TẠP CHÍ KHOA HỌC
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM TP HỒ CHÍ MINH

HO CHI MINH CITY UNIVERSITY OF EDUCATION
JOURNAL OF SCIENCE

Tập 18, Số 3 (2021): 521-537

Vol. 18, No. 3 (2021): 521-537

ISSN: 1859-3100

Website: *http://journal.hcmue.edu.vn*

Bài báo nghiên cứu

MỘT ĐÁNH GIÁ GRADIENT TRONG KHÔNG GIAN LORENTZ CHO PHƯƠNG TRÌNH *P*-LAPLACE DỮ LIỆU ĐỘ ĐO VỚI *P* GẦN 1

Lê Hồng Phúc

Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Tác giả liên hệ: Lê Hồng Phúc – Email: phuc1321996@gmail.com

Ngày nhận bài: 20-7-2020; ngày nhận bài sửa: 11-01-2021, ngày chấp nhận đăng: 22-3-2021

TÓM TẮT

Phương trình p-Laplace là một trong các phương trình được nhiều nhà toán học nghiên cứu. Đây là phương trình có nhiều ứng dụng trong vật lí và các ngành khoa học khác. Trong bài báo này, chúng tôi chứng minh một kết quả đánh giá gradient trong không gian Lorentz cho nghiệm renormalized của phương trình p-Laplace dữ liệu độ đo trên miền Reifenberg với giá trị p gần 1. Để chứng minh kết quả chính, chúng tôi sử dụng kĩ thuật good-λ được nghiên cứu trong nhiều bài báo gần đây. Cụ thể, chúng tôi kế thừa các kết quả về bất đẳng thức Hölder ngược và đánh giá so sánh giữa nghiệm của bài toán ban đầu và nghiệm của bài toán thuần nhất trong bài báo (Tran, & Nguyen, 2019c) để chứng minh bất đẳng thức gọi là good-λ. Đặc biệt, chúng tôi xét giả thiết bài toán trên miền Reifenberg để thu được đánh giá tốt hơn trong bài báo (Tran, & Nguyen, 2019c).

Từ khóa: không gian Lorentz; dữ liệu độ đo; phương trình *p*-Laplace; miền Reifenberg

1. Giới thiệu

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu đánh giá gradient trong không gian Lorentz cho nghiệm renormalized của phương trình *p*-Laplace dữ liệu độ đo có dạng như sau

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \mu, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó, Ω là một tập mở bị chặn của $\mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$), hàm dữ liệu μ là một độ đo Radon hữu hạn trong Ω; và Δ_p là kí hiệu của toán tử *p*-Laplace $\Delta_p u = \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$, với tham số $p > 1$. Cụ thể hơn, chúng tôi khảo sát dạng tổng quát hơn của phương trình (1), như sau

$$\begin{cases} -\operatorname{div}\left(\mathsf{A}\left(x, \nabla u\right)\right) = \mu, & x \in \Omega, \\ u = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.2}$$

trong đó, A là toán tử tựa tuyến tính Caratheodory thỏa hai điều kiện sau

Cite this article as: Le Hong Phuc (2021). A lorentz gradient estimate for a class of measure data *p*-Laplace equation with *p* closed to 1. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science, 18*(3), 521-537.

$$\mathsf{A}(x,y) \le c_1 |y|^{p-1},$$

$$\langle \mathsf{A}(x,y) - \mathsf{A}(x,z), y-z \rangle \ge c_2 \left(|y|^2 + |z|^2\right)^{\frac{p-2}{2}} |y-z|^2,$$

với c_1, c_2 là hai hằng số, x, y, z thuộc R^n. Sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm renormalized của phương trình (1.2) được chứng minh trong nhiều bài báo như (Boccardo et al., 1996), (Maso et al., 1999) và (Betta et al., 2003).

Liên quan đến bài toán đánh giá gradient của phương trình (1.2), đã có khá nhiều kết quả được công bố gần đây, với những giả thiết khác nhau của toán tử A, điều kiện biên cho miền Ω và giá trị của tham số *p*. Trong trường hợp $p > 2 - \frac{1}{n}$, nghiên cứu về kết quả chính quy cho phương trình này được khảo sát trong các bài báo của Mingione và Byun như (Mingione, 2007, 2010), (Byun, & Wang, 2004, 2008) và chuỗi bài báo sau đó. Trong bài báo (Nguyen, & Nguyen, 2019), các tác giả mở rộng kết quả chính quy cho trường hợp $\frac{3n-2}{2n-1} < p \le 2 - \frac{1}{n}$ bằng kĩ thuật good-λ, với giả thiết Ω là miền có biên không trơn, thỏa điều kiện Reifenberg. Cũng trong trường hợp này, trong các bài báo (Tran, 2019) và (Tran, & Nguyen, 2020), tác giả đã khảo sát bài toán với giả thiết yếu hơn giả thiết miền Reifenberg, khi Ω thỏa điều kiện *p*-capacity. Sau đó trong bài báo (Tran, & Nguyen, 2019c), các tác giả đã mở rộng kết quả trong trường hợp $1 < p \le \frac{3n-2}{2n-1}$ khi Ω thỏa điều kiện *p*-capacity. Trong bài báo này, chúng tôi tiếp tục khảo sát bài toán khi $1 < p \le \frac{3n-2}{2n-1}$ với giả thiết Ω là miền Reifenberg. Một số ứng dụng cho kết quả đánh giá gradient được nghiên cứu trong các bài báo (Nguyen, C.-P, 2014), (Tran, & Nguyen, 2019a, 2019b).

Kết quả chính của bài báo là chứng minh một đánh giá gradient cho nghiệm renormalized *u* của (1.1) trong trường hợp $p \in \left(1, \frac{3n-2}{2n-1}\right]$ và Ω là miền Reifenberg. Cụ thể, chúng tôi chứng minh đánh giá

$$\| \nabla u \|_{L^{s,t}(\Omega)} \le C \left\| [\mathbf{M}_m(|\mu|)]^{\frac{1}{m(p-1)}} \right\|_{L^{s,t}(\Omega)}, \tag{1.3}$$

với $s \in (0,\infty)$ và $t \in (0,\infty]$. Để thu được kết quả này, chúng tôi giả thiết thêm rằng $\mu \in L^m(\Omega)$ với $m \in \left(m^*, m^{**}\right)$, trong đó

$$m^* = \frac{n}{2n(p-1)+2-p} \text{ và } m^{**} = \frac{np}{n(p-1)+p},$$

và không gian Lorentz $L^{s,t}(\Omega)$ được định nghĩa trong phần tiếp theo của bài báo. Với giả thiết miền Reifenberg, chúng tôi thu được đánh giá tốt hơn khi xét bài toán với giả thiết miền *p*-capacity. Cụ thể, với miền *p*-capacity ta chỉ chứng minh được đánh giá Lorentz trên $L^{s,t}$ với $0 < s < \Theta$ (với $\Theta > p$), trong khi với giả thiết miền Reifenberg, đánh giá trên sẽ đúng với mọi $s \in (0,\infty)$.

