

KHAI TRIỂN TIỆM CẬN NGHIỆM YẾU CHO MỘT PHƯƠNG TRÌNH SÓNG PHI TUYẾN ĐÀN HỒI NHÓT CHỨA SỐ HẠNG BALAKRISHNAN-TAYLOR

Bùi Đức Nam^{1*}, Đoàn Thị Như Quỳnh¹, Lý Ánh Dương²

¹Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm TP.HCM

²Trường Đại học FPT Thành phố Hồ Chí Minh

*Email: nambd@hufi.edu.vn

Ngày nhận bài: 15/6/2022; Ngày chấp nhận đăng: 15/7/2022

TÓM TẮT

Bài báo này đề cập đến bài toán Dirichlet cho một phương trình sóng phi tuyến chứa các số hạng đàn hồi nhót và Balakrishnan-Taylor trong miền một chiều. Sử dụng phương pháp xấp xỉ tuyến tính kết hợp với phương pháp Faedo-Galerkin và phương pháp compact, sự tồn tại duy nhất nghiệm yếu địa phương trong một không gian hàm thích hợp được thiết lập. Ngoài ra, một khai triển tiệm cận của nghiệm yếu theo một tham số bé ε đến cấp 2 cũng thu được cho bài toán tương ứng với số hạng nguồn và số hạng Balakrishnan-Taylor có chứa tham số ε .

Từ khóa: Phương trình sóng phi tuyến, Balakrishnan-Taylor, đàn hồi nhót, phương pháp Faedo-Galerkin, tồn tại nghiệm địa phương, khai triển tiệm cận.

1. MỞ ĐẦU

Trong bài báo này, nhóm tác giả bàn luận đến một bài toán Dirichlet cho phương trình sóng phi tuyến chứa các số hạng đàn hồi nhót và Balakrishnan-Taylor như sau

$$\begin{cases} u_{tt} - \lambda u_{xxt} - \mu(t, \langle u_x(t), u_{xt}(t) \rangle) u_{xx} + \int_0^t g(t-s) u_{xx}(s) ds \\ \quad = f(x, t, u), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \quad (1)$$

trong đó $\lambda > 0$ là một hằng số, $f, \mu, g, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ là các hàm cho trước thoả mãn các điều kiện mà chúng ta sẽ chỉ ra sau. Trong (1), số hạng phi địa phương $\langle u_x(t), u_{xt}(t) \rangle = \int_0^1 u_x(x, t) u_{xt}(x, t) dx$ chứa trong hàm phi tuyến $\mu(t, \langle u_x(t), u_{xt}(t) \rangle)$ được các tác giả A.V. Balakrishnan và L.W. Taylor nghiên cứu lần đầu tiên vào năm 1989 (xem [1]).

Chúng ta biết rằng, lý thuyết về các bài toán biên cho phương trình đạo hàm riêng là một trong những lĩnh vực quan trọng của toán lý thuyết và áp dụng. Các bài toán này xuất hiện rất nhiều trong vật lý, cơ học, sinh học, hoá học, ... và đã được nghiên cứu một cách rộng rãi bởi nhiều nhà toán học. Quá trình tìm kiếm lời giải cho các bài toán này một mặt góp phần thúc đẩy sự phát triển các ý tưởng toán học trong nhiều lĩnh vực khác nhau của khoa học kỹ thuật và đời sống, mặt khác góp phần phát triển nhiều kết quả lý thuyết của toán học. Nghiên cứu sự tồn tại nghiệm và các tính chất nghiệm của phương trình sóng phi tuyến là một trong những

chủ đề đã và đang được quan tâm nghiên cứu sâu rộng bởi nhiều nhà khoa học khác nhau. Chẳng hạn, một trong những kết quả cổ điển nhất được nghiên cứu bởi D'Alembert vào năm 1747, xuất phát từ việc nghiên cứu các dao động bé của một sợi dây đàn hồi với hai đầu cố định, tác giả đã thiết lập mô hình toán học như sau

