

ỨNG DỤNG PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN CÓ CHẠM VÀO MÔ HÌNH BÀI TOÁN DÂN SỐ

APPLYING DELAY DIFFERENTIAL EQUATION IN POPULATION PROBLEM MODEL

LÊ NGUYỄN HẠNH VY(*) và TRẦN LƯU CƯỜNG(**)

TÓM TẮT: Bài viết tập trung về phương trình vi phân có chậm thông qua việc nghiên cứu tính ổn định, ổn định tiệm cận, ổn định tiệm cận toàn cục dựa trên định lý hàm Lyapunov bằng phương pháp tính để ứng dụng vào mô hình dân số. Trong bài viết có sử dụng phần mềm Maple để tính các thông số cần thiết cho mô hình, sau đó đưa thông số cần tính vào phần mềm mô phỏng Matlab thông qua việc lập code. Kết quả thu được là quỹ đạo nghiệm và biểu đồ Phase của mô hình. Nó cho ta thấy mức độ tăng trưởng dân số phụ thuộc vào thời gian có chậm. Và được đưa vào thực tiễn, tạo ra nhiều bước phát triển mới cho các ngành khoa học khác.

Từ khóa: hàm Lyapunov; phương trình vi phân có chậm; mô hình Lotka-Volterra; bài toán phát triển dân số.

ABSTRACT: The paper focuses on the application of delay differential equation by digging deeply into stabilization, asymptotic stability, and globally asymptotically stable based on Lyapunov's theorem by calculating method in order to apply in population model. In this paper, we used Maple software to calculate the necessary parameters for the model, and then put the parameters to be calculated in Matlab simulation software through coding. The results are the root locus and the Phase diagram of the model. It indicates that the rate of population growth depends on delay time. And put into practice, creating many new developments for other sciences.

Key words: Lyapunov function; delay differential equation; Lotka-Volterra model; population growth problem.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Nhiều hiện tượng thực tế cuộc sống trong vật lý, kỹ thuật, sinh học, y học... có thể được mô hình hóa bởi giá trị ban đầu của phương

trình vi phân thường:
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = g(t, x(t)), t \geq t_0 \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

Tuy nhiên, để mô hình phù hợp với thực tế hơn, người ta đã sử dụng mô hình hóa bởi phương trình vi phân có chậm như sau:

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), t \geq t_0$$

Lý thuyết phương trình vi phân có chậm được phát triển rộng rãi bởi Bellman và Cooke [4], Hale [5], Driver [6], El'sgol'ts và Norkin [7] và hiện nay có một cuốn sách mới nói về vấn đề này của Hale và Verduyn Lunel [8], Kolmanowskii và Myshkis [9]... Việc nghiên cứu này yêu cầu đòi hỏi không chỉ về mặt lý thuyết mà cả tính ứng dụng rộng rãi, thu hút được sự quan tâm của nhiều nhà toán học và đã đưa ra nhiều kết quả quan trọng. Nó đã góp phần xây dựng lý thuyết chung cho ngành toán học và các ngành khoa học khác. Nó có mặt và góp phần nâng cao tính hấp dẫn, lý thú, tính

(*) ThS. Trường Đại học Văn Lang, lenguyenhanhvy1991@gmail.com

(**) TS. Trường Đại học Văn Lang, cuong.tl@vlu.edu.vn, Mã số: TCKH24-06-2020

đầy đủ sâu sắc, tính hiệu quả, giá trị của nhiều ngành như tối ưu, điều khiển tối ưu, giải tích số, tính toán khoa học... Vì vậy, lý thuyết này đã trở thành một trong các lĩnh vực toán học hiện đại nhất, có khả năng ứng dụng trong nhiều lĩnh vực khác như: Vật lý học, Cơ học, Kinh tế học, Sinh thái học, Hóa học...

2. NỘI DUNG

Giới thiệu hàm Lyapunov trong phương trình vi phân có chậm. Ứng dụng vào mô hình phát triển ổn định dân số.