Trong chứng minh định lí chính, chúng tôi kế thừa một số kết quả trong những bài báo gần đây với một vài khái niệm như nghiệm renormalized, độ đo Radon hữu hạn và nửa chuẩn BMO của toán tử A (kí hiệu là $[A]_{R_0}$). Chúng tôi không trình bày lại định nghĩa để tránh sự phức tạp không cần thiết cho bài báo. Các khái niệm này có thể tham khảo trong nhiều tài liệu như (Nguyen, Q.-H., & Nguyen, C.-P., 2019), (Maso et al., 1999) và (Tran, & Nguyen, 2019c). Chúng tôi chỉ giới thiệu lại các định nghĩa quan trọng, với mục tiêu mang lại sự thuận lợi cho người đọc.

2. Một số định nghĩa

Đầu tiên, chúng tôi nhắc lại định nghĩa, một số tính chất đã biết của không gian Lorentz và hàm cực đại Hardy-Littlewood.

Định nghĩa 2.1. (Tran, 2019)

Cho hai tham số $0 < s < \infty$ và $0 < t \le \infty$. Không gian Lortentz $L^{s,t}(\Omega)$ được định nghĩa là tập tất cả các hàm f đo được Lebesgue trên Ω sao cho $\|f\|_{L^{s,t}(\Omega)} < \infty$, trong đó

$$\|f\|_{L^{s,t}(\Omega)} = \left[s\int_0^\infty \lambda^t \left|\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}\right|^{\frac{t}{s}} \frac{d\lambda}{\lambda} \right]^{\frac{s}{t}}, \text{ với } t < \infty, \tag{2.1}$$

$$\|f\|_{L^{s,\infty}(\Omega)} := \sup_{\lambda > 0} \lambda \left|\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}\right|^{\frac{1}{s}}, \text{ với } t = \infty. \tag{2.2}$$

Không gian $L^{s,\infty}(\Omega)$ còn gọi là không gian Marcinkiewicz. Ở đây, kí hiệu $|W|$ là độ đo Lebesgue của một tập đo được $W \subset \mathbf{R}^n$.

Định nghĩa 2.2. (Tran, 2019)

Cho $0 \le \alpha \le n$, hàm cực đại $\mathbf{M}_\alpha$ của một hàm $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty,\infty]$ khả tích địa phương được định nghĩa như sau

$$\mathbf{M}_\alpha f(x) = \sup_{\rho > 0} \rho^\alpha \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} |f(y)| dy. \tag{2.3}$$

Trong trường hợp $\alpha = 0,$ ta nhận được hàm cực đại Hardy-Littlewood, $\mathbf{M}f = \mathbf{M}_0 f$, được định nghĩa với mỗi hàm f khả tích địa phương trong $\mathbb{R}^n$ sau đây

$$\mathbf{M}f(x) = \sup_{\rho>0} \frac{1}{|B_\rho(x)|} \int_{B_\rho(x)} |f(y)| dy. \tag{2.4}$$

Bổ đề 2.3. (Maso et al., 1999)

Toán tử $\mathbf{M}$ là toán tử bị chặn từ $L^s(\mathbb{R}^n)$ vào $L^{s,\infty}(\mathbb{R}^n)$, với $s \geq 1,$ tức là tồn tại hằng số $C > 0$ sao cho:

$$\left| x \in \mathbb{R}^n : \mathbf{M}(f)(x) > \lambda \right| \leq \frac{C}{\lambda^s} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^s dx, \quad \forall \lambda > 0. \tag{2.5}$$

Bổ đề 2.4. (Maso et al., 1999)

Toán tử $\mathbf{M}$ *bị chặn trong không gian Lorentz* $L^{q,s}(\mathbb{R}^n)$ *với* $q > 1,$ *tức là tồn tại hằng số* $C > 0$ *sao cho:*

$$\|\mathbf{M}f\|_{L^{q,s}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^{q,s}(\mathbb{R}^n)}. \tag{2.6}$$

3. Các đánh giá địa phương

Trong phần này, chúng tôi nhắc lại một số đánh giá địa phương đã biết về mối liên hệ giữa nghiệm renormalized của phương trình (1.2) và nghiệm của phương trình thuần nhất (3.1). Giả sử $\mu \in \mathcal{M}_b(\Omega)$ và $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ là nghiệm renormalized của phương trình của (1.2). Với $x_0 \in \Omega$ cố định, $0 < 2R \leq r_0$ và quả cầu $B_{2R} = B_{2R}(x_0) \subset \Omega$, giả sử $w \in W^{1,p}_0(B_{2R}) + u$ là nghiệm duy nhất của phương trình

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x,\nabla w)) &= 0 \quad \text{trong } B_{2R}, \\ \qquad w &= u \quad \text{treâ } \partial B_{2R}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Bổ đề 3.1. (Tran, & Nguyen, 2019c)

Tồn tại một hằng số $\Theta_0 > p$ *sao cho*

$$\left(\frac{1}{|B_r(y)|} \int_{B_r(y)} |\nabla w|^{\Theta_0} dx \right)^{\frac{1}{\Theta_0}} \leq C \left(\frac{1}{|B_{2r}(y)|} \int_{B_{2r}(y)} |\nabla w|^{p-1} dx \right)^{\frac{1}{p-1}}, \tag{3.2}$$

với $B_{2r}(y) \subset B_R$ *và số dương C phụ thuộc vào* $n, p, \Lambda.$

Bổ đề 3.2. (Tran & Nguyen, 2019c)

Cho $\mu \in L^m(\Omega)$ *với mỗi* $m \in (m^*, m^{**})$ *và u là nghiệm của* (1.2). *Khi đó* $\nabla u \in L^{\frac{nm(p-1)}{n-m}}(\Omega)$ *và tồn tại số dương C thỏa mãn*

$$\|\nabla u\|_{L^{\frac{nm(p-1)}{n-m}}(\Omega)} \le C\|\mu\|_{L^m(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}}. \tag{3.3}$$

Bổ đề 3.3. (Maso et al, 1999)

Cho u *là nghiệm renormalized của* (1.2) *với dữ liệu độ đo* $\mu \in L^m(\Omega)$ *với mỗi* $m \in (m^*, m^{**})$. *Giả sử một dãy* $(u_k)_k$ *là nghiệm renormalized của* (1.1) *với dữ liệu độ đo* $\mu_k \in L^{\frac{p}{m(p-1)}}(\Omega)$ *thỏa mãn* μ_k *hội tụ yếu về* μ *trong* $L^m(\Omega)$. *Khi đó tồn tại một dãy con* $\{u_{k'}\}_{k'}$ *thỏa mãn* $u_{k'}$ *hội tụ về* u *và* $\nabla u_{k'}$ *hội tụ về* ∇u *trong* $L^q(\Omega)$ *với mọi* $0 < q < \dfrac{nm(p-1)}{n-m}$.