$$u_{tt} = c^2 u_{xx},$$

trong đó c^2 là một hằng số dương, $u(x, t)$ là độ lệch của sợi dây so với vị trí cân bằng tại điểm x và ở thời điểm t . Một phương trình khác dưới đây tổng quát hơn đã được thiết lập bởi Kirchhoff vào năm 1876 (xem [6])

$$\rho h u_{tt} = \left(P_0 + \frac{Eh}{2L} \int_0^L u_x^2(y, t) dy \right) u_{xx},$$

trong đó $u(x, t)$ là độ lệch của sợi dây so với vị trí cân bằng, L là chiều dài sợi dây, h diện tích thiết diện, E là module Young của vật liệu cấu tạo sợi dây, ρ là khối lượng riêng, và P_0 là lực căng ban đầu. Phương trình này là nói rộng của phương trình sóng cổ điển D'Alembert mà có xem xét đến ảnh hưởng của sự biến đổi chiều dài của sợi dây trong quá trình dao động. Năm 1945, khi mô tả dao động của một sợi dây đàn hồi có kể đến lực căng có thay đổi nhỏ, Carrier [6] thiết lập phương trình dạng

$$u_{tt} - \left(P_0 + P_1 \int_0^L u^2(y, t) dy \right) u_{xx} = 0.$$

Tiếp nối các kết quả cổ điển trên, cho đến nay các bài toán liên quan đến phương trình sóng phi tuyến liên kết với các điều kiện biên và điều kiện đầu khác nhau vẫn được nghiên cứu rất rộng rãi bởi nhiều nhà toán học khác nhau. Các bài toán biên này xuất hiện trong các mô hình mô tả các hiện tượng trong cơ học, vật lý như: mô tả dao động của một vật đàn hồi với các ràng buộc phi tuyến ở bề mặt và tại biên, hoặc mô tả sự va chạm của một vật rắn và một thanh đàn nhớt tựa trên một nền đàn hồi nhớt, hoặc mô tả sự lan truyền của sóng điện từ cao tần số trong môi trường điện môi phi tuyến.

Đối với phương trình sóng chứa số hạng tắt dần Balakrishnan-Taylor $\langle \nabla u(t), \nabla u_t(t) \rangle$, phương trình gốc của nó ban đầu được đề nghị bởi Balakrishnan và Taylor vào năm 1989 [1]. Họ đã thiết lập một mô hình mới cho các cấu trúc bay với giảm xóc phi tuyến và phi địa phương trong trường hợp một chiều

$$\rho u_{tt} + E I u_{xxxx} - c u_{xxt} - \left[H + \frac{EA}{2L} \int_0^L |u_x|^2 dx + \tau \left| \int_0^L u_x u_{xt} dx \right|^{2(N+\eta)} \int_0^L u_x u_{xt} dx \right] u_{xx} = 0, \quad (2)$$

với $u = u(x, t)$ là độ võng ngang của thanh có chiều dài $2L$ khi ở vị trí cân bằng, $\rho > 0$ là khối lượng riêng, E là module Young, I là mômen quán tính mặt cắt ngang, H là lực dọc theo trục (lực kéo hoặc độ nén), A là diện tích mặt cắt ngang, $c > 0$ là hệ số giảm chấn nhớt, $\tau > 0$ là hệ số tắt dần Balakrishnan-Taylor, $0 < \tau < 1, 0 \leq \eta < \frac{1}{2}$ và $N \in \mathbb{N}$. Phương trình (2)

cũng liên quan đến phương trình dao động của bản và bài toán lan tỏa được Bass và Zes nghiên cứu trong [2]. Sau đó việc mở rộng mô hình toán của nó được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu [3, 4, 8, 11-15, 17, 23, 26-29] và một số tài liệu trong đó.

