



Bài báo nghiên cứu

TÍNH CHẤT TOPO CỦA PHÂN BỐ ĐỒ THỊ DÂY CUNG

Nguyễn Anh Thi

Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh, Việt Nam

Tác giả liên hệ: Nguyễn Anh Thi – Email: nathi@hcmus.edu.vn

Ngày nhận bài: 17-9-2020; ngày nhận bài sửa: 24-12-2020; ngày duyệt đăng: 28-12-2020

TÓM TẮT

Trong bài báo này tác giả dùng phương pháp *lexicographic shellability* để chứng minh rằng nếu G là một đồ thị dây cung, thì phần chính của poset giao của phân bố đồ thị tương ứng A_G tương đương đồng luân với một nêp của các mặt cầu. Hơn thế nữa, số mặt cầu trong nêp cũng được chỉ ra dựa vào đặc trưng của đồ thị. Do đồ thị dây cung là đồ thị siêu giải được, nên tồn tại một chuỗi các đồ thị con cảm sinh. Mỗi đồ thị con này sẽ tương ứng với một phần tử modular trong dây chuyền tối đại của poset giao của A_G . Từ đó, có thể tính được số lượng các dây chuyền tối đại giảm dựa vào các phần tử modular, hay là các đồ thị cảm sinh trong chuỗi. Số lượng các dây chuyền tối đại giảm bằng với số lượng các mặt cầu trong nêp. Việc nghiên cứu phân bố đồ thị của đồ thị dây cung là một bước nghiên cứu mở rộng dựa trên các nghiên cứu của phân bố đồ thị đủ K_n , hay phân bố Braid.

Từ khóa: đồ thị dây cung; phân bố đồ thị; *lexicographic shellability*

1. Mở đầu

Một phân bố siêu phẳng A là một tập hữu hạn các siêu phẳng affine trong một không gian vector $V \cong K^n$ với K là một trường. Chúng ta có rất nhiều ví dụ của phân bố siêu phẳng trong K^n , chẳng hạn như phân bố Braid, phân bố Shi, phân bố Catalan...

Phân bố đồ thị là một trường hợp đặc biệt của phân bố siêu phẳng, có được từ một đồ thị đơn vô hướng và hữu hạn. Chúng ta biết rằng, phân bố đồ thị của một đồ thị G trên tập đỉnh $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ là một phân bố con của phân bố Braid, trong đó phân bố Braid là phân bố đồ thị của đồ thị đủ K_n . Phân bố đồ thị được nghiên cứu dựa trên sự tương quan với một số vấn đề trong lý thuyết đồ thị (Curtis Greene, & Thomas Zaslavsky, 1993; Richard. P. Stanley, 1972). Một số giá trị bất biến liên quan đến phân bố đồ thị có thể được tính trực tiếp từ đồ thị tương ứng của nó, chẳng hạn như đa thức đặc trưng (Richard. P. Stanley, 2007)...

Một trong những bất biến quan trọng của một phân bố siêu phẳng A là *poset giao* $L(A)$, là tập hợp của tất cả các phần giao khác rỗng của các siêu phẳng trong A , bao gồm cả V như là phần giao trên tập rỗng, và được sắp thứ tự bởi quan hệ bao hàm ngược. Tính

Cite this article as: Nguyen Anh Thi (2020). Topological properties of graphical arrangements of chordal graphs. *Ho Chi Minh City University of Education Journal of Science*, 17(12), 2262-2272.

chất tôpô của phần chính của poset giao liên quan đến phức thứ tự của nó, trong đó phức thứ tự $\Delta(P)$ của một poset P là một phức đơn hình mà các đỉnh của nó là các phần tử của P và các đơn hình của nó được tạo thành bởi các dây chuyền hữu hạn trong P , bao gồm cả dây chuyền rỗng. Bjorner và Wach (Anders Bjorner, 1980; Anders Bjorner, & Michelle L. Wachs, 1983, 1996) đã chứng minh được rằng nếu một poset bị chặn P là EL-shellable, thì phức thứ tự $\Delta(\bar{P})$ tương đương đồng luân với một nêp (xem Dmitry Kozlov, 2008) của các mặt cầu, với $\bar{P}$ là phần chính (xem Richard P. Stanley, 2011) của poset P . Các tác giả cũng chứng minh được rằng số lượng các mặt cầu trong nêp có thể được tính dựa vào số các dây chuyền tối đại giảm bằng phương pháp lexicographic shellability. Chúng ta biết rằng poset giao của phân bố Braid B_n đẳng cấu với dàn các phân hoạch Π_n của tập hợp có n phần tử, được sắp thứ tự bởi phép làm mịn (xem Peter Orlik, & Hiroaki Terao, 1992). Bởi vì Π_n là EL-shellable, nên ta có thể tính được dạng tôpô của phần chính của poset giao của phân bố Braid B_n , đó là một nêp của $(n-1)!$ mặt cầu có số chiều bằng $n-3$. Trong bài báo *Graphical arrangements of compressed graphs*, (xem Nguyen, & Sangwook Kim, 2014), các tác giả đã nghiên cứu phân bố đồ thị của đồ thị nén. Từ đó chỉ ra tính chất tôpô của nó bằng phương pháp lexicographic shellability trên cơ sở dựa vào đặc trưng của đồ thị nén.