Bổ đề 3.4. (Tran, & Nguyen, 2019c)

Cho $1 < p \le \dfrac{3n-2}{2n-1}$ *và* $\mu \in L^m(B_R)$ *với mỗi* $m \in (m^*, n)$. *Giả sử rằng* $u \in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ *là một nghiệm của phương trình (1.2) và* $w \in W_0^{1,p}(B_{2R}) + u$ *là nghiệm duy nhất của phương trình (3.1). Với mỗi q thỏa mãn điều kiện*

$$\frac{n}{2n-1} < q < \frac{nm(p-1)}{n-m}, \tag{3.4}$$

tồn tại một hằng số $C > 0$ *chỉ phụ thuộc vào* n, p, q *và* m *thỏa mãn*

$$\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |\nabla u - \nabla w|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\mathsf{F}_R(\mu)^{\frac{1}{p-1}} + C\mathsf{F}_R(\mu)\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R} |\nabla u|^q \, dx\right)^{\frac{2-p}{q}}, \tag{3.5}$$

trong đó, $B_R = B_R(x_0)$ *và hàm* F_R *được định nghĩa*

$$\mathsf{F}_R(\mu) = \left(\frac{R^m}{|B_R|}\int_{B_R} |\mu|^m \, dx\right)^{\frac{1}{m}}. \tag{3.6}$$

Mệnh đề 3.5. (Nguyen, & Nguyen, 2019)

Cho $\mu \in \mathsf{M}_b(\Omega)$, $1 < p \le \dfrac{3n-2}{2n-1}$ *và số* q *thỏa mãn điều kiện (3.4). Khi đó tồn tại* $v \in W^{1,p}(B_R) \cap W^{1,\infty}(B_{R/2})$ *sao cho với mọi* $\varepsilon > 0$ *và* $[\mathsf{A}]_{R_0} < \delta_0$ *thì*

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(B_{R/2})} \le C\mathsf{F}_{2R}(\mu)^{\frac{1}{p-1}} + C\left(\frac{1}{|B_{2R}|}\int_{B_{2R}} |\nabla u|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.7}$$

và

$$\left(\frac{1}{|B_R|}\int_{B_R}|\nabla u-\nabla v|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C_\varepsilon \mathrm{F}_{2R}(\mu)^{\frac{1}{p-1}}+C(\delta_0+\varepsilon)\left(\frac{1}{|B_{2R}|}\int_{B_{2R}}|\nabla u|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{3.8}$$

với $C_\varepsilon=C(n,p,\Lambda,\varepsilon)>0$ *và* F_R *được định nghĩa trong Bổ đề* 3.4.

Kết quả đánh giá trên biên được thực hiện tương tự như trong miền Ω khi Ω là miền (δ_0,R_0) Reifenberg với $\delta_0<1/2$. Cho $x_0\in\partial\Omega$ là điểm trên biên của Ω và $0<R<R_0/10$, ta đặt $\Omega_{2R}=B_{2R}(x_0)\cap\Omega$. Giả sử $u\in W^{1,p}_{loc}(\Omega)$ là nghiệm của phương trình (1.2) và ta gọi $w\in u+W^{1,p}_0(\Omega_{2R})$ là nghiệm duy nhất của phương trình

$$\begin{cases}-\mathrm{div}\left(A(x,\nabla w)\right) = 0 \text{ trong } \Omega_{10R},\\ \qquad w = u \text{ treâ } \partial\Omega_{10R}.\end{cases} \tag{3.9}$$

Bổ đề 3.6. (Nguyen, & Nguyen, 2019)

Giả sử rằng $1<p\le\frac{3n-2}{2n-1}$ *và* w *là nghiệm duy nhất của (3.9) và số* q *thỏa mãn điều kiện (3.4). Khi đó ta có*

$$\left(\frac{1}{|B_{10R}(x_0)|}\int_{B_{10R}(x_0)}|\nabla u-\nabla w|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\frac{R^m}{|B_{10R}(x_0)|}\int_{B_{10R}(x_0)}|\mu|^m\,dx\right)^{\frac{1}{m(p-1)}}$$
$$+C\left(\frac{R^m}{|B_{10R}(x_0)|}\int_{B_{10R}(x_0)}|\mu|^m\,dx\right)^{\frac{1}{m}}\left(\frac{1}{|B_{10R}(x_0)|}\int_{B_{10R}(x_0)}|\nabla u|^q\,dx\right)^{\frac{2-p}{q}}.$$

Mệnh đề 3.7. (Nguyen, & Nguyen, 2019)

Cho $\mu\in\mathrm{M}_b(\Omega)$, $1<p\le\frac{3n-2}{2n-1}$ *và số* q *thỏa mãn điều kiện (3.4). Khi đó, với mọi* $\varepsilon>0$, *tồn tại* $\delta_0=\delta_0(n,p,\Lambda,\varepsilon)\in\left(0,\frac{1}{2}\right)$ *sao cho nếu* Ω *là miền* (δ_0,R_0) *- Reifenberg thì tồn tại một hàm* $V\in W^{1,\infty}(B_{R/2}(x_0))$ *thỏa mãn* $[\mathrm{A}]_{R_0}<\delta_0$ *sao cho*

$$\|\nabla V\|_{L^\infty(B_{R/10}(x_0))}\le C\mathrm{F}_{10R}(x_0)^{\frac{1}{p-1}}+C\left(\frac{1}{|B_{10R}|}\int_{B_{10R}}|\nabla u|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

và

$$\left(\frac{1}{|B_{R/10}(x_0)|}\int_{B_{R/10}(x_0)}|\nabla(u-V)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C_\varepsilon\mathrm{F}_{10R}(x_0)^{\frac{1}{p-1}}+C(\delta_0+\varepsilon)\left(\frac{1}{|B_{10R}|}\int_{B_{10R}(x_0)}|\nabla u|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

với $C_\varepsilon=C(n,p,\Lambda,\varepsilon)>0$ *và* F_{10R} *được định nghĩa như trong Bổ đề 3.4.*

Bổ đề 3.8. (Tran, 2019)

Cho $\varepsilon \in (0,1), 0 < R_1 \le R_2$ *và quả cầu* $Q := B_{R_2}(x_0)$ *với* $x_0 \in \mathbb{R}^n$. *Cho* $V \subset W \subset Q$ *là hai tập đo được thỏa mãn hai tính chất*

i) $\mathcal{L}^n(V) < \varepsilon \mathcal{L}^n(B_{R_1})$;

ii) Với mỗi $x \in Q$ *và* $r \in (0, R_1]$, *nếu* $\mathcal{L}^n(V \cap B_r(x)) \ge \varepsilon \mathcal{L}^n(B_r(x))$ *thì* $B_r(x) \cap Q \subset W$.

Khi đó tồn tại một hằng số C dương phụ thuộc vào n sao cho $\mathcal{L}^n(V) < C\varepsilon \mathcal{L}^n(W)$.

