

TỈ SỐ KÉP CỦA BỐN ĐƯỜNG THẲNG LOBACHEVSKY ĐỒNG QUY TRONG HÌNH HỌC VỚI MÔ HÌNH NỬA MẶT PHẲNG POINCARÉ

Lê Hào*

Trường Đại học Phú Yên

Ngày nhận bài: 22/08/2021; Ngày nhận đăng: 01/10/2021

Tóm tắt

Trong bài báo này chúng tôi xác lập công thức liên hệ giữa tỉ số kép của bốn đường thẳng Lobachevsky đồng quy và tỉ số kép của bốn điểm. Kết quả chính của bài báo là **Định lý 2.1** và **Hệ quả 2.3**.

Từ khóa: Tỉ số kép, Các đường đồng quy, Đường thẳng Lobachevsky, Mô hình nửa mặt phẳng Poincaré.

1. Giới thiệu

Trong mặt phẳng $\mathbb{E}^2$ với hệ tọa độ trục chuẩn Oxy ta xét nửa mặt phẳng nằm phía trên trục Ox :

$$H^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > 0\} = \{z \in \mathbb{C} / \text{Im} z > 0\}.$$

Tạo thành mô hình nửa mặt phẳng Poincaré của Hình học Lobachevsky.

Trong bài báo trước đây chúng tôi đã đề cập đến khái niệm độ dài đại số Lobachevsky $L(\overline{AB})$ của cung đoạn định hướng nối từ A đến B trên một trục (Lê Hào, 2018)

-Nếu trục là trục cong với cực âm I và cực dương K thì:

$$L(\overline{AB}) = \ln \left(\frac{A - K}{B - K} : \frac{A - I}{B - I} \right)$$

-Nếu trục là trục thẳng vuông góc với Ox tại K thì:

$$L(\overline{AB}) = \ln \left(\frac{A - K}{B - K} \right)$$

Chúng tôi đề cập các giá trị sau:

$$\begin{aligned} sh(AB) &= \frac{e^{\rho(AB)} - e^{-\rho(AB)}}{2} \\ sh(\overline{AB}) &= \frac{e^{L(\overline{AB})} - e^{-L(\overline{AB})}}{2} \end{aligned}$$

Trong đó $\rho(AB)$ là độ dài Lobachevsky của cung đoạn AB (Nguyễn Bá Khiển, 2011), rõ ràng $\rho(AB) = |L(\overline{AB})|$.

Định nghĩa 1.1. Cho bốn điểm A, B, C, D phân biệt và cùng nằm trên một đường thẳng Lob. Tỉ số kép của của A, B, C, D (theo thứ tự) là một số; kí hiệu $(ABCD)$; xác định như sau:

$$(ABCD) = \frac{sh(\overline{CA})}{sh(\overline{CB})} : \frac{sh(\overline{DA})}{sh(\overline{DB})}$$

Chúng ta dễ dàng nhận thấy những tính chất tương tự như tỉ số kép trong hình học Euclide.

* Email: lehaodhpy@gmail.com

Tiếp theo chúng ta sẽ vận dụng khái niệm nêu trên để khảo sát mối liên hệ giữa tỉ số kép của bốn đường thẳng Lobachevsky đồng quy, tỉ số kép của những giao điểm trên cát tuyến và tỉ số kép của các tâm.

2. Kết quả chính

Nếu đường thẳng Lob (l) có thể hiện là nửa đường tròn tâm H , ta nói điểm H là tâm của (l). Nếu đường thẳng Lob (l) có thể hiện là nửa đường thẳng vuông góc trục Ox , ta nói (l) có tâm H vô tận ($H \equiv \infty$).

Định lý 2.1. Cho bốn đường thẳng Lob phân biệt (a), (b), (c), (d) cố định, đồng quy tại S . Xét một cát tuyến bất kì (Δ) là đường thẳng Lob không qua S và cắt (a), (b), (c), (d) tương ứng tại A, B, C, D . Khi đó tỉ số kép ($ABCD$) là hằng số không phụ thuộc vào (Δ), hơn nữa:

$$(ABCD) = (I_1 I_2 I_3 I_4)$$

Trong đó I_1, I_2, I_3, I_4 tương ứng là tâm của (a), (b), (c), (d).