Trong bài báo này, tác giả nghiên cứu tính chất tôpô của phân bố đồ thị của đồ thị dây cung. Ta có thể xem đây là một lớp đồ thị mở rộng của đồ thị nén và đồ thị đủ K_n . Chúng ta biết rằng, đồ thị dây cung là đồ thị siêu giải được (Stefan Papadima, & Alexander I. Suciu, 2000), và theo kết quả ở (Richard. P. Stanley, 1972) thì poset giao trong trường hợp này là một dàn siêu giải được. Ở đây, ta đưa ra một phương pháp đánh dấu cạnh poset thỏa mãn điều kiện EL-labeling. Từ đó chứng minh được, phần chính của poset giao có dạng tôpô là một nêp của các mặt cầu. Hơn nữa, áp dụng cách đánh dấu cạnh này, theo phương pháp lexicographic shellability, ta chỉ ra được số lượng các mặt cầu trong nêp, hay nói cách khác là chỉ ra được dạng tôpô chính xác của nó.

Việc nghiên cứu phân bố đồ thị của đồ thị dây cung là một trong những bước khởi đầu, tạo tiền đề, giúp chúng ta có những nghiên cứu sâu hơn về phân bố đồ thị của đồ thị tổng quát. Từ đó, có thể tìm ra những kết quả hay hơn, thú vị hơn về phân bố đồ thị.

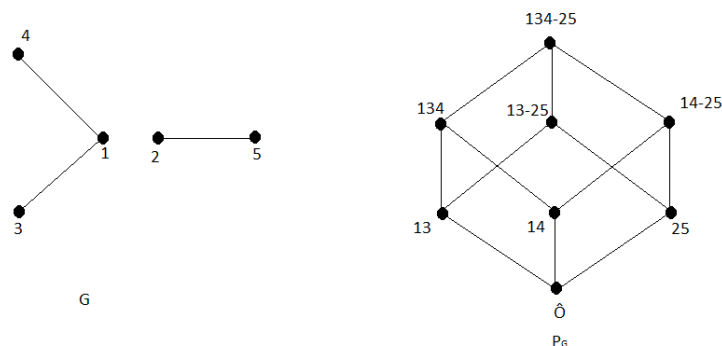
2. Các khái niệm liên quan

Gọi G là một đồ thị đơn vô hướng trên tập đỉnh $[n]$ và $E(G)$ là tập tất cả các cạnh trong G . Ta kí hiệu ij là một cạnh trong G có hai đỉnh là i và j . Gọi $V = K^n$ là không gian vector trên trường K với các tọa độ $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Định nghĩa 2.1. Phân bố đồ thị A_G trong một không gian vector V là phân bố siêu phẳng $\{x_i - x_j = 0 \mid ij \in E(G)\}$.

Trong poset giao của phân bố đồ thị A_G , ta cũng kí hiệu các siêu phẳng $x_i - x_j = 0$ bởi ij . Ta có hai cách để kí hiệu phần giao của các siêu phẳng. Nếu hai siêu phẳng là ij và kl , với $\{i, j\} \cap \{k, l\} = \emptyset$, thì không gian giao được kí hiệu bởi $ij - kj$. Trường hợp còn lại, ta giả sử $l = j$, thì không gian giao được kí hiệu bởi ijk . Một không gian con trong poset giao được kí hiệu bởi $A = A_1 - A_2 - \dots - A_r$, với $A_i, i = 1, 2, \dots, r$ là tập hợp các chỉ số của các tọa độ. Ta gọi $A_i, i = 1, 2, \dots, r$ là các khối của A , và các chỉ số của tọa độ là các chỉ số của A . Khi lấy phần giao của hai không gian con $H = H_1 - H_2 - \dots - H_p$ và $K = K_1 - K_2 - \dots - K_q$, với H_i và K_j là các khối của H và K . Ta có hai cách để kí hiệu các không gian giao của chúng. Nếu hai khối H_i của H và K_j của K có các chỉ số chung, thì ở không gian giao ta lấy hội của H_i và K_j như là hội của hai tập hợp. Trường hợp còn lại không gian giao được kí hiệu bởi $H_1 - H_2 - \dots - H_p - K_1 - K_2 - \dots - K_q$. Ta nói $K < H$ nếu mỗi khối K_j của K được chứa trong một khối H_i của H .