4. Kết quả chính

Kết quả mới của bài báo được trình bày trong hai định lí chính. Trong đó, Định lí 4.1 là một bất đẳng thức dạng good-λ, được chứng minh dựa trên Bổ đề 3.8, được biết đến như một dạng bổ đề phủ Vitali. Kết quả về đánh giá gradient được phát biểu trong Định lí 4.2, được chứng minh dựa trên Định lí 4.1.

Định lí 4.1.

Cho $1 < p \le \dfrac{3n-2}{2n-1}$, $\mu \in \mathfrak{M}(\Omega)$ *và* $Q = B_{diam(\Omega)}(x_0)$ *với* x_0 *cố định trong* Ω. *Giả sử u là nghiệm renormalized của* (1.2) *với dữ liệu độ đo* $\mu \in L^m(\Omega)$ *với* $m \in (m^*, m^{**})$. *Khi đó, với mọi* $\dfrac{n}{2n-1} < q < \dfrac{nm(p-1)}{n-m}$ *và* $\varepsilon \in (0,1)$, *tồn tại các hằng số* $\gamma = \gamma(n, p, c_0, \varepsilon)$, $\alpha = \alpha(n, p, c_0) > 0, \beta = \beta(n, p, q, \varepsilon, c_0) \in \mathbb{R}$ *và* $C = C(n, p, q, \lambda, c_0, diam(\Omega)/r_0) > 0$ *sao cho* Ω *là miền* (δ_0, R_0) *- Reifenberg và* $[\mathcal{A}]_{R_0} < \gamma$ *thì ta có bất đẳng thức*

$$\mathcal{L}^n\left(\left\{\left(\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} > \alpha\lambda,\ \left(\mathbf{M}_{\mathrm{m}}\left(|\mu|^m\right)\right)^{\frac{1}{m(p-1)}} \le \beta\lambda\right\} \cap Q\right) \le C\varepsilon \mathcal{L}^n\left(\left\{\left(\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} > \lambda\right\} \cap Q\right), \quad \forall \lambda > 0. \tag{4.1}$$

Chứng minh : Với $\lambda > 0$ và $r_0 > 0$, xét hai tập hợp có dạng

$$V_{\lambda,\beta} = \left\{\left(\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} > \alpha\lambda, \left(\mathbf{M}_{\mathrm{m}}\left(|\mu|^m\right)\right)^{\frac{1}{m(p-1)}} \le \beta\lambda\right\} \cap Q,$$

và

$$W_\lambda = \left\{\left(\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} > \lambda\right\} \cap Q,$$

trong đó, $\beta \in (0,1)$ và $\alpha > 0$ được chọn ở phía sau. Đặt $D_0 = \operatorname{diam}(\Omega)$, ta có $Q = B_{D_0}(x_0)$. Ta cần chứng minh rằng tồn tại các tham số α, β, γ và $\varepsilon_0 > 0$ sao cho (4.1) thỏa mãn với mọi $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, tức là $\mathsf{L}^n(V_{\lambda,\beta}) \le C\varepsilon \mathsf{L}^n(W_\lambda)$. Ý tưởng chính là dùng Bổ đề 3.8 để chứng minh Định lí 4.1, nghĩa là ta sẽ kiểm tra hai giả thiết trong Bổ đề 3.8 được thỏa mãn. Đầu tiên ta cần chứng minh rằng

$$\mathsf{L}^n(V_{\lambda,\beta}) \le C\varepsilon \mathsf{L}^n(B_{R_0}(0)), \quad \forall \lambda > 0, \tag{4.2}$$

trong đó, $R_0 = \min\{D_0, r_0\}$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử $V_{\lambda,\varepsilon} \ne \varnothing$ (bởi vì nếu $V_{\lambda,\varepsilon} = \varnothing$ thì (3.12) là hiển nhiên đúng). Khi đó tồn tại $x_1 \in Q$ thỏa mãn $\left(\mathbf{M}_{\mathrm{m}}(|\mu|^m)\right)^{\frac{1}{m(p-1)}} \le \beta\lambda$. Theo định nghĩa của hàm cực đại $\mathbf{M}_{\mathrm{m}}$ ta có

$$\left(\int_\Omega |\mu|^m \, dy\right)^{\frac{1}{m}} \le \left(\int_{B_{D_0}(x_1)} |\mu|^m \, dy\right)^{\frac{1}{m}} \le (\beta\lambda)^{p-1} \frac{|B_{D_0}(x_1)|}{D_0} = D_0^{\frac{n}{m}-1} (\beta\lambda)^{p-1},$$

hay

$$\|\mu\|_{L^m(\Omega)} \le D_0^{\frac{n}{m}-1} (\beta\lambda)^{p-1}. \tag{4.3}$$

Áp dụng Bổ đề 2.3 với $s = 1$, ta có

$$\begin{aligned}
\mathsf{L}^n(V_{\lambda,\beta}) &\le \mathsf{L}^n\left\{\left(\mathbf{M}(|\nabla u|^q)\right)^{\frac{1}{q}} > \alpha\lambda\right\} \le \frac{C}{(\alpha\lambda)^q} \int_\Omega |\nabla u|^q \, dx \\
&\le \frac{C}{(\alpha\lambda)^q} \left(\int_\Omega dx\right)^{1-\frac{q(n-m)}{mn(p-1)}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^{\frac{nm(p-1)}{n-m}} \, dx\right)^{\frac{q(n-m)}{nm(p-1)}} \\
&\le \frac{C}{(\alpha\lambda)^q} D_0^{n-\frac{q(n-m)}{m(p-1)}} \left(\int_\Omega |\nabla u|^{\frac{nm(p-1)}{n-m}} \, dx\right)^{\frac{q(n-m)}{nm(p-1)}}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Mặt khác, theo đánh giá gradient trong Bổ đề 3.2 ta có

$$\|\nabla u\|_{L^{\frac{nm(p-1)}{n-m}}(\Omega)} \le C \|\mu\|_{L^m(\Omega)}^{\frac{1}{p-1}},$$

kết hợp với (4.3) và (4.4) ta được

$$\mathsf{L}^n(V_{\lambda,\beta}) \le \frac{C}{(\alpha\lambda)^q} D_0^{n-\frac{q(n-m)}{m(p-1)}} \left[D_0^{\frac{n}{m}-1} (\beta\lambda)^{p-1}\right]^{\frac{q}{p-1}} \le C\left(\frac{D_0}{R_0}\right)^n \varepsilon \mathsf{L}^n(B_{R_0}).$$

Đánh giá này dẫn đến $\mathcal{L}^n\left(V_{\lambda,\beta}\right) \le C\varepsilon\mathcal{L}^n\left(B_{R_0}\right)$ với $\beta \le C\left(n, p, \Lambda, q, \varepsilon, R / R_0\right)$ và hằng số C phụ thuộc vào $\left(\dfrac{D_0}{R_0}\right)^n$ và α, (4.2) được chứng minh.