Bảng ký hiệu:

Ký hiệu	Ý nghĩa
PTVP	Phương trình vi phân
PTVPT	Phương trình vi phân thường
PTVPCC	Phương trình vi phân có chậm
$\mathbb{R}_+$	Tập các số thực không âm.
$\mathbb{R}^n$	Không gian Euclid n chiều với chuẩn $\ \cdot\ $ và tích vô hướng $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
$C([a, b], \mathbb{R}^n)$	Tập các hàm liên tục trên $[a, b]$ và nhận giá trị trong $\mathbb{R}^n$.
$\dot{V}$	Đạo hàm trên, bên phải theo t của hàm $V(t, \phi)$ dọc theo nghiệm của PTVPCC
$\limsup_{t \rightarrow +\infty} x(t)$	Giới hạn trên của $x(t)$.
$\liminf_{t \rightarrow +\infty} x(t)$	Giới hạn dưới của $x(t)$.
$Re\lambda$	Phần thực của λ

2.1. Giới thiệu phương trình vi phân có chậm rời rạc

Dạng tổng quát của phương trình vi phân có chậm rời rạc:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t - \tau_1), \dots, x(t - \tau_n)), t \geq t_0 \quad (1)$$

$$\text{Với } \tau_i = \tau_i(t - x(t)) \geq 0, \forall t \geq t_0, i = 1, \dots, n$$

được gọi là các chậm rời rạc $\dot{x}(t) = f(t, x_t) \quad (2)$

Trong đó, $x_t = x(t + \theta), \theta \in [-r, 0]$, là một hàm thuộc không gian các hàm liên tục từ $[-r, 0]$ vào $\mathbb{R}^n$. Ký hiệu: $C = C_0([-r, 0], \mathbb{R}^n)$

$f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ là hàm cho trước, với $\Omega \subset \mathbb{R} \times C$.

Bài toán giá trị ban đầu:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(t, x_t), t \geq t_0 \\ x_0 = x(t_0 + \theta) = \phi(\theta) \end{cases}$$

Trong đó $\phi(\theta) \in C$ biểu diễn trạng thái ban đầu hoặc trạng thái dữ liệu.

2.2. Tính ổn định Lyapunov trong phương trình vi phân có chậm

2.2.1. Định nghĩa cơ bản về tính ổn định Lyapunov

Định nghĩa 1: Nghiệm tầm thường của phương trình (2) được gọi là ổn định Lyapunov khi $t \rightarrow +\infty$ nếu $\forall \varepsilon > 0, t_0 \geq 0, \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0, a$ sao cho $\|\phi\| < \delta \Rightarrow \|x_t(t, \phi)\| < \varepsilon, t \leq t_0$.

Định nghĩa 2: Nghiệm tầm thường của phương trình (2) được gọi là ổn định đều khi $t \rightarrow +\infty$ nếu số δ trong định nghĩa không phụ thuộc vào t_0 .

Định nghĩa 3: Nghiệm tầm thường của phương trình (2) được gọi là ổn định tiệm cận đều theo Lyapunov khi $t \rightarrow +\infty$ nếu

i) Nghiệm tầm thường ổn định đều

ii) $\exists \Delta > 0$ (không phụ thuộc vào t_0)

$$\forall \phi \in C, \|\phi\| < \Delta \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t_0, \phi)\| = 0$$

Định nghĩa 4: Xét phương trình (2), hàm khả vi liên tục $V: \mathbb{R}^+ \times C \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là hàm Lyapunov nếu tồn tại các hằng cố a, b, c > 0 thỏa mãn:

$$i) a\|x(t)\|^2 \leq V(t, x_t) \leq b\|x_t\|^2,$$

ii) $\dot{V}(t, x_t) \leq -c\|x(t)\|^2$ với mọi nghiệm $x(t)$ của (2)

Định nghĩa 5: Nếu ánh xạ $V: \mathbb{R}^+ \times C \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục từ $x(t_0, \phi)$ là nghiệm của phương trình (2) thỏa điều kiện ban đầu (t_0, ϕ) , ta có:

$$\dot{V} = \dot{V}(t, \phi) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{1}{h} [V(t + h, x_{t+h}(t_0, \phi)) - V(t_0, \phi)]$$

Hàm $\dot{V}(t_0, \phi)$ gọi là đạo hàm trên, bên phải theo t của hàm $V(t_0, \phi)$ dọc theo nghiệm của hệ (2).