Chứng minh.

1. Xét các đường thẳng Lob (a), (b), (c), (d) đồng quy tại $S(p, q)$ lần lượt tương ứng với các nửa đường tròn sau:

$$(L1) \quad x^2 + y^2 - 2a_1x = p^2 + q^2 - 2a_1p$$

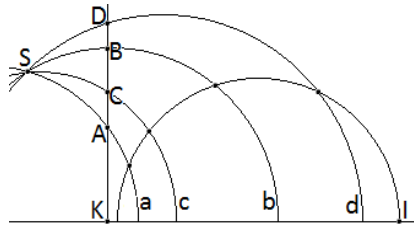
$$(L2) \quad x^2 + y^2 - 2a_2x = p^2 + q^2 - 2a_2p$$

$$(L3) \quad x^2 + y^2 - 2a_3x = p^2 + q^2 - 2a_3p$$

$$(L4) \quad x^2 + y^2 - 2a_4x = p^2 + q^2 - 2a_4p$$

Lần lượt có tâm $I_1(a_1, 0)$, $I_2(a_2, 0)$, $I_3(a_3, 0)$, $I_4(a_4, 0)$.

- Trước tiên ta xét (Δ) là trục thẳng, vuông góc và cắt Ox tại $K(m, 0)$ với $m \neq p$:



Ta có:

$$A \left(m, \sqrt{p^2 + q^2 - m^2 + 2a_1(m - p)} \right)$$

$$B \left(m, \sqrt{p^2 + q^2 - m^2 + 2a_2(m - p)} \right)$$

$$C \left(m, \sqrt{p^2 + q^2 - m^2 + 2a_3(m - p)} \right)$$

$$D \left(m, \sqrt{p^2 + q^2 - m^2 + 2a_4(m - p)} \right)$$

Suy ra:

$$L(\overline{CA}) = \ln \left(\frac{C - K}{A - K} \right) = \ln \left(\frac{\sqrt{p^2 + q^2 - m^2 + 2a_3(m - p)}}{\sqrt{p^2 + q^2 - m^2 + 2a_1(m - p)}} \right)$$

$$\Rightarrow e^{L(\overline{CA})} = \frac{\sqrt{p^2 + q^2 - m^2 + 2a_3(m - p)}}{\sqrt{p^2 + q^2 - m^2 + 2a_1(m - p)}}$$

$$\Rightarrow sh(\overline{CA}) = \frac{(m-p)(a_3-a_1)}{CK \cdot AK}$$

Tương tự ta có:

$$sh(\overline{CB}) = \frac{(m-p)(a_3-a_2)}{CK \cdot BK}$$

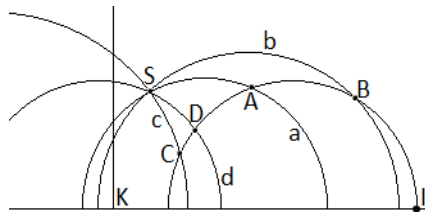
$$sh(\overline{DA}) = \frac{(m-p)(a_4-a_1)}{DK \cdot AK}$$

$$sh(\overline{DB}) = \frac{(m-p)(a_4-a_2)}{DK \cdot BK}$$

Suy ra:

$$(ABCD) = \frac{sh(\overline{CA})}{sh(\overline{CB})} : \frac{sh(\overline{DA})}{sh(\overline{DB})} = \frac{a_3-a_1}{a_3-a_2} : \frac{a_4-a_1}{a_4-a_2} = (I_1 I_2 I_3 I_4)$$

- Trường hợp (Δ) là trục cong có cực âm I :



Không ảnh hưởng kết quả, ta có thể xem gốc trục Ox là $O \equiv I$. Dùng phép nghịch đảo tâm O tỉ số $k > 0$ biến (Δ) thành trục thẳng (Δ') vuông góc với Ox ; biến các đường thẳng Lob (a) , (b) , (c) , (d) thành các đường thẳng Lob (a') , (b') , (c') , (d') đồng quy và cắt (Δ') lần lượt tại A' , B' , C' , D' .