Ví dụ 2.2. Ta xét đồ thị G như ở Hình 1. Phân bố đồ thị A_G của G gồm các siêu phẳng $x_1 - x_3 = 0$, $x_1 - x_4 = 0$, và $x_2 - x_5 = 0$. Trong poset giao của A_G , ta kí hiệu siêu phẳng $x_1 - x_3 = 0$ bởi 13, $x_1 - x_4 = 0$ bởi 14, và $x_2 - x_5 = 0$ bởi 25. Poset giao P_G của A_G được thể hiện ở Hình 1.



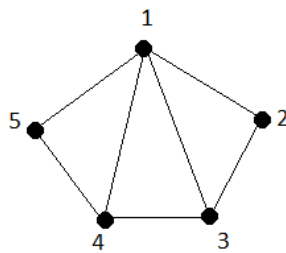
Hình 1.

Định nghĩa 2.3.

Một đồ thị đơn vô hướng G trên tập đỉnh $[n]$ được gọi là *đồ thị dây cung* nếu mỗi chu trình đơn từ bốn đỉnh trở lên của nó đều có một dây cung, nghĩa là có một cạnh không thuộc chu trình và nối hai đỉnh của chu trình.

Ví dụ 2.4.

- Đồ thị đầy K_n là một đồ thị dây cung.
- Đồ thị ở Hình 2 là một đồ thị dây cung.



Hình 2

Định lý 2.5. (Peter Orlik, & Hiroaki Terao, 1992; Richard P. Stanley, 2011)

Nếu A là một phân bố đồ thị, thì poset giao $L(A)$ là một dàn hình học.

Định nghĩa 2.6.

Một phần tử x của dàn hình học L là *modular* nếu với mọi phần tử $y \in L$ ta có

$$rk(x) + rk(y) = rk(x \wedge y) + rk(x \vee y),$$

với $rk(t)$ là hạng của một phần tử t nào đó trong L .

Định nghĩa 2.7.

Cho A là một phân bố siêu phẳng. Ta nói A là *siêu giải được* nếu poset giao $L(A)$ có một dây chuyền tối đại các phần tử modular

$$V = X_0 < X_1 < \dots < X_l = T,$$

với T là phần tử tối đại của poset $L(A)$.

Định lý 2.8. (Richard. P. Stanley, 1972; Stefan Papadima, & Alexander I. Suciu, 2000)

Cho A_G là phân bố đồ thị của đồ thị G . Khi đó A_G là siêu giải được khi và chỉ khi G là một đồ thị siêu giải được, nghĩa là G có một chuỗi các thành phần siêu giải được của các đồ thị con cảm sinh, $\emptyset = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_l = G$, thỏa mãn

a) Với mọi $1 \leq i \leq l$, tồn tại chỉ một đỉnh v_i trong $G_i \setminus G_{i-1}$.

b) Đồ thị con của G_i cảm sinh bởi v_i và các lân cận của nó trong G_i là một đồ thị đủ.

Hơn nữa, G có một chuỗi các thành phần siêu giải được khi và chỉ khi mọi chu trình đơn của đồ thị G có chiều dài lớn hơn hoặc bằng 3 đều có một dây cung, hay nói cách khác G là đồ thị dây cung.

Định nghĩa 2.9.

Một phép đánh dấu cạnh của một poset P là một ánh xạ $\lambda: E(P) \rightarrow \Lambda$ với $E(P)$ là tập hợp tất cả các cạnh của biểu đồ Hasse của poset P , và Λ là một tập được sắp (thường là tập số nguyên). Với mỗi cạnh $\{s, t\} \in E(P)$, ta kí hiệu $\lambda(s, t)$ thay cho $\lambda(\{s, t\})$. Với một phép đánh dấu cạnh λ , một dây chuyền tối đại $c = (x_0 \rightarrow x_1 \rightarrow \dots \rightarrow x_k)$ chiều dài k tương ứng với một chuỗi các giá trị $\lambda(c) = (\lambda(x_0, x_1), \lambda(x_1, x_2), \dots, \lambda(x_{k-1}, x_k))$. Ta nói c là một chuỗi tăng nếu $\lambda(x_0, x_1) < \lambda(x_1, x_2) < \dots < \lambda(x_{k-1}, x_k)$. Ta nói c là một chuỗi giảm nếu $\lambda(x_0, x_1) \geq \lambda(x_1, x_2) \geq \dots \geq \lambda(x_{k-1}, x_k)$. Một phép đánh dấu cạnh cho phép ta sắp thứ tự tất cả

các dây chuyền tối đại của bất kì một đoạn nào của poset P bởi thứ tự từ điển $<_L$. Ta nói $c <_L c'$ khi $\lambda(c) <_L \lambda(c')$. Trong đó *thứ tự từ điển* được định nghĩa như sau

$$(a_1, a_2, \dots, a_p) <_L (b_1, b_2, \dots, b_q)$$

nếu và chỉ nếu một trong hai điều sau được thỏa mãn:

- $a_i = b_i$ với mọi $i = 1, 2, \dots, p$ và $p < q$, hay
- $a_i \neq b_i$ với một chỉ số i nào đó, và ít nhất tại chỉ số đó $a_i < b_i$.