2.2.2. Định lý cơ bản về tính ổn định Lyapunov [1, tr.27]

Cho hàm $u(s), v(s), w(s) : R^+ \rightarrow R^+$ liên tục và không giảm, $u(s) > 0, v(s) > 0, \forall s > 0$ và $u(0) = v(0) = w(0) = 0$. Những phát biểu sau là đúng:

i) Nếu hàm $V : R \times C \rightarrow R$ thỏa mãn $u(\|\phi(0)\|) \leq v(t, \phi) \leq v(\|\phi\|), v(t, \phi) \leq w(\|\phi(0)\|)$ thì nghiệm $x=0$ là ổn định đều.

ii) Nếu thêm vào (i), $\lim_{s \rightarrow +\infty} u(s) = +\infty$ thì nghiệm của (2) là bị chặn đều (tức là với bất kỳ $\alpha > 0$, tồn tại $\beta = \beta(\alpha) > 0$ sao cho, với $\sigma \in R, \phi \in C, \|\phi\| \leq \alpha$, ta có $|x(\sigma, \phi)(t)| \leq \beta, \forall t \geq \sigma$.

iii) Nếu thêm vào (i), $w(s) > 0$ với $s > 0$ thì nghiệm $x=0$ là ổn định tiệm cận đều.

2.3. Ứng dụng phương trình vi phân có chậm giải các bài toán mô hình phát triển dân số

2.3.1. Mô hình Lotka – Volterra có chậm đơn

Mô hình Lotka – Volterra có chậm đơn:

Xét hệ động vật ăn thịt con mồi Lotka – Volterra có chậm có dạng [3]

$$\begin{aligned} \dot{x} &= x(t)(r - ax(t) - by(t)), \\ \dot{y} &= y(t)(-d + cx(t - \tau)), \end{aligned}$$

Trong đó: $x(t), y(t)$ là mật độ dân số của con mồi và kẻ săn mồi tại thời điểm t tương ứng.

r, a, b, c, d, τ là các hằng số dương

$$\text{Điều kiện ban đầu: } \begin{cases} x_0(\theta) = \phi(\theta) \geq 0 \\ \theta \in [-\tau, 0] \\ x(0) > 0 \\ y(0) > 0 \end{cases}$$

Trong đó

$$\phi \in C([-\tau, 0], R^+), R^+ = \{x : x \geq 0\} \text{ và}$$

$$\|\phi\| = \max\{|\phi(\theta)| : \theta \in [-\tau, 0]\}$$

Bổ đề:

Để xây dựng Lyapunov, ta sẽ sử dụng bổ đề sau:

Cho $\omega_1(\cdot)$ và $\omega_2(\cdot)$ là những hàm vô hướng liên tục không âm sao cho

$\omega_i(0) = 0, i = 1, 2, \omega_2(r) > 0$ với $r > 0$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \omega_1(r) = +\infty$ và $V : C \rightarrow R$ là hàm vi phân vô hướng liên tục. Với tập S của nghiệm $\dot{x}(t) = F(x_t)$ thỏa mãn:

$$V(\phi) \geq \omega_1(|\phi(0)|), \dot{V}(\phi) \leq -\omega_2(|\phi(0)|)$$

Khi đó $x = 0$ là ổn định tiệm cận đối với tập S , nghĩa là những nghiệm bị chặn trong S hội tụ đến $x = 0$ khi $t \rightarrow +\infty$

Hàm Lyapunov V :

Hàm Lyapunov V được xác định trong tập hợp

$$\{(\phi_1, \phi_2) : \phi_1 \in C([-\tau, 0], R), \phi_2(\theta) \equiv \phi(0), \theta \in [-\tau, 0]\} :$$

$$\begin{aligned} V \equiv V(\phi_1, \phi_2) &= \frac{1}{2} V_0(\phi_1(0), \phi_2(0))^2 \\ &+ \omega V_1(\phi_1(0), \phi_2(0)) + V_2(\phi_1, \phi_2) \end{aligned}$$

Trong đó, hàm vô hướng V_0, V_1, V_2 được xác định như sau:

$$V_0(t) \equiv V_0(u_1(t), u_2(t)) \equiv \ln(1 + u_1(t)) + \alpha \ln(1 + u_2(t))$$