Năm 2010, Zarai và Tatar [31] đã nghiên cứu sự tồn tại nghiệm toàn cục và tắt dần đa thức của bài toán sau

$$\begin{cases} u_{tt} - \left(\xi_0 + \xi_1 \|\nabla u(t)\|^2 + \sigma \langle \nabla u(t), \nabla u_t(t) \rangle \right) \Delta u + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds \\ \quad = |u|^p u, \quad (x, t) \in \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x), \quad x \in \Omega, \\ u(x, t) = 0, \quad (x, t) \in \Gamma \times (0, +\infty). \end{cases} \quad (3)$$

trong đó Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, ($N \geq 2$) có biên Γ đủ trơn, và $\sigma, \xi_0, \xi_1 > 0$, $p \geq 1$ là các hằng số, g, u_0, u_1 là các hàm cho trước. Ở đây, tính tắt dần đa thức của nghiệm được nghiên cứu liên hệ với hàm g thỏa điều kiện $g'(t) \leq -\xi \left(g(t) \right)^{1+\frac{1}{p}}$, với ξ là hằng số dương. Năm 2011, trong [28], các tác giả này cũng nghiên cứu được tính tắt dần mũ của nghiệm yếu bài toán (3) ứng với điều kiện $g'(t) \leq -\xi g(t)$, $\xi > 0$. Sau đó, Mu và Ma [23] mở rộng các kết quả này bằng việc chứng minh rằng nếu hàm g thỏa điều kiện $g'(t) \leq -\xi(t)g(t)$ với $\xi(t)$ là hàm dương và không tăng thì năng lượng tắt dần tổng quát.

Năm 2020, Tavares và các cộng sự [29], đã xem xét phương trình với tắt dần Balakrishnan-Taylor và ma sát như sau

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \left[\beta + \gamma \|\nabla u\|_2^2 + \delta |\Phi(u, u_t)|^{q-2} \Phi(u, u_t) \right] \Delta u + \kappa u_t + f(u) = h, \quad (4)$$

với $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+$ trong đó $\Phi(u, u_t) = \int_{\Omega} \nabla u(x, t) \nabla u_t(x, t) dx$ và Ω là một miền bị chặn trong $\mathbb{R}^N$, ($N \geq 2$) có biên đủ trơn liên kết với điều kiện biên Dirichlet-Newman $u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial n}(x, t) = 0$ trong $\Gamma \times (0, +\infty)$. Bằng cách sử dụng C_0 - nửa nhóm, các tác giả đã nghiên cứu tính đặt chỉnh và sự tác động theo thời gian lớn đối với nghiệm bài toán.

Trường hợp bài toán một chiều mà số hạng Balakrishnan-Taylor xuất hiện trong hàm phi tuyến μ và nguồn f có dạng tổng quát hơn, năm 2020, Ngọc và các cộng sự [24] đã khảo sát bài toán sau

$$\begin{cases} u_{tt} - \lambda u_{xxt} - \mu \left(t, \langle u_x(t), u_{xt}(t) \rangle, \|u(t)\|^2, \|u_x(t)\|^2 \right) u_{xx} \\ \quad = f(x, t, u, u_x, u_t, \langle u_x(t), u_{xt}(t) \rangle, \|u(t)\|^2, \|u_x(t)\|^2), \quad 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), \quad u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x), \end{cases} \quad (5)$$

trong đó $\lambda > 0$ là một hằng số, các hàm $\tilde{u}_0, \tilde{u}_1, f, \mu$ cho trước. Bằng cách sử dụng phương pháp xấp xỉ tuyến tính kết hợp với phương pháp xấp xỉ Faedo-Galerkin và phương pháp compact yếu, các tác giả đã chứng minh bài toán có duy nhất nghiệm yếu địa phương. Ngoài ra, khi xem xét bài toán (5) ứng với $\mu = B\left(\|u_x(t)\|^2\right) + \sigma\left(\langle u_x(t), u_{xt}(t) \rangle\right)$ và hàm $f = -\lambda_1 u_t + f(u) + F(x, t)$ cùng với một số điều kiện phù hợp, tính tắt dần của nghiệm với tốc độ hàm mũ khi thời gian đủ lớn được thành lập bằng phương pháp phiếm hàm Lyapunov.