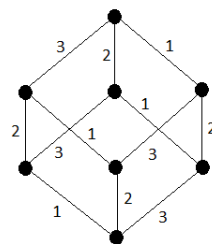
Định nghĩa 2.10.

Một phép đánh dấu cạnh được gọi là *EL-labeling* (edge lexicographic labeling) nếu với mỗi đoạn $[x, y]$ của poset P .

- Có duy nhất một dây chuyền tối đại tăng m trong $[x, y]$, và
- $m <_L m'$ với mọi dây chuyền tối đại m' khác trong $[x, y]$, với $<_L$ là thứ tự từ điển.

Một poset phân bậc P trên đó ta có thể thực hiện một phép đánh dấu EL-labeling thì được gọi là *EL-shellable*.

Ví dụ 2.11. Hình 3 cho ta một ví dụ về phép đánh dấu EL-labeling.



Hình 3

Định lý 2.12. (Ander Bjorner, & Michelle L. Wachs, 1983, 1996; Ander Bjorner, 1994)

Nếu trên poset bị chặn P ta thực hiện được một phép đánh dấu cạnh EL-labeling, thì phức thứ tự $\Delta(\bar{P})$ tương đương đồng luân với một nêp của các mặt cầu. Hơn nữa, số lượng các mặt cầu có số chiều i bằng với số các dây chuyền tối đại giảm có độ dài $i+2$ của P .

Cách chứng minh một poset bị chặn là EL-shellable, từ đó suy ra phần chính của nó tương đương đồng luân với một nêp các mặt cầu, bằng cách chỉ ra một phép đánh dấu cạnh EL-labeling trên poset đó, là một phần của phương pháp *lexicographic shellability*.

3. Phép đánh dấu cạnh

Trong phần này chúng ta chỉ ra một phương pháp đánh dấu cạnh của poset giao của phân bố đồ thị của một đồ thị dây cung G , và chứng minh nó thỏa mãn điều kiện EL-labeling.

Vì G là đồ thị dây cung, nên G có một chuỗi các thành phần giải được, nghĩa là có các đồ thị con $\emptyset = G_0 \subset G_1 \subset G_2 \subset \dots \subset G_w = G$ sao cho

- Với mỗi $1 \leq i \leq w$, tồn tại chỉ một đỉnh v_i trong $G_i \setminus G_{i-1}$.
- Đồ thị con của G_i cảm sinh bởi v_i và lân cận của nó trong G_i là đồ thị đủ.

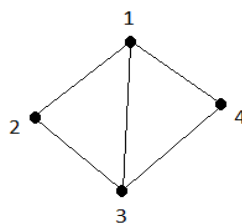
Với hai điều kiện trên, ta thấy rằng với mỗi $1 \leq i \leq w$, đồ thị G_i có thể được viết dưới dạng $v_1v_2 \dots v_t - \dots - u_1u_2 \dots u_r$ với $v_1v_2 \dots v_t, \dots, u_1u_2 \dots u_r$ là các thành phần liên thông. Hơn nữa $v_1v_2 \dots v_t, \dots, u_1u_2 \dots u_r$ đại diện cho các đồ thị con của G được cảm sinh bởi các đỉnh $v_1, v_2, \dots, v_t$ và $u_1, u_2, \dots, u_r$ tương ứng. Ta có thể đồng nhất mỗi đồ thị con G_i mà mỗi thành phần liên thông có ít nhất là hai đỉnh với một phần tử của poset giao P_G . Để thấy rằng, dãy chuyển các đồ thị con $\emptyset = G_0 \subset G_1 \subset \dots \subset G_w = G$ tương ứng với một dãy chuyển tối đại $C: \hat{0} = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_l = \hat{1}$ của poset giao P_G , với x_i có cùng dạng kí hiệu với một G_j nào đó, với $1 \leq i \leq l$. Chiều dài của dãy chuyển tối đại có thể nhỏ hơn hay bằng chiều dài của chuỗi các đồ thị con, bởi vì chúng ta loại bỏ những đồ thị mà có thành phần liên thông chỉ chứa một đỉnh. Ta đánh dấu các cạnh trong C như sau