Phép nghịch đảo nói trên có phương trình:

$$\begin{cases} x' = \frac{kx}{x^2 + y^2} \\ y' = \frac{ky}{x^2 + y^2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{kx'}{x'^2 + y'^2} \\ y = \frac{ky'}{x'^2 + y'^2} \end{cases}$$

Từ đó suy ra các đường thẳng Lob (a') , (b') , (c') , (d') tương ứng với các nửa đường tròn có tâm $(a'_i, 0)$, với:

$$a'_i = -\frac{ka_i}{p^2 + q^2 - 2a_i p} \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

Suy ra:

$$(ABCD) = (A'B'C'D') = \frac{a'_3 - a'_1}{a'_3 - a'_2} : \frac{a'_4 - a'_1}{a'_4 - a'_2} = \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2} : \frac{a_4 - a_1}{a_4 - a_2} = (I_1 I_2 I_3 I_4)$$

2. Xét các đường thẳng Lob $(a), (b), (c), (d)$ đồng quy tại $S(p, q)$; lần lượt tương ứng với các nửa đường tròn và nửa đường thẳng, chẳng hạn:

$$(L1) \quad x^2 + y^2 - 2a_1x = p^2 + q^2 - 2a_1p$$

$$(L2) \quad x^2 + y^2 - 2a_2x = p^2 + q^2 - 2a_2p$$

$$(L3) \quad x^2 + y^2 - 2a_3x = p^2 + q^2 - 2a_3p$$

$$(L4) \quad x = p$$

Bằng phương pháp như trên ta có:

$$(ABCD) = \frac{a_3 - a_1}{a_3 - a_2} = (I_3 I_1 I_2) = (I_1 I_2 I_3 \infty) = (I_1 I_2 I_3 I_4) \blacksquare$$

Định nghĩa 2.2. Cho bốn đường thẳng Lob phân biệt $(a), (b), (c), (d)$ đồng quy. Tỉ số kép của $(a), (b), (c), (d)$ là một số; kí hiệu là $(abcd)$; xác định như sau:

$$(abcd) = (I_1 I_2 I_3 I_4)$$

Trong đó I_1, I_2, I_3, I_4 tương ứng là tâm của $(a), (b), (c), (d)$.

Hệ quả 2.3. Cho bốn đường thẳng Lob phân biệt $(a), (b), (c), (d)$ đồng quy tại S ; lần lượt có tâm I_1, I_2, I_3, I_4 . Khi đó:

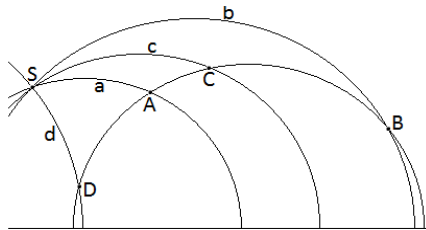
$$(abcd) = (I_1 I_2 I_3 I_4) = (ABCD)$$

Với A, B, C, D tương ứng là giao điểm giữa cát tuyến bất kì không qua S với $(a), (b), (c), (d)$.

Ví dụ. Cho bốn đường thẳng Lob $(a), (b), (c), (d)$ đồng quy. Trong đó (b) có thể hiện là nửa đường thẳng (có tâm $I_2 \equiv \infty$); $(a), (c), (d)$ tương ứng có tâm $I_1(-2, 0), I_3(3, 0), I_4(8, 0)$. Ta tính tỉ số kép $(abcd)$:

$$(abcd) = (I_1 I_2 I_3 I_4) = (I_3 I_4 I_1 I_2) = (I_3 I_4 I_1 \infty) = (I_1 I_3 I_4) = \frac{a_1 - a_3}{a_1 - a_4} = \frac{-2 - 3}{-2 - 8} = \frac{1}{2} \blacksquare$$

Hệ quả 2.4. Cho hai đường thẳng Lob $(a), (b)$ bất kì cắt nhau tại S . Xét các đường thẳng Lob $(c), (d)$ qua S ; là phân giác của các góc tạo bởi $(a), (b)$. Khi đó: $(abcd) = -1$.