Một vấn đề khác cũng đáng quan tâm là khai triển tiệm cận của nghiệm bài toán nhiễu theo một tham số bé [18-21, 25, 30]. Giả sử nghiệm của bài toán biên phi tuyến (P_ε) nào đó phụ thuộc vào một tham số bé $\varepsilon, |\varepsilon| \leq 1$, là một hàm số theo ba biến (ε, x, t) :

$$u = u_\varepsilon(x, t) = u(\varepsilon, x, t), \quad (x, t) \in Q \subset \mathbb{R}^2, \quad |\varepsilon| \leq 1.$$

Giả sử rằng, với $(x, t) \in Q$ cố định, ta có thể khai triển Maclaurin hàm $\varepsilon \mapsto u(\varepsilon, x, t)$ đến cấp $N+1$ như sau

$$u(\varepsilon, x, t) = \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial \varepsilon^k}(0, x, t) \varepsilon^k + \varepsilon^{N+1} R_N(u, \varepsilon, x, t), \quad (6)$$

trong đó $\varepsilon^{N+1} R_N(u, \varepsilon, x, t)$ là phần dư trong công thức Maclaurin. Nếu trên một không gian X gồm các hàm trên Q với chuẩn $\|\cdot\|_X$, ta có được đánh giá

$$\|R_N(u, \varepsilon, \cdot, \cdot)\|_X \leq \tilde{C}_N, \quad \text{khi } \varepsilon \text{ đủ bé}, \quad (7)$$

trong đó, $\tilde{C}_N$ là một hằng số độc lập với ε , từ (6) và (7), ta có

$$\left\| u(\varepsilon, \cdot, \cdot) - \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial \varepsilon^k}(0, \cdot, \cdot) \varepsilon^k \right\|_X \leq \tilde{C}_N |\varepsilon|^{N+1}, \quad \text{khi } \varepsilon \text{ đủ bé}, \quad (8)$$

tức là ta có xấp xỉ

$$u(\varepsilon, \cdot, \cdot) \approx \sum_{k=0}^N \frac{1}{k!} \frac{\partial^k u}{\partial \varepsilon^k}(0, \cdot, \cdot) \varepsilon^k, \quad \text{khi } \varepsilon \text{ đủ bé}, \quad (9)$$

theo nghĩa (8). Nhưng điều khó khăn ở đây là chúng ta không thể có được công thức tường minh của nghiệm đúng $u(\varepsilon, x, t)$, do đó chúng ta không thể tính được $u(0, x, t)$ và các giá trị các đạo hàm $\frac{\partial^k u}{\partial \varepsilon^k}(0, x, t)$ từ nghiệm đúng $u(\varepsilon, x, t)$ để thu được xấp xỉ (9). Để vượt qua khó khăn này, các tác giả thường phải xác định các hàm $U_k(x, t)$, $k = 0, 1, \dots, N$ bằng một cách khác, độc lập với ε sao cho ta có

$$\left\| u(\varepsilon, \cdot, \cdot) - \sum_{k=0}^N U_k(\cdot, \cdot) \varepsilon^k \right\|_X \leq \tilde{C}_N |\varepsilon|^{N+1}, \quad \text{khi } \varepsilon \text{ đủ bé}, \quad (10)$$

trong đó, $\tilde{C}_N$ là một hằng số độc lập với ε .

Trong báo cáo này, nhóm tác giả kế thừa các phương pháp và kỹ thuật xem xét trong bài báo [24] để thiết lập định lý về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu địa phương cho bài toán (1). Trong trường hợp hàm $\mu = \mu(t, \varepsilon \langle u_x(t), u_{xt}(t) \rangle)$ và hàm nguồn về phải có dạng $f = f_0(x, t) + \varepsilon f_1(x, t, u)$ với ε là một tham số bé, với các ý tưởng như trong các nghiên cứu [18-21, 25, 30], chúng tôi thiết lập một khai triển tiệm cận của nghiệm yếu theo tham số bé này đến cấp 2.