$$\lambda(x_{i-1}, x_i) = i, \forall i \geq 1.$$

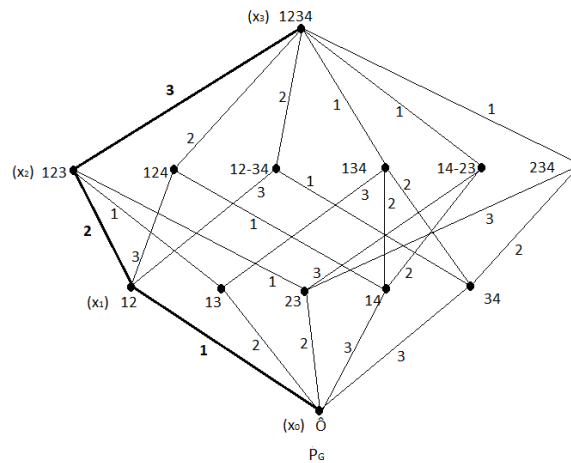
Ta sẽ đánh dấu toàn bộ các cạnh trong poset giao P_G bằng cách sử dụng cách đánh dấu cạnh trong C . Ta thực hiện như sau. Với mỗi phần tử $s \in P_G$, gọi A_s là tập hợp các siêu phẳng chứa s như là một không gian con. Giả sử x, y là hai phần tử trong P_G , và y phủ x . Ta đánh dấu cạnh $\{x, y\}$ bởi,

$$\lambda(x, y) = \min\{i : (A_y \setminus A_x) \cap (A_{x_i} \setminus A_{x_{i-1}}) \neq \emptyset\}.$$

Ví dụ 3.1. Cho đồ thị G như ở Hình 4. Khi đó các cạnh tương ứng với các siêu phẳng được kí hiệu bởi 12, 13, 23, 14, và 34. Ta có chuỗi các thành phần giải được của G tương ứng với một dãy chuyển tối đại $\hat{0} < 12 < 123 < 1234 = \hat{1}$. Poset giao P_G có các cạnh được đánh dấu như trong Hình 5.



Hình 4



Hình 5

Định lý 3.2. Phép đánh dấu cạnh λ là EL-labeling.

Chứng minh. Gọi X và Y là hai phần tử trong P_G sao cho $X < Y$. Đầu tiên, ta chứng minh rằng có duy nhất một dây chuyền tối đại tăng từ X vào Y .

Gọi C là dây chuyền tối đại trong đoạn $[X, Y]$ mà ta cần tìm. Giả sử rằng $X = X_0$. Chọn X_1 là phần tử phủ của X trong C nếu $\lambda(X_0, X_1) = \min\{\lambda(X_0, X') \mid X_0 < X' < Y, \text{ với } X' \text{ phủ } X_0\}$. Ta tiếp tục chọn X_2 cho phần tử phủ của X_1 nếu $\lambda(X_1, X_2) = \min\{\lambda(X_1, X') \mid X_1 < X' < Y, \text{ với } X' \text{ phủ } X_1\}$. Ta tìm các phần tử khác trong C một cách tương tự và chọn phần tử cuối cùng là Y .

Ta sẽ chứng minh rằng với mỗi phần tử của C ta có duy nhất một cách chọn. Giả sử rằng ở mức k của dây chuyền C , ta có nhiều hơn một cách chọn. Nghĩa là sẽ có hai phần tử phủ X_{k-1} mà ta có thể chọn trong C , gọi là X_{k_1} và X_{k_2} , thỏa mãn $\lambda(X_{k-1}, X_{k_1}) = \lambda(X_{k-1}, X_{k_2}) = j = \min\{\lambda(X_{k-1}, X') \mid X_{k-1} < X' < Y, \text{ với } X' \text{ phủ } X_{k-1}\}$. Gọi t, z là hai phần tử trong $A_{x_j} \setminus A_{x_{j-1}}$ sao cho $t \in (A_{x_{k_1}} \setminus A_{x_{k-1}}) \cap (A_{x_j} \setminus A_{x_{j-1}})$ và $z \in (A_{x_{k_2}} \setminus A_{x_{k-1}}) \cap (A_{x_j} \setminus A_{x_{j-1}})$. Gọi G_j là đồ thị tương ứng với x_j , G_{j-1} là đồ thị tương ứng với x_{j-1} . Ta thấy rằng $x_{j-1} \cap t = x_{j-1} \cap z = x_j$, nên tồn tại f là một đỉnh trong $G_j \setminus G_{j-1}$. Khi đó t và z là hai siêu phẳng được kí hiệu tương ứng bởi $g_1 f$ và $g_2 f$, và g_1, g_2 phải là các chỉ số nằm trong x_{j-1} . Bởi vì đồ thị cảm sinh bởi f và các lân cận của nó là đồ thị đủ, nên tồn tại cạnh $g_1 g_2$, và siêu phẳng tương ứng $g_1 g_2 \in A_{x_{j-1}}$. Hơn nữa, g_1, g_2 không phải đồng thời là các chỉ số trong X_{k-1} . Giả sử g_1, g_2 là các chỉ số nằm trong X_{k-1} . Khi đó ta có $X_{k_1} = X_{k-1} \cap g_1 f = X_{k-1} \cap g_2 f = X_{k_2}$, điều này mâu thuẫn. Vậy g_1, g_2 không cùng là các chỉ số của X_{k-1} . Do đó $X_{k-1} \cap g_1 g_2$ là một phần tử phủ khác của X_{k-1} , và do $g_1 g_2 \in A_{x_{j-1}}$ nên

$\lambda(X_{k-1}, X_{k-1} \cap g_1 g_2) \leq j-1 < j = \min\{\lambda(X_{k-1}, X') : X_{k-1} < X' < Y, \text{ với } X' \text{ phủ } X_{k-1}\}$. Mâu thuẫn.