Chứng minh. Xét một đường thẳng Lob (Δ) không qua S ; cắt $(a), (b), (c), (d)$ tương ứng tại A, B, C, D . Giả sử C nằm trên cung đoạn AB và D nằm ngoài cung đoạn đó.

Áp dụng **Định lý hàm số sin hyperbolic** (Nguyễn Thị Liên & Nguyễn Bá Khiển, 2011) cho các tam giác Lobachevsky SCA, SCB với $\angle CSA = \angle CSB = \alpha$, $\angle SCA = \theta$ ta có:

$$\begin{aligned} \frac{\text{sh}(CA)}{\sin \alpha} &= \frac{\text{sh}(SA)}{\sin \theta} \quad \text{và} \quad \frac{\text{sh}(CB)}{\sin \alpha} = \frac{\text{sh}(SB)}{\sin \theta} \\ \Rightarrow \frac{\text{sh}(\overline{CA})}{\text{sh}(\overline{CB})} &= -\frac{\text{sh}(CA)}{\text{sh}(CB)} = -\frac{\text{sh}(SA)}{\text{sh}(SB)} \quad (1) \end{aligned}$$

Áp dụng **Định lý hàm số sin hyperbolic** cho các tam giác Lobachevsky SDA, SDB ta có:

$$\frac{sh(\overline{DA})}{sh(\overline{DB})} = \frac{sh(DA)}{sh(DB)} = \frac{sh(SA)}{sh(SB)} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) và áp dụng **Định lý 2.1** ta có: $(abcd) = (ABCD) = -1$ ■

3. Kết luận

Định lý 2.1 và **Hệ quả 2.3** đã thể hiện mối liên hệ giữa tỉ số kép của bốn đường thẳng Lobachevsky đồng quy, tỉ số kép của những giao điểm trên cát tuyến và tỉ số kép của các tâm □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Lê Hào (2018). *Độ dài đại số Lobachevsky trong hình học với mô hình nửa mặt phẳng Poincaré, một số áp dụng*. Tạp chí Khoa học, Đại học Phú Yên, 01-06.
- Lê Hào (2020). *Định lý về các điểm thẳng hàng trong hình học với mô hình nửa mặt phẳng Poincaré*. Tạp chí Khoa học, Đại học Phú Yên, 11-15.
- Nguyễn Thị Liên (2011). *Hình học trên nửa mặt phẳng Poincaré*. Luận văn Thạc sĩ - Đại học Vinh, 12-38.
- Nguyễn Bá Khiển (2011). *Một số vấn đề của hình học Hyperbolic n chiều*. Luận văn Thạc sĩ – Đại học Vinh, 15-34.
- Nguyễn Thị Xuyên (2008). *Một số vấn đề về hình học phi Euclide*. Đại học An Giang, 35-44.
- Phan Thị Ngọc (2007). *Nửa phẳng Poincaré và hình học Hyperbolic*. Luận văn Thạc sĩ - Đại học Vinh, 25-45.
- Royster, C. (2002). *Non Euclidean geometry*. Course Spring, 34-90.
- Parker, H. (1989). *Non Euclidean geometry*. Boston USA, 20-74.

CROSS RATIO OF FOUR CONCURRENT LOBACHEVSKIAN LINES IN GEOMETRY WITH THE POINCARÉ HALF - PLANE MODEL

Le Hao

Phu yen University

Email: lehaodhpy@gmail.com

Received: August 22, 2021; Accepted: October 01, 2021

Abstract

*In this paper, we establish the relationships between the Cross ratio of four concurrent Lobachevskian lines and the Cross ratio of four points. The main findings of the paper are **Theorem 2.1** and **Consequence 2.3**.*

Keywords: *Cross ratio, Concurrent lines, Lobachevskian line, Poincaré half - plane model.*