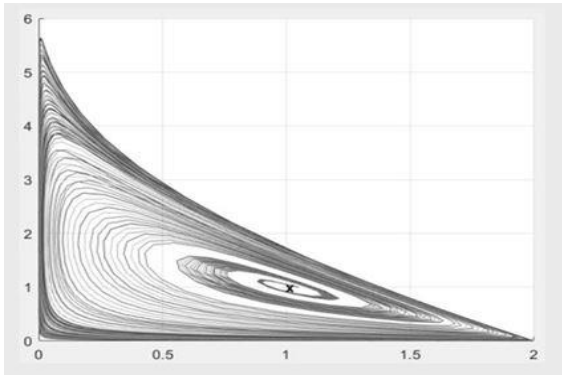
$$V_1 \equiv V_1(u_1(t), u_2(t)) \equiv u_1 - z_1 + \beta(u_2 - z_2),$$

$$\begin{aligned} V_2 \equiv V_2(\phi_1, \phi_2) &\equiv P \int_{t-\tau}^t ds \int_s^t [x^*(1 + \phi_1(v))\phi_1(v)]^2 dv \\ &+ Q \int_{t-\tau}^t ds \int_s^t [x^*(1 + \phi_1(v))\phi_2(v)]^2 dv. \end{aligned}$$

Mô hình:



Hình 1. Quỹ đạo nghiệm của mô hình Lotka – Volterra có chậm đơn



Hình 2. Biểu đồ phase mô hình Lotka – Volterra có chậm đơn

2.3.2. Mô hình Lotka – Volterra có chậm kép

Mô hình Lotka – Volterra có chậm kép [2]

Ta xét hệ động vật ăn thịt con mồi Lotka – Volterra với có chậm $\tau_1, \tau_2 \in R_+ := [0, +\infty)$ rời rạc riêng biệt

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = x(t)[r_1 - ax(t) - by(t - \tau_1)] \\ \dot{y}(t) = y(t)[-r_2 + cx(t - \tau_2) - dy(t)] \end{cases}$$

Trong đó: r_1, r_2, b, c là hằng số dương và a, d là hằng số âm, $\dot{x}(t), \dot{y}(t)$ là mật độ dân số của con mồi và kẻ săn mồi tương ứng

Điều kiện ban đầu:

$$\begin{cases} (x(\theta), y(\theta)) = (\phi_1(\theta), \phi_2(\theta)) \geq 0 \\ \theta \in [-\max(\tau_1, \tau_2), 0] \\ \phi_1(0) > 0, \phi_2(0) > 0 \end{cases}$$

Trong đó

$$\phi = (\phi_1, \phi_2) \in C([- \max(\tau_1, \tau_2), 0], R_+^2)$$

Bổ đề: [2]

Để xây dựng hàm Lyapunov, ta sẽ sử dụng bổ đề sau:

Cho $\varpi_1(\cdot)$ và $\varpi_2(\cdot)$ là những hàm vô hướng liên tục không âm sao cho $\varpi_i(0) = 0$, $i = 1, 2$; $\lim_{r \rightarrow +\infty} \varpi_1(r) = +\infty$, $\varpi_2(r) > 0$ với $r > 0$. Cho $V: C \rightarrow R$ là hàm vi phân vô hướng liên tục và S là tập con rỗng của C thỏa mãn: $V(\phi) \geq \varpi_1(|\phi(0)|)$, $\dot{V}(\phi) \leq -\varpi_1(|\phi(0)|)$.

Khi đó $x = 0$ là ổn định tiệm cận đối với tập S , nghĩa là những nghiệm trong S hội tụ đến $x = 0$ khi $t \rightarrow \infty$.

Hàm Lyapunov V :

Hàm Lyapunov V được xác định trong:

$$\begin{aligned} (\phi_1, \phi_2) &\in C(-\tau, 0), R^2, \phi_i(0) = 0, \\ \theta &\in [\tau, -\max(\tau_1, \tau_2)], i = 1, 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V \equiv V(\phi_1, \phi_2) &= \frac{1}{2} V_0^2(\phi_1(0), \phi_2(0)) \\ &+ \omega V_1(\phi_1(0), \phi_2(0)) + V_2(\phi_1, \phi_2) \end{aligned}$$