Gọi a, b, c là ba phần tử trong C sao cho c phủ b , và b phủ a . Ta chứng minh rằng: $\lambda(a, b) < \lambda(b, c)$. Giả sử $\lambda(a, b) = \min\{i : (A_b \setminus A_a) \cap (A_{x_i} \setminus A_{x_{i-1}}) \neq \emptyset\} = \alpha$ và $\lambda(b, c) = \min\{i : (A_c \setminus A_b) \cap (A_{x_i} \setminus A_{x_{i-1}}) \neq \emptyset\} = \beta$. Gọi I là một siêu phẳng trong $(A_c \setminus A_b) \cap (A_{x_\beta} \setminus A_{x_{\beta-1}})$. Rõ ràng rằng $a \cap I$ là một phần tử phủ khác của a , và $\lambda(a, a \cap I) \leq \beta$. Do cách chọn b , ta thấy rằng $\lambda(b, c) = \beta \geq \lambda(a, a \cap I) > \lambda(a, b) = \alpha$. Vậy $\lambda(a, b) < \lambda(b, c)$.

Do cách chọn C , ta thấy C nhỏ hơn tất cả các dây chuyền tối đại khác trong đoạn $[X, Y]$ theo thứ tự từ điển. Vậy phép đánh dấu cạnh trên thỏa mãn điều kiện EL-labeling.

Bổ đề 3.3.

Với E là một dây chuyền tối đại trong poset giao của một phân bố đồ thị dây cung G . Khi đó phép đánh dấu cạnh ở trên cho ta các giá trị khác nhau ở mỗi cạnh trong E . Các giá trị đó thuộc về $[l]$, với l là chiều dài của poset giao.

Chứng minh. Gọi $\hat{0} = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_l = \hat{1}$ là một dây chuyền tối đại của poset giao của G . Ta chứng minh rằng các giá trị trên mỗi cạnh là khác nhau, và các giá trị đó nằm trong tập hợp $[l]$.

Giả sử rằng các cạnh $\{y_t, y_{t+1}\}$ và $\{y_z, y_{z+1}\}$ có cùng giá trị và $y_z > y_{t+1}$. Nghĩa là $A_{y_{t+1}} \setminus A_{y_t} \cap A_{x_{j+1}} \setminus A_{x_j} \neq \emptyset$ và $A_{y_{z+1}} \setminus A_{y_z} \cap A_{x_{j+1}} \setminus A_{x_j} \neq \emptyset$, với một j nào đó. Tồn tại các siêu phẳng $a, b \in A_{x_{j+1}} \setminus A_{x_j}$ sao cho $y_t \cap a = y_{t+1}$ và $y_z \cap b = y_{z+1}$. Vì $a, b \in A_{x_{j+1}} \setminus A_{x_j}$, $x_j \cap a = x_{j+1}$ và $x_j \cap b = x_{j+1}$. Do đó hai cạnh a, b có một đỉnh chung. Giả sử rằng $a = u_1 v$ và $b = u_2 v$. Do G là đồ thị siêu giải được, nên tồn tại cạnh $u_1 u_2$ và $u_1 u_2 \in A_{x_{k+1}} \setminus A_{x_k}$, với một k nào đó, và $k < j$. Hơn nữa, vì $y_z > y_{t+1}$, nên trong y_z chứa các chỉ số u_1, v . Suy ra $y_z \cap b = y_z \cap u_1 u_2$. Do đó $\lambda(y_z, y_{z+1}) < \lambda(y_t, y_{t+1})$. Mâu thuẫn. Vậy điều giả sử không đúng. Ta thấy phần còn lại của bổ đề là hiển nhiên.

4. Tính chất tôpô của poset giao

Trong mục trên, ta đã chứng minh được poset giao của phân bố đồ thị của một đồ thị dây cung thỏa mãn một phép đánh dấu cạnh EL-labeling, do đó, nó là EL-shellable. Theo Định lý 2.12, phần chính của poset này tương đương đồng luân với một nêp của các mặt cầu. Trong phần này, ta sẽ tìm số lượng các mặt cầu trong nêp bằng cách đếm các dây chuyền tối đại giảm trong poset.

Định lý 4.1. Số các dây chuyền tối đại giảm trong poset giao bằng

$$\prod_{i=1}^l |A_{x_i} \setminus A_{x_{i-1}}|$$

với l là chiều dài của poset, và x_i là các phần tử trong dãy chuyển tối đại các phần tử modular của poset giao.