2. CÔNG CỤ

Đặt $\Omega = (0,1)$. Chúng ta bỏ qua các định nghĩa của các không gian hàm thông thường và ký hiệu chúng bằng bởi các ký hiệu $L^p = L^p(\Omega)$, $H^m = H^m(\Omega)$. Ký hiệu $\langle \cdot, \cdot \rangle$ là tích vô hướng trong L^2 hoặc cặp tích đôi ngẫu của một phiếm hàm tuyến tính liên tục với một phần tử của không gian hàm. Ký hiệu $\|\cdot\|$ chỉ chuẩn trong L^2 và $\|\cdot\|_X$ là chuẩn trong không gian Banach X . Ta gọi X' là không gian đối ngẫu của X . Ta ký hiệu $L^p(0, T; X)$, $1 \leq p \leq +\infty$ là không gian Banach các hàm thực $u: (0, T) \rightarrow X$ đo được, sao cho $\|u\|_{L^p(0, T; X)} < +\infty$, với

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p dt \right)^{1/p}, & 1 \leq p < +\infty, \\ \text{ess sup}_{0 < t < T} \|u(t)\|_X, & p = +\infty. \end{cases}$$

Ta viết $u(t)$, $u'(t) = u_t(t) = \dot{u}(t)$, $u''(t) = u_{tt}(t) = \ddot{u}(t)$, $u_x(t) = \nabla u(t)$, $u_{xx}(t) = \Delta u(t)$ lần lượt thay cho $u(x, t)$, $\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t)$, $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$. Với $f = f(x, t, y)$, $f \in C^k([0, 1] \times [0, T^*] \times \mathbb{R})$, $D_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}$, $D_2 f = \frac{\partial f}{\partial t}$, $D_3 f = \frac{\partial f}{\partial y}$, $D^\alpha f = D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} D_3^{\alpha_3} f$, với $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \in \mathbb{Z}_+^3$, $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \leq k$.

Tương tự, với $\mu \in C^k([0, T^*] \times \mathbb{R})$, $\mu = \mu(t, z)$, ta đặt $D_1 \mu = \frac{\partial \mu}{\partial t}$, $D_2 \mu = \frac{\partial \mu}{\partial z}$, và $D^\beta \mu = D_1^{\beta_1} D_2^{\beta_2} \mu$, $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{Z}_+^2$, $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 \leq k$.

Trên $H^1 \equiv H^1(\Omega)$, ta sẽ dùng chuẩn $\|v\|_{H^1} = \left(\|v\|^2 + \|v_x\|^2 \right)^{1/2}$.

Ta biết rằng phép nhúng $H^1 \subset C^0(\bar{\Omega})$ là compact và $\|v\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \sqrt{2} \|v\|_{H^1}$, $\forall v \in H^1$.

Hơn nữa, trên $H_0^1 = \{v \in H^1 : v(0) = v(1) = 0\}$, hai chuẩn $v \mapsto \|v\|_{H^1}$, $v \mapsto \|v_x\|$ là tương đương và $\|v\|_{C^0(\bar{\Omega})} \leq \|v_x\|$, $\forall v \in H_0^1$.

3. SỰ TỒN TẠI VÀ DUY NHẤT NGHIỆM YẾU ĐỊA PHƯƠNG

Trước hết, cho trước $T^* > 0$ cố định, ta thành lập các giả thiết sau

$$(H_1) \quad \tilde{u}_0, \tilde{u}_1 \in H_0^1 \cap H^2;$$

$$(H_2) \quad g \in H^1(\mathbb{R}_+);$$

$$(H_3) \quad \mu \in C^1\left([0, T^*], \mathbb{R}\right) \text{ và } \mu(t, z) \geq \mu_* > 0, \forall (t, z) \in [0, T^*] \times \mathbb{R};$$

$$(H_4) \quad f \in C^1([0, 1] \times [0, T^*] \times \mathbb{R}) \text{ và } f(0, t, 0) = f(1, t, 0) = 0, \forall t \in [0, T^*].$$