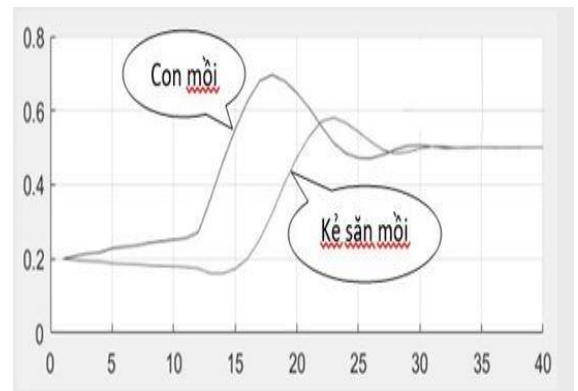
Trong đó các hàm vô hướng V_0, V_1, V_2 được xác định như sau:

$$V_0(t) = \ln(1 + u(t) + \alpha \ln(1 + u_2(t))),$$

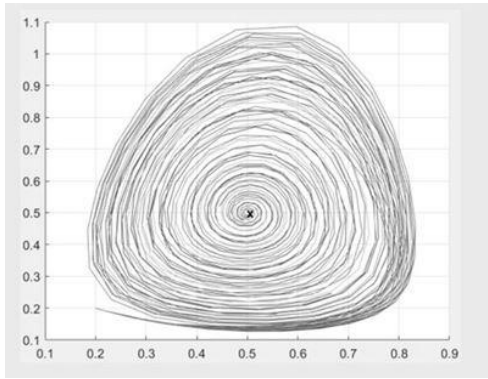
$$V_1(t) = u_1 - z_1 + \beta(u_2 - z_2),$$

$$\begin{aligned} V_2(t) &= Cu \int_{t-\tau_1}^t ds \int_s^t [1 + u_2(\gamma)]^2 u_1^2(\gamma - \tau_2) d\gamma \\ &+ Av \int_{t-\tau_2}^t [1 + u_1(s)]^2 u_1^2(s) ds \\ &+ Bv \int_{t-\tau_2}^t ds \int_s^t [1 + u_1(\gamma)]^2 u_2^2(\gamma - \tau_1) d\gamma \\ &+ Cu\tau_1 \int_{t-\tau_1}^t (u_1^2 + \frac{1}{2}u_4^2) ds \\ &+ (Du - \frac{1}{2}BD\alpha) \int_{t-\tau_1}^t [1 + u_2(s)]^2 u_2^2(s) ds \\ &+ Bv\tau_2 \int_{t-\tau_2}^t (u_2^2 + \frac{1}{2}u_4^2) ds. \end{aligned}$$

Mô hình:



Hình 3. Quỹ đạo nghiệm của mô hình Lotka – Volterra có hai sự chậm trễ



Hình 4. Biểu đồ Phase của mô hình Lotka - Volterra có hai sự chậm trễ

3. KẾT LUẬN

Bài viết đã giải quyết được vấn đề được ra về tính ổn định hàm Lyapunov, mô phỏng được quỹ đạo nghiệm bài toán Lotka-Volterra trong mặt phẳng Phase, sử dụng phần mềm Maple và Malab. Ngoài ra, bằng công cụ này ta sẽ có hướng nghiên cứu tiếp là dùng công cụ giải tích hàm để tìm điều kiện tương minh thay thế phương pháp hàm Lyapunov cho tính ổn định của hệ phương trình vi phân có chậm, như: độ đo ma trận, ma trận Metzler.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Y. Kuang (1992), *Delay Differential Equations with Applications* in Population Dynamics.
- [2] Y. Tang, E. Beretta and F. Solimano (2001), *Stability analysis of a volterra predator - prey system with two delays*, Volume 9, number 1.
- [3] Y. Kuang, E. Beretta (1995), *Convergence Results in a Well-Known Delayed Predator-Prey System*.
- [4] R. Bellman, K. L. Cooke (1963), *Differential – Difference Equation*, Academic Press, New York-London.
- [5] J. K. Hale (1977), *Theory of Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York.
- [6] R. D. Driver (1963), *Existence theory for a delay-differential system*, \textit{Contributions to Differential Equations}.
- [7] L. E. El'sgol'ts và S. B. Norkin (1973), *Introduction to the Theory and Application of Differential Equations with Deviating Arguments*, Academic Press, New York.
- [8] J. K. Hale và S. M. Verduyn Lunel (1977), *Introduction to Functional Differential Equations*, \textit{Applied Mathematical Sciences 99}, Springer-Verlag, New York.
- [9] V. Kolmanovskii và A. Myshkis (1992), *Applied Theory of Functional Differential Equations*, Kluwer, Dordrecht.

Ngày nhận bài: 23-6-2020. Ngày biên tập xong: 02-11-2020. Duyệt đăng: 27-11-2020