Chứng minh. Gọi D là một dãy chuyển tối đại giảm trong poset giao. Phần tử đầu tiên của D phải là $y_0 = \hat{0}$. Phần tử tiếp theo y_1 phải là một siêu phẳng trong $A_{x_l} \setminus A_{x_{l-1}}$ bởi vì, $\lambda(y_0, y_1) = l$. Ta có $|A_{x_l} \setminus A_{x_{l-1}}|$ cách chọn y_1 . Giả sử rằng ta có $|A_{x_{l-k}} \setminus A_{x_{l-k-1}}|$ cách chọn cho phần tử y_{k+1} của D , và $\lambda(y_k, y_{k+1}) = l - k$, $k \geq 0$. Ta chứng minh rằng có $|A_{x_{l-k-1}} \setminus A_{x_{l-k-2}}|$ cách chọn phần tử y_{k+2} của D , và $\lambda(y_{k+1}, y_{k+2}) = l - k - 1$.

Ta chứng minh rằng một phần tử nằm ở vị trí $k + 2$ của D , (tức y_{k+2}), khi và chỉ khi $y_{k+2} = y_{k+1} \cap u$ với u nằm trong tập hợp $A_{x_{l-k-1}} \setminus A_{x_{l-k-2}}$.

Gọi z là một phần tử ở vị trí $k + 2$ của D mà ta có thể chọn. Ta chứng minh rằng, $z = y_{k+1} \cap u$, với $u \in A_{x_{l-k-1}} \setminus A_{x_{l-k-2}}$. Do z nằm ở vị trí $k + 2$ và $\lambda(y_k, y_{k+1}) = l - k$, nên ta có $\lambda(y_{k+1}, z) = l - k - 1$. Nếu $\lambda(y_{k+1}, z) > l - k - 1$ thì D không phải là một dãy giảm. Nếu $\lambda(y_{k+1}, z) < l - k - 1$ thì trong dãy chuyển tối đại giảm từ z đến $\hat{1}$ có một cạnh có giá trị là $l - k - 1$ (bởi Bổ đề 3.3), nên D không giảm. Ta có $\lambda(y_{k+1}, z) = \min\{i : A_z \setminus A_{y_{k+1}} \cap A_{x_i} \setminus A_{x_{i-1}} \neq \emptyset\} = l - k - 1$. Suy ra tồn tại $u \in A_{x_{l-k-1}} \setminus A_{x_{l-k-2}}$ sao cho $z = y_{k+1} \cap u$.

Ngược lại, giả sử rằng có một siêu phẳng $u \in A_{x_{l-k-1}} \setminus A_{x_{l-k-2}}$ sao cho $z = y_{k+1} \cap u$ và $\lambda(y_{k+1}, y_{k+1} \cap u) = \alpha < l - k - 1$. Nghĩa là, có một siêu phẳng $v \in A_{x_\alpha} \setminus A_{x_{\alpha-1}}$ sao cho $y_{k+1} \cap u = y_{k+1} \cap v$. Bởi bổ đề ở trên, tồn tại một cạnh $\{y_m, y_{m+1}\}$, $y_m > y_{k+1} \cap u$, có giá trị bằng $l - k - 1$. Nghĩa là có một siêu phẳng $u' \in A_{x_{l-k-1}} \setminus A_{x_{l-k-2}}$ sao cho $y_m \cap u' = y_{m+1}$. Giả sử $u = ef$ và $u' = eg$. Do G là đồ thị siêu giải được, ta thấy tồn tại cạnh fg và $fg \in A_{x_h} \setminus A_{x_{h-1}}$ với $h < l - k - 1$. Do đó, $y_m \cap u' = y_m \cap fg$ và $\lambda(y_m, y_{m+1}) < l - k - 1$. Mâu thuẫn.

Do đó ta có $|A_{x_{l-k-1}} \setminus A_{x_{l-k-2}}|$ cách chọn các phần tử y_{k+2} của D , và $\lambda(y_{k+1}, y_{k+2}) = l - k - 1$. Suy ra số dãy chuyển tối đại giảm trong poset giao là $\prod_{i=1}^l |A_{x_i} \setminus A_{x_{i-1}}|$.

Hệ quả 4.2.

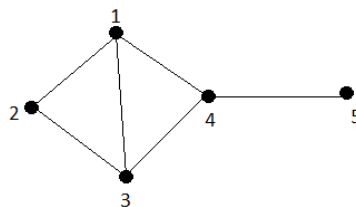
Phần chính của poset giao của phân bố đồ thị của đồ thị dây cung tương đương đồng luân với một nêp của

$$\prod_{i=1}^l |A_{x_i} \setminus A_{x_{i-1}}|$$

các mặt cầu có số chiều $n - c(G) - 2$ với $c(G)$ là số các thành phần liên thông của G .

Chứng minh. Theo Định lí 4.1 ta dễ dàng thấy.

