình huống khác nhau. Từ đó, HS hứng thú hơn trong học tập, đặc biệt là phát triển được năng lực MHHTH. Thông qua hoạt động MHHTH, HS có cơ hội phát triển các thao tác tư duy, kĩ năng giải quyết vấn đề, đặc biệt là thấy được mối liên hệ giữa toán học với thực tiễn, yêu thích học tập môn Toán hơn. Như vậy, việc dạy học giải bài toán thực tiễn sẽ giúp HS phát triển năng lực MHHTH, đáp ứng được mục tiêu dạy học phát triển năng lực toán học cho HS theo yêu cầu đổi mới giáo dục hiện nay.

Tài liệu tham khảo

- Blum, W., & Leiss, D. (2007). *How do students and teachers deal with mathematical modeling problems?* In book: *Mathematical Modelling* (pp. 222-231). Education engineering and economics Chichester: Horwood Publishing.
- Swetz, F. J., & Hartzler, J. S. (1991). *Mathematical modeling in the secondary school curriculum: A resource guide of classroom exercises*. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Bộ Giáo dục và Đào tạo (2018). *Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán* (ban hành kèm theo Thông tư số 32/2018/TTBGDDT ngày 26/12/2018 của Bộ trưởng Bộ GD-ĐT).