Tiếp tục ta cần chứng minh $\forall x \in Q = B_{R_2}\left(x_0\right), \forall r \in \left[0, R_0\right)$:

$\mathcal{L}^n\left(V_{\lambda,\varepsilon} \cap B_r\left(x\right)\right) \le C\varepsilon\mathcal{L}^n\left(B_r\left(x\right)\right) \Rightarrow B_r\left(x\right) \cap Q \subset W_\lambda.$

Thật vậy, ta chứng minh mệnh đề này bằng phản chứng, giả sử rằng $B_r\left(x\right) \cap Q \cap W_\lambda^c$ và $V_{\lambda,\varepsilon} \cap B_r\left(x\right) \ne \varnothing$. Khi đó, tồn tại $x_2, x_3 \in B_r\left(x\right) \cap \Omega$ thỏa mãn

$$\left[\mathbf{M}\left(\left|\nabla u\right|^q\right)\left(x_2\right)\right]^{\frac{1}{q}} \le \lambda, \tag{4.5}$$

và

$$\left[\mathbf{M}_{\mathrm{m}}\left(\left|\mu\right|^m\right)\left(x_3\right)\right]^{\frac{1}{m(p-1)}} \le \beta\lambda. \tag{4.6}$$

Ta sẽ chứng minh rằng tồn tại $C = C\left(n, p, \Lambda, m, q, c_0\right) > 0$ sao cho

$$\left|V_{\lambda,\beta} \cap B_r\left(x\right)\right| < C\varepsilon\left|B_r\left(x\right)\right|. \tag{4.7}$$

Với mỗi $\rho > 0, y \in B_r\left(x\right)$ ta có

$$\begin{aligned}\frac{1}{\left|B_\rho\left(y\right)\right|}\int_{B_\rho(y)}\left|\nabla u\right|^q dx &\le \sup_{\rho'>0}\frac{1}{\left|B_{\rho'}\left(y\right)\right|}\int_{B_{\rho'}(y)}\left|\nabla u\right|^q dx \\ &\le \max\left\{\sup_{0<\rho'<r}\frac{1}{\left|B_{\rho'}\left(y\right)\right|}\int_{B_{\rho'}(y)}\left|\nabla u\right|^q dx;\ \sup_{\rho'\ge r}\frac{1}{\left|B_{\rho'}\left(y\right)\right|}\int_{B_{\rho'}(y)}\left|\nabla u\right|^q dx\right\}.\end{aligned}$$

Với $0 < \rho' < r,\ y \in B_r\left(x\right)$ ta có $B_{\rho'}\left(y\right) \subset B_{2r}\left(x\right)$, do đó

$$\sup_{\rho'<r}\frac{1}{\left|B_{\rho'}\left(y\right)\right|}\int_{B_{\rho'}(y)}\left|\nabla u\right|^q dx \le \sup_{\rho'<r}\frac{1}{\left|B_{\rho'}\left(y\right)\right|}\int_{B_{\rho'}(y)}\chi_{B_{2r}(x)}\left|\nabla u\right|^q dx \le \mathbf{M}_{\chi_{B_{2r}(x)}}\left|\nabla u\right|^q\left(y\right).$$

Với $B_{\rho'}\left(y\right) \subset B_{\rho'+r} \subset B_{\rho'+2r}\left(x_2\right) \subset B_{3\rho'}\left(x_2\right)$ với mỗi $\rho' \ge r.$ Từ (3.15) ta có

$$\begin{aligned}\sup_{\rho'\ge r}\frac{1}{\left|B_{\rho'}\left(y\right)\right|}\int_{B_{\rho'}(y)}\left|\nabla u\right|^q dx &\le \sup_{\rho'\ge r}\frac{\left|B_{3\rho'}\left(y\right)\right|}{\left|B_{\rho'}\left(y\right)\right|}\cdot\frac{1}{\left|B_{3\rho'}\left(y\right)\right|}\int_{B_{3\rho'}(x_2)}\left|\nabla u\right|^q dx \\ &\le 3^n\sup_{\rho'\ge r}\frac{1}{\left|B_{3\rho'}\left(x_2\right)\right|}\int_{B_{3\rho'}(x_2)}\left|\nabla u\right|^q dx \le 3^n\mathbf{M}\left(\left|\nabla u\right|^q\right)\left(x_2\right) \le 3^n\lambda^q.\end{aligned}$$

Từ đó suy ra $\dfrac{1}{\left|B_\rho\left(y\right)\right|}\displaystyle\int_{B_\rho(y)}\left|\nabla u\right|^q dx \le \max\left\{\mathbf{M}_{\chi_{B_{2r}(x)}}\left|\nabla u\right|^q\left(y\right); 3^n\lambda^q\right\},$

hay $\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)(y) \le \max\left\{\mathbf{M}_{\chi_{B_{2r}(x)}}|\nabla u|^q(y); 3^n\lambda^q\right\}, \forall y \in B_r(x)$. Đánh giá này dẫn đến

$$\left\{\left(\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} > 3^{\frac{n}{q}}\lambda\right\} \cap B_r(x) = \varnothing.$$

Như vậy, với mọi $\lambda > 0$ và $\alpha \ge 3^{\frac{n}{q}}$ ta có,

$$V_{\lambda,\beta} \cap B_r(x) = \left\{\left(\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} > \alpha\lambda, \left(\mathbf{M}_m\left(|\mu|^m\right)\right)^{\frac{1}{m(p-1)}} \le \beta\lambda\right\} \cap Q \cap B_r(x)$$

$$= \left\{\left[\mathbf{M}\left(\chi_{B_{2r}(x)}|\nabla u|^q\right)\right]^{\frac{1}{q}} > \alpha\lambda, \left(\mathbf{M}_m\left(|\mu|^m\right)\right)^{\frac{1}{m(p-1)}} \le \beta\lambda\right\} \cap Q \cap B_r(x). \tag{4.8}$$

Giả sử $u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ là nghiệm duy nhất của phương trình

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(A(x,\nabla u)\right) = \mu_k & \text{trong } \Omega, \\ u_k = 0 & \text{treâ } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4.9}$$

với $\mu_k = T_k(\mu)$. Để chứng minh (3.17), ta xét hai trường hợp $B_{8r}(x) \subset\subset \Omega$ và $B_{8r}(x) \cap \Omega^c \ne \varnothing$.