Với mỗi $T \in (0, T^*]$, ta đặt

$$W_T = \{v \in L^\infty(0, T; H_0^1 \cap H^2) : v' \in L^\infty(0, T; H_0^1 \cap H^2), v'' \in L^2(0, T; H_0^1)\}. \quad (11)$$

Khi đó W_T là không gian Banach đối với chuẩn

$$\|v\|_{W_T} = \max \left\{ \|v\|_{L^\infty(0, T; H_0^1 \cap H^2)}, \|v'\|_{L^\infty(0, T; H_0^1 \cap H^2)}, \|v''\|_{L^2(0, T; H_0^1)} \right\}. \quad (12)$$

Với mỗi $M > 0$, ta giới thiệu các tập

$$\begin{aligned} W(M, T) &= \{v \in W_T : \|v\|_{W_T} \leq M\}, \\ W_1(M, T) &= \{v \in W(M, T) : v'' \in L^\infty(0, T; L^2)\}. \end{aligned} \quad (13)$$

Chúng ta cũng chú ý rằng

$$W_1(T) = \{v \in C^0([0, T]; H_0^1) \cap C^1([0, T]; L^2) : v' \in L^2(0, T; H_0^1)\} \quad (14)$$

là một không gian Banach tương ứng với chuẩn (Lions [22])

$$\|v\|_{W_1(T)} = \|v\|_{C^0([0, T]; H_0^1)} + \|v'\|_{C^0([0, T]; L^2)} + \|v''\|_{L^2(0, T; H_0^1)}. \quad (15)$$

Nghiệm yếu của bài toán (1) được định nghĩa là hàm $u \in L^\infty(0, T; H_0^1 \cap H^2)$ sao cho $u' \in L^\infty(0, T; H_0^1 \cap H^2)$, $u'' \in L^\infty(0, T; L^2) \cap L^2(0, T; H_0^1)$ và thỏa bài toán biến phân sau

$$\begin{cases} \langle u''(t), w \rangle + \lambda \langle u'_x(t), w_x \rangle + \mu[u](t) \langle u_x(t), w_x \rangle = \int_0^t g(t-s) \langle u_x(s), w_x \rangle ds \\ \quad + \langle f[u](t), w \rangle, \forall w \in H_0^1, \\ u(0) = \tilde{u}_0, u'(0) = \tilde{u}_1, \end{cases} \quad (16)$$

trong đó

$$\mu[u](t) = \mu(t, \langle u_x(t), u'_x(t) \rangle), f[u](x, t) = f(x, t, u(x, t)). \quad (17)$$

Bây giờ, chúng ta thiết lập dãy quy nạp $\{u_m\}$, với số hạng đầu tiên được chọn là $u_0 = 0$, giả sử rằng

$$u_{m-1} \in W_1(M, T), \quad (18)$$

ta liên kết bài toán (16) với bài toán: tìm $u_m \in W_1(M, T)$, ($m \geq 1$) thỏa bài toán biến phân tuyến tính

$$\begin{cases} \langle u_m''(t), w \rangle + \lambda \langle u_{mx}'(t), w_x \rangle + \mu_m(t) \langle u_{mx}(t), w_x \rangle = \int_0^t g(t-s) \langle u_{mx}(s), w_x \rangle ds \\ \quad + \langle F_m(t), w \rangle, \forall w \in H_0^1, \\ u_m(0) = \tilde{u}_0, u_m'(0) = \tilde{u}_1, \end{cases} \quad (19)$$

trong đó

$$\begin{cases} \mu_m(t) = \mu[u_{m-1}](t) = \mu(t, \langle \nabla u_{m-1}(t), \nabla u_{m-1}'(t) \rangle), \\ F_m(t) = f[u_{m-1}](x, t) = f(x, t, u_{m-1}(x, t)). \end{cases} \quad (20)$$

Khi đó, chúng ta thu được các kết quả chính sau đây.