Ví dụ 4.3. Cho G là đồ thị như ở Hình 6



Hình 6

Ta có một chuỗi các thành phần giải được như sau: $\emptyset < \{1\} < \{1,2\} < \{1,2,3\} < \{1,2,3,4\} < \{1,2,3,4,5\}$ với mỗi tập các đỉnh chỉ ra một đồ thị con cảm sinh của G được sinh ra bởi tập đỉnh đó. Chuỗi này tương ứng với dây chuyền tối đại các phần tử modular $0 < 12 < 123 < 1234 < 12345 = 1$ của poset giao. Ta có thể thấy rằng $|A_{12} \setminus A_0| = 1$, $|A_{123} \setminus A_{12}| = 2$, $|A_{1234} \setminus A_{123}| = 2$ và $|A_{12345} \setminus A_{1234}| = 1$. Bởi Định lí 4.1 ta thấy poset giao có $1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ dây chuyền tối đại giảm. Suy ra phần chính của poset giao P_G tương đương đồng luân với một nêp của 4 mặt cầu có số chiều bằng 2.

Ví dụ 4.4. Cho G là đồ thị đủ K_n . Ta có dây chuyền tối đại các phần tử modular tương ứng trong poset giao P_G là $0 < 12 < 123 < \dots < 123\dots n-1 < 123\dots n = 1$. Ta dễ dàng thấy rằng $|A_{12} \setminus A_0| = 1$, $|A_{123} \setminus A_{12}| = 2, \dots, |A_{123\dots n} \setminus A_{123\dots n-1}| = n-1$. Suy ra phần chính của P_G tương đương đồng luân với một nêp của $1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n-1 = (n-1)!$ mặt cầu có số chiều $n-3$.

❖ **Tuyên bố về quyền lợi:** Tác giả xác nhận hoàn toàn không có xung đột về quyền lợi.

❖ **Lời cảm ơn:** Nghiên cứu được tài trợ bởi Trường Đại học Khoa học Tự nhiên, ĐHQG TPHCM trong khuôn khổ Đề tài mã số T2020-02.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Anders Bjorner (1980). Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 260(1), 159-183.
- Ander Bjorner (1994). Subspace arrangements. *First European Congress of Mathematics*, 321-370.
- Ander Bjorner, & Michelle L. Wachs (1983). On lexicographically shellable posets. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277(1), 323-341.
- Ander Bjorner, & Michelle L. Wachs (1996). Shellable nonpure complexes and posets. I. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 348(4), 1299-1327.
- Curtis Greene, & Thomas Zaslavsky (1993). On the interpretation of Whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non-Radon partitions, and orientations of graphs. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 280(1), 97-126.

- Dmitry Kozlov (2008). *Combinatorial algebraic topology*, volume 21 of *Algorithms and Computation in Mathematics*. Springer, Berlin.
- Nguyen, A. T., & Sangwook Kim (2014). *Graphical arrangements of compressed graphs*. *Honnam Mathematical J.* 36, 1, 85-102.
- Peter Orlik, & Hiroaki Terao (1992). *Arrangements of hyperplanes*, volume 300 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Science]*. Springer-Verlag, Berlin.
- Richard. P. Stanley (1972). *Supersolvable lattices*, *Algebra Universalis*, 2, 197-217.
- Richard. P. Stanley (2007). An introduction to hyperplane arrangements, In *Geometric Combinatorics*, volume 13 of *IAS/ Park City Math. Ser.*, 389-496. *Amer. Math. Soc.*, Providence, RI.
- Richard P. Stanley (2011). *Enumerative Combinatorics, vol 1*, second edition *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press.
- Stefan Papadima, & Alexander I. Suciu (2000). *Higher Homotopy Groups of Complements of complex hyperplane arrangements*, *Mathematics Subject Classification*, Primary 52C35, 55Q52, Secondary 14M12, 32S22.

TOPOLOGICAL PROPERTIES OF GRAPHICAL ARRANGEMENTS OF CHORDAL GRAPHS

Nguyen Anh Thi

University of Science, Vietnam National University Ho Chi Minh City, Vietnam

Corresponding author: Nguyen Anh Thi – Email: nathi@hcmus.edu.vn

Received: September 17, 2020; Revised: December 24, 2020; Accepted: December 28, 2020

ABSTRACT

We use the lexicographic shellability method to show that if G is a chordal graph, then the proper part of the intersection poset of the corresponding graphical arrangement A_G has the homotopy type of a wedge of spheres. Furthermore, the number of spheres in the wedge is also indicated based on the characteristics of the graph G . Since a chordal graph is a supersolvable graph, it has a supersolvable composition series of induced subgraphs. Each subgraph is corresponding to a modular element in the intersection poset of A_G . We can find the number of decreasing maximal chains based on modular elements, or induced subgraphs in the composition series. The number of decreasing maximal chains is equal to the number of spheres in the wedge. The study of graphical arrangements of chordal graphs is an extension of other studies of graphical arrangements of complete graphs K_n , or the Braid arrangement.

Keywords: chordal graphs; graphical arrangements; lexicographic shellability