Trường hợp 1. $B_{8r}(x) \subset\subset \Omega$

Áp dụng Bổ đề 3.5 cho $v_k \in W^{1,p}(B_{4r}(x)) \cap W^{1,\infty}(B_{2r}(x))$ là nghiệm duy nhất của phương trình:

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\left(A(x,\nabla v_k)\right) = 0 & \text{trong } B_{8r}(x), \\ v_k = u_k & \text{treâ } \partial B_{8r}(x), \end{cases} \tag{4.10}$$

với $\mu = \mu_k$ và $B_{2R} = B_{8r}(x)$, tồn tại hằng số $C = C(n,p,q) > 0$ sao cho $\forall \eta > 0$, và với $[\mathrm{A}]_{R_0} < \gamma$, ta có :

$$\|\nabla v_k\|_{L^\infty(B_{2r}(x))} \le C\mathrm{F}_{8r}(\mu_k)^{\frac{1}{p-1}} + C\left(\frac{1}{|B_{8r}(x)|}\int_{B_{8r}(x)}|\nabla u_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

và

$$\left(\frac{1}{|B_{4r}|}\int_{B_{4r}}|\nabla u_k - \nabla v_k|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C_\eta \mathrm{F}_{8r}(\mu_k)^{\frac{1}{p-1}} + C(\gamma+\eta)\left(\frac{1}{|B_{8r}|}\int_{B_{8r}}|\nabla u_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

trong đó hàm F_{8r} được định nghĩa

$$\mathsf{F}_{8r}\left(\mu_k\right)=\left(\frac{(8r)^m}{\left|B_{4r}(x)\right|}\int_{B_{4r}(x)}\left|\mu_k\right|^m dx\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Áp dụng (3.15), (3.16) và Bổ đề 3.3, ta nhận được

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}\left\|\nabla v_k\right\|_{L^\infty(B_r(x))}&\le C\mathsf{F}_{8r}(\mu)^{\frac{1}{p-1}}+C\left(\frac{1}{\left|B_{8r}(x)\right|}\int_{B_{8r}(x)}|\nabla u|^q\right)^{1/q}\\&\le C\left[\mathbf{M}_m\left(|\mu|^m\right)(x_3)\right]^{\frac{1}{p-1}}+C\left[\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)(x_2)\right]^{\frac{1}{q}}\\&\le C(\beta+1)\lambda\ \le\ C\lambda,\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{1}{\left|B_{4r}(x)\right|}\int_{B_{4r}(x)}\left|\nabla u_k-\nabla v_k\right|^q dx\right)^{1/q}\\&\le C_\eta\mathsf{F}_{\overline{8r}}(\mu)^{\frac{1}{p-1}}+C(\gamma+\eta)\left(\frac{1}{\left|B_{8r}(x)\right|}\int_{B_{8r}(x)}|\nabla u|^q\right)^{1/q}\\&\le C_\eta\left[\mathbf{M}_m\left(|\mu|^m\right)(x_3)\right]^{\frac{1}{p-1}}+C(\gamma+\eta)\left[\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)(x_3)\right]^{1/q}\\&\le C\left(C_\eta\beta+\gamma^\kappa+\eta\right)\lambda,\end{aligned}$$

trong đó $\mu_k\to\mu$ hội tụ yếu trong L^m. Như vậy tồn tại $k_0>1$ sao cho $\forall k\ge k_0$ ta có

$$\left\|\nabla v_k\right\|_{L^\infty(B_{2r}(x))}\le C\lambda, \tag{4.11}$$

và

$$\left(\frac{1}{\left|B_{4r}(x)\right|}\int_{B_{4r}(x)}\left|\nabla u_k-\nabla v_k\right|^q dx\right)^{1/q}\le C\left(C_\eta\beta+\gamma^\kappa+\eta\right)\lambda. \tag{4.12}$$

Ta có đánh giá

$$\begin{aligned}\left|V_{\lambda,\beta}\cap B_r(x)\right|\le&\left|\left\{\mathbf{M}\left(\chi_{B_{2r}}\left|\nabla\left(u_k-v_k\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}>\frac{1}{9}\alpha\lambda\right\}\cap B_r(x)\right|\\&+\left|\left\{\mathbf{M}\left(\chi_{B_{2r}}\left|\nabla\left(u-u_k\right)\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}>\frac{1}{9}\alpha\lambda\right\}\cap B_r(x)\right|\\&+\left|\left\{\mathbf{M}\left(\chi_{B_{2r}}\left|\nabla v_k\right|^q\right)^{\frac{1}{q}}>\frac{1}{9}\alpha\lambda\right\}\cap B_r(x)\right|.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Dựa vào (3.6), ta nhận thấy rằng với $\alpha \geq \max\left\{3^{\frac{n}{q}}, 10C\right\}$ (C là hằng số trong (3.6)) và $k \geq k_0$, ta suy ra

$$\left|\left\{\mathbf{M}\left(\chi_{B_{2r}(x)}|\nabla v_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} > \frac{1}{9}\alpha\lambda\right\} \cap B_r(x)\right| = 0.$$

Do đó, (4.13) dẫn đến

$$\begin{aligned}|V_{\lambda,\beta} \cap B_r(x)| \leq & \left|\left\{\mathbf{M}\left(\chi_{B_{2r}}|\nabla(u_k - v_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} > \frac{1}{9}\alpha\lambda\right\} \cap B_r(x)\right| \\ & + \left|\left\{\mathbf{M}\left(\chi_{B_{2r}}|\nabla(u - u_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}} > \frac{1}{9}\alpha\lambda\right\} \cap B_r(x)\right|.\end{aligned}$$

Áp dụng Bổ đề 2.3 và (4.12), ta có

$$\begin{aligned}|V_{\lambda,\beta} \cap B_r(x)| & \leq \frac{C}{\lambda^q}\left[\int_{B_{2r}(x)} |\nabla(u_k - v_k)|^q + \int_{B_{2r}(x)} |\nabla(u - u_k)|^q\right] \\ & \leq \frac{C}{\lambda^q}\left[(C_\eta\beta + \gamma^\kappa + \eta)^q \lambda^q r^n + \int_{B_{2r}(x)} |\nabla(u - u_k)|^q\right].\end{aligned}$$

Cho $k \to \infty$ ta được

$$|V_{\lambda,\beta} \cap B_r(x)| \leq C(C_\eta\beta + \gamma^\kappa + \eta)^q |B_r(x)| < \varepsilon |B_r(x)|,$$

trong đó $\eta, \gamma \leq C(n, p, c_0, q, \varepsilon)$ và $\beta \leq C\left(n, p, c_0, q, \varepsilon, R/R_0\right)$.