Định lý 3.1. *Giả sử $(H_1) - (H_4)$ đúng. Khi đó, tồn tại các hằng số dương M, T sao cho, với $u_0 = 0$, tồn tại một dãy quy nạp tuyến tính $\{u_m\} \subset W_1(M, T)$ được xác định bởi (18) – (20).*

Chứng minh. Chứng minh Định lý 3.1, nhờ vào phương pháp xấp xỉ Faedo-Galerkin kết hợp với nguyên lý điểm bất động Banach. Sau đó thực hiện các đánh giá tiên nghiệm phù hợp và các lý luận về tính compact để qua giới hạn. Chứng minh chi tiết tương tự như trong [24].

Sử dụng kết quả của Định lý 3.1 và các định lý nhúng compact, chúng ta chứng minh được kết quả chính của phần này như sau.

Định lý 3.2. *Giả sử $(H_1) - (H_4)$ đúng. Khi đó, với các hằng số $M > 0$ và $T > 0$ được chọn như trong Định lý 3.1, bài toán (1) có duy nhất nghiệm yếu $u \in W_1(M, T)$. Hơn nữa, dãy quy nạp $\{u_m\}$ được xác định bởi (18) – (20) hội tụ mạnh về nghiệm yếu u của bài toán (1) trong $W_1(T)$ đồng thời thỏa ước lượng*

$$\|u_m - u\|_{W_1(T)} \leq C_T K_T^m, \quad \forall m \in \mathbb{N}, \quad (21)$$

với hằng số $K_T \in [0, 1)$ và C_T là hằng số chỉ phụ thuộc vào $T, f, \mu, g, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ và K_T .

Chứng minh. Để chứng minh Định lý 3.2, trước hết ta cần chứng minh dãy $\{u_m\}$ là dãy Cauchy trong không gian Banach $W_1(T)$. Sau đó, ta chứng minh giới hạn $u \in W_1(T)$ của dãy $\{u_m\}$ là nghiệm yếu của bài toán (1) đồng thời cũng thu được đánh giá sai số (21). Cuối cùng, tính chất duy nhất nghiệm được chứng minh bằng cách sử dụng Bổ đề Gronwall. Chứng minh chi tiết tương tự như trong [24].

4. KHAI TRIỂN TIỆM CẬN NGHIỆM YẾU CHO BÀI TOÁN NHIỀU

Phần này xem xét một họ các bài toán (P_ε) phụ thuộc một tham số bé $\varepsilon, |\varepsilon| \leq 1$, như sau:

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} u_{tt} - \lambda u_{xx} - \mu(t, \varepsilon \langle u_x(t), u_{xt}(t) \rangle) u_{xx} + \int_0^t g(t-s) u_{xx}(s) ds \\ \quad = f_0(x, t) + \varepsilon f_1(x, t, u), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \\ u(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_t(x, 0) = \tilde{u}_1(x). \end{cases} \quad (22)$$

trong đó $\mu, f_0, f_1, g, \tilde{u}_0, \tilde{u}_1$ là các hàm cho trước cùng với λ là hằng số dương cũng cho trước.

Ta sẽ tìm các hàm $u_0(x, t), u_1(x, t)$ độc lập với ε sao cho nghiệm yếu duy nhất $u_\varepsilon(x, t)$ của bài toán (P_ε) được xấp xỉ

$$u_\varepsilon \approx u_0 + u_1 \varepsilon \quad (23)$$

theo nghĩa ta có đánh giá

$$\|u_\varepsilon - u_0 - u_1 \varepsilon\|_{W_1(T)} \leq C_T \varepsilon^2, \quad (24)$$

với ε đủ nhỏ và C_T là hằng số độc lập với ε .