Trường hợp 2. $B_{8r}(x) \cap \Omega^c \neq \varnothing$

Tồn tại $x_4 \in \partial\Omega$ thỏa mãn $|x_4 - x| = \mathrm{dist}(x, \partial\Omega) \leq 8r$. Ta có

$$B_{2r}(x) \subset B_{10r}(x_4) \subset B_{100r}(x_4) \subset B_{108r}(x) \subset B_{109r}(x_2), \tag{4.14}$$

và

$$B_{100r}(x_4) \subset B_{108r}(x) \subset B_{109r}(x_3). \tag{4.15}$$

Áp dụng Mệnh đề 3.7 với $u = u_k \in W_0^{1,p}(\Omega)$ và $V_k \in W^{1,\infty}(B_{10r}(x_4))$ là nghiệm của phương trình :

$$\begin{cases} -\mathrm{div}(A(x, \nabla V_k)) & = & 0 & \text{trong} & B_{10r}(x_4), \\ V_k & = & u_k & \text{trên} & \partial B_{10r}(x_4), \end{cases}$$

với $\mu = \mu_k$ và $B_{10R} = B_{100r}(x_4)$, có hằng số $C = C(n, p, \Lambda) > 0$ thỏa mãn

$$\|\nabla V_k\|_{L^\infty(B_{10r}(x_4))} \le C\mathcal{F}_{100r}(\mu)^{\frac{1}{p-1}} + C\left(\frac{1}{|B_{100r}(x_4)|}\int_{B_{100r}(x_4)} |\nabla u_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

và

$$\left(\frac{1}{|B_{10r}(x_4)|}\int_{B_{8r}(x_4)} |\nabla(u_k - V_k)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C_\eta \mathcal{F}_{100r}(\mu_k)^{\frac{1}{p-1}} + C(\gamma+\eta)\left(\frac{1}{|B_{100r}(x_4)|}\int_{B_{100r}(x_4)} |\nabla u_k|^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

trong đó, $\mathcal{F}_{100r}$ được định nghĩa như sau

$$\mathcal{F}_{100r}(\mu_k) = \left(\frac{(100r)^m}{|B_{100r}(x)|}\int_{B_{100r}(x)} |\mu_k|^m\,dx\right)^{\frac{1}{m}}.$$

Từ $\left[\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)(x_2)\right]^{\frac{1}{q}} \le \lambda$ và $\left[\mathbf{M}_m(\mu)(x_3)\right]^{\frac{1}{p-1}} \le \beta\lambda$ với $x_2, x_3 \in B_r(x)$, (4.14), (4.15) và Bổ đề 3.3, ta có

$$\begin{aligned}\limsup_{k\to\infty}\|\nabla V_k\|_{L^\infty(B_{2r}(x))} &\le C\left[\mathcal{F}_{100r}(\mu)\right]^{\frac{1}{p-1}} + C\left(\frac{1}{|B_{100r}(x_4)|}\int_{B_{100r}(x_4)} |\nabla u|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\le C\left[\mathcal{F}_{109r}(\mu)\right]^{\frac{1}{p-1}} + C\left(\frac{1}{|B_{109r}(x_4)|}\int_{B_{109r}(x_4)} |\nabla u|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\le \left(\left[\mathbf{M}_m(\mu)(x_3)\right]^{\frac{1}{p-1}} + \left[\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)(x_2)\right]^{\frac{1}{q}}\right) \le C\lambda,\end{aligned}$$

và

$$\begin{aligned}&\limsup_{k\to\infty}\left(\frac{1}{|B_{2r}(x)|}|\nabla(u_k - V_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\le C_\eta\left[\mathbf{M}_m(\mu)(x_3)\right]^{\frac{1}{p-1}} + C\left(\left([\mathcal{A}]_{R_0}\right)^\kappa + \eta\right)\left[\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)(x_2)\right]^{\frac{1}{q}}\\ &\le C\left(C_\eta\beta + \gamma^\kappa + \eta\right)\lambda.\end{aligned}$$

Như vậy, ta có thể tìm $k_0 > 1$ thỏa mãn với mọi $k \ge k_0$ ta có

$$\|\nabla V_k\|_{L^\infty(B_{2r}(x))} \le C\lambda, \tag{4.16}$$

và

$$\left(\frac{1}{|B_{2r}(x)|}\int_{B_{2r}(x)}|\nabla(u_k-V_k)|^q\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(C_\eta\beta+\gamma^\kappa+\eta\right)\lambda. \quad (4.17)$$

Ta có đánh giá tương tự như trường hợp 1 cho $k\ge k_0$ như sau,

$$\left|V_{\lambda,\beta}\cap B_r(x)\right|\le\left|\left\{\mathbf{M}\left(\chi_{B_{2r}}|\nabla(u_k-v_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}>\frac{1}{9}\alpha\lambda\right\}\cap B_r(x)\right|$$
$$+\left|\left\{\mathbf{M}\left(\chi_{B_{2r}}|\nabla(u-u_k)|^q\right)^{\frac{1}{q}}>\frac{1}{9}\alpha\lambda\right\}\cap B_r(x)\right|,$$

với mọi hằng số $\alpha>1$ phụ thuộc vào $n,p,\Lambda.$ Do đó, theo (4.11) và (4.12) cho $k\ge k_0$ ta suy ra,

$$\left|V_{\lambda,\beta}\cap B_r(x)\right|\le\frac{C}{\lambda^\alpha}\left(\int_{B_{2r}(x)}|\nabla(u_k-v_k)|^q+\int_{B_{2r}(x)}|\nabla(u-u_k)|^q+\right)$$
$$\le\frac{C}{\lambda^\alpha}\left(\left(C_\eta\beta+\gamma^\kappa+\eta\right)^q\lambda^q r^n+\int_{B_{2r}(x)}|\nabla(u-u_k)|^q\right).$$

Khi đó cho $k\to\infty$ ta nhận được

$$\left|V_{\lambda,\beta}\cap B_r(x)\right|\le C\left(C_\eta\beta+\gamma^\kappa+\eta\right)^q|B_r(x)|,$$

trong đó $\eta,\alpha\le C(n,p,\Lambda,q,\varepsilon)$ và $\beta\le C(n,p,\Lambda,q,\varepsilon,R/R_0)$.

Cuối cùng, áp dụng Bổ đề 3.8 với $V=V_{\lambda,\beta}$ và $W=W_\lambda$ để hoàn tất chứng minh của định lí. □

Định lí 4.2.

Cho $n\ge 2,\ p\in\left(1,\frac{3n-2}{2n-1}\right]$ và $\Omega\subset\mathbb{R}^n$ là miền thỏa mãn điều kiện Reifenberg. Giả sử rằng cho dữ kiện $\mu\in L^m(\Omega)$ với $m\in(m^*,m^{**})$. Khi đó tồn tại hằng số $C=C\left(n,p,\Lambda,m,s,t,\frac{D_0}{R_0}\right)$ thỏa mãn với bất kỳ nghiệm renormalized u của (1.2), ta có

$$\|\nabla u\|_{L^{s,t}(\Omega)}\le C\left\|[\mathbf{M}_m(|\mu|)]^{\frac{1}{m(p-1)}}\right\|_{L^{s,t}(\Omega)}, \quad (4.18)$$

với $s\in(0,\infty)$ và $t\in(0,\infty]$.

Chứng minh.

Ta chứng minh kết quả trên trong trường hợp $t \neq \infty$, trường hợp $t = \infty$ được chứng minh hoàn toàn tương tự. Cố định $\frac{n}{2n-1} < q < \frac{nm(p-1)}{n-m}$, áp dụng Định lí 3.9, tồn tại các hằng số $C > 0, \alpha \geq \max\left\{3^{\frac{n}{q}}, 10C\right\}, \beta \leq C(n, p, \Lambda, q, \varepsilon, R/R_0)$ và $0 < \varepsilon_0 < 1$ thỏa mãn bất đẳng thức (4.1), với mọi $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ và $\lambda > 0$.

Bằng cách thay giá trị λ bằng $\alpha\lambda$ trong định nghĩa của không gian Lorentz, ta có

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^{s,t}(\Omega)}^t &= s\int_0^\infty \lambda^t \mathcal{L}^n\left(\left\{\left(\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} > \lambda\right\} \cap \Omega\right)^{\frac{t}{s}} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &= \alpha^t s\int_0^\infty \lambda^t \mathcal{L}^n\left(\left\{\left(\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} > \alpha\lambda\right\} \cap \Omega\right)^{\frac{t}{s}} \frac{d\lambda}{\lambda}. \end{aligned} \tag{4.19}$$

Áp dụng (4.1) và (4.19), ta nhận được

$$\begin{aligned} \left\|\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^{s,t}(\Omega)}^t &\leq C\alpha^t \varepsilon^{\frac{t}{s}} s\int_0^\infty \lambda^t \mathcal{L}^n\left(\left\{\left(\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}} > \lambda\right\} \cap \Omega\right)^{\frac{t}{s}} \frac{d\lambda}{\lambda} \\ &+ C\alpha^t s\int_0^\infty \lambda^t \mathcal{L}^n\left(\left\{\left(\mathbf{M}_m(|\mu|)\right)^{\frac{1}{m(p-1)}} > \beta\lambda\right\} \cap \Omega\right)^{\frac{t}{s}} \frac{d\lambda}{\lambda}. \end{aligned} \tag{4.20}$$

Ta biểu diễn lại các giá trị của tích phân bên vế phải của (4.20), ta được

$$\left\|\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^{s,t}(\Omega)}^t \leq C\varepsilon^{\frac{t}{s}} s\left\|\left(\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^{s,t}(\Omega)}^t + C\beta^{-t}\left\|\left(\mathbf{M}_m\left(|\mu|^m\right)\right)^{\frac{1}{m(p-1)}}\right\|_{L^{s,t}(\Omega)}^t,$$

dẫn đến

$$\left\|\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^{s,t}(\Omega)} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{s}} s\left\|\left(\mathbf{M}\left(|\nabla u|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^{s,t}(\Omega)} + C\beta\left\|\left(\mathbf{M}_m\left(|\mu|^m\right)\right)^{\frac{1}{m(p-1)}}\right\|_{L^{s,t}(\Omega)},$$

với mọi $\alpha \geq \max\left\{3^{\frac{n}{q}}, 10C\right\}$, $\beta \leq C(n, p, \Lambda, q, \varepsilon, R/R_0)$ và $0 < t < \infty$, ta có thể chọn $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ đủ nhỏ sao cho $C\varepsilon^{\frac{1}{s}} \leq 1/2$ để thu được điều phải chứng minh. □

❖ ***Tuyên bố về quyền lợi:*** *Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

Betta, M. F., Mercaldo, A., Murat, F., & Porzio, M. M. (2003). Existence of renormalized solutions to nonlinear elliptic equations with a lower-order term and right-hand side a measure. *J. Math. Pures Appl.,* 80, 90-124.

Boccardo, L., Gallouët, T., & Orsina, L. (1996). Existence and uniqueness of entropy solutions for nonlinear elliptic equations with measure data. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire* 13, 539-551.

Byun, S. S., & Wang, L. (2004). Elliptic equations with BMO coefficients in Reifenberg domains. *Commun. Pure Appl. Math.,* 57, 1283-1310.

Byun, S. S., & Wang, L. (2008). Elliptic equations with BMO nonlinearity in Reifenberg domains. *Adv. Math.*, 219, 1937-1971.

Maso, G. D., Murat, F., Orsina, L., & Prignet, A. (1999). Renormalized solutions of elliptic equations with general measure data. *Ann. Scuola Norm. Super. Pisa* (IV), 28, 741-808.

Mingione, G. (2007). The Calderón–Zygmund theory for elliptic problems with measure data. *Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.,* (V) 6, 195-261.

Mingione, G. (2010). Gradient estimates below the duality exponent. *Math. Ann.,* 346, 571-627.

Nguyen, C. P. (2014). Nonlinear Muckenhoupt–Wheeden type bounds on Reifenberg flat domains, with applications to quasilinear Riccati type equations. *Adv. Math.,* 250, 387-419.

Nguyen, Q. H., & Nguyen, C. P. (2019). Good-λ and Muckenhoupt-Wheeden type bounds, with applications to quasilinear elliptic equations with gradient power source terms and measure data. *Math. Ann.,* 374, 67-98.

Tran, M. P. (2019). Good-λ type bounds of quasilinear elliptic equations for the singular case, *Nonlinear Anal.,* 178, 266-281.

Tran, M. P., & Nguyen, T. N. (2019a). Existence of a renormalized solution to the quasilinear Riccati-type equation in Lorentz spaces. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I,* 357, 59-65.

Tran, M.-P., & Nguyen, T. N. (2019b). An application of global gradient estimates in Lorentz-Morrey spaces: The existence of stationary solution to degenerate diffusive Hamilton-Jacobi equations. *Electron. J. Differential Equations*, (118), 1-12.

Tran, M. P., & Nguyen, T. N. (2019c). Global gradient estimates for very singular nonlinear elliptic equations with measure data. *arXiv:1909.06991*, 39 p.

Tran, M. P., & Nguyen, T. N. (2020). Lorentz-Morrey global bounds for singular quasilinear elliptic equations with measure data. *Commun. Contem. Math., 22*(5), 1950033, 30 p.

A LORENTZ GRADIENT ESTIMATE FOR A CLASS OF MEASURE DATA *P*-LAPLACE EQUATION WITH *P* CLOSED TO 1

Le Hong Phuc

Ho Chi Minh City University of Education, Vietnam

Corresponding author: Le Hong Phuc – Email: phuc1321996@gmail.com

Received: July 20, 2020; Revised: January 11, 2021; Accepted: March 22, 2021

ABSTRACT

p-Laplace equation is one of the partial differential equations which has been studied extensively. This equation has many applications in Physics and other sciences. The aim of the present paper is to establish a Lorentz gradient estimate for renormalized solutions to the p-Laplace equation with the data satisfying a Reifenberg domain in the case of p closed to 1. In order to prove the main result, we use a good-λ technique which has been considered in many recent studies. In particular, we used the results of the reverse Hölder's inequality and the comparison estimate between the solutions of the original problem and the corresponding homogeneous problem in the study by Tran and Nguyen, 2019c to prove the good-λ inequality. In particular, we consider the hypothesis of the Reifenberg domain to obtain a better evaluation in the study by Tran and Nguyen, 2019c.

Keywords: Lorentz spaces; measure data; *p*-Laplace equations; Reifenberg domain