Ở mục này, chúng ta vẫn giả thiết (H_1) , (H_2) và tăng cường thêm tính trơn cho các hàm μ, f bởi các giả thiết

$$(H_3) \quad \mu \in C^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \text{ và } \mu(t, z) \geq \mu_* > 0, \forall (t, z) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R};$$

$$(H_4) \quad f_1 \in C^2([0, 1] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}), f_0 \in C^1([0, 1] \times \mathbb{R}_+) \text{ và} \\ f_1(0, t, 0) = f_1(1, t, 0) = f_0(0, t) = f_0(1, t) = 0, \forall t \in \mathbb{R}_+.$$

Từ chứng minh của Định lý 3.1 ở mục 3, ta có thể chọn $M > 0, T > 0$ độc lập với $\varepsilon \in [-1, 1]$ sao cho nghiệm yếu duy nhất $u = u_\varepsilon$ của bài toán (P_ε) thỏa mãn

$$u_\varepsilon \in W_1(M, T), \quad \forall \varepsilon \in [-1, 1]. \quad (25)$$

Đặt

$$\begin{cases} \mu_\varepsilon[u](t) = \mu(t, \varepsilon \langle u_x(t), u_{xt}(t) \rangle), \\ f_1[u](x, t) = f_1(x, t, u(x, t)). \end{cases} \quad (26)$$

Giả sử $u_0 \in W_1(M, T)$ là một nghiệm duy nhất của bài toán (P_0) tương ứng với $\varepsilon = 0$, tức là

$$(P_0) \begin{cases} u_0'' - \lambda \Delta u_0' - \mu(t, 0) \Delta u_0 + \int_0^t g(t-s) \Delta u_0(s) ds = f_0(x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_0(0, t) = u_0(1, t) = 0, \\ u_0(x, 0) = \tilde{u}_0(x), u_0'(x, 0) = \tilde{u}_1(x). \end{cases} \quad (27)$$

Giả sử $u_1 \in W_1(M, T)$ là một nghiệm duy nhất của bài toán

$$(P_1) \begin{cases} u_1'' - \lambda \Delta u_1' - \mu(t, 0) \Delta u_1 + \int_0^t g(t-s) \Delta u_1(s) ds = F_1, 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ u_1(0, t) = u_1(1, t) = 0, \\ u_1(x, 0) = u_1'(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

trong đó F_1 được xác định bởi

$$F_1 = f_1[u_0] + D_2 \mu(0, t) \langle \nabla u_0, \nabla u_0' \rangle. \quad (29)$$

Gọi $u = u_\varepsilon \in W_1(M, T)$ là nghiệm yếu duy nhất của bài toán (P_ε) . Khi đó $v = u - u_0 - u_1 \varepsilon \equiv u - h$ thỏa bài toán

$$\begin{cases} v'' - \lambda \Delta v' - \mu_\varepsilon[v+h] \Delta v + \int_0^t g(t-s) \Delta v(s) ds = \varepsilon (f_1[v+h] - f_1[h]) \\ \quad + (\mu_\varepsilon[v+h] - \mu_\varepsilon[h]) \Delta h + E_\varepsilon(x, t), 0 < x < 1, 0 < t < T, \\ v(0, t) = v(1, t) = 0, \\ v(x, 0) = v'(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (30)$$

trong đó

$$E_\varepsilon(x, t) = \varepsilon f_1[h] + (\mu_\varepsilon[h] - \mu(t, 0))\Delta h - \varepsilon F_1. \quad (31)$$

Khi đó, ta cần một đánh giá sau đây.

Bổ đề 4.1. Giả sử $(H_1), (H_2), (H_3), (H_4)$ đúng. Khi đó ta có đánh giá

$$\|E_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq C_T \varepsilon^2, \quad |\varepsilon| \leq 1, \quad (32)$$

trong đó C_T là một hằng số chỉ phụ thuộc vào T, f, μ, u_0, u_1 (độc lập với ε).

Chúng minh Bổ đề 4.1.

i/ Khai triển Taylor hàm $f_1[h] = f_1[u_0 + \varepsilon u_1]$ quanh điểm $[u_0] = (x, t, u_0)$ đến cấp hai ta được

$$\begin{aligned} \varepsilon f_1[h] &= \varepsilon f_1(x, t, u_0 + \varepsilon u_1) \\ &= \varepsilon \left[f_1[u_0] + D_3 f_1[u_0] \varepsilon u_1 + D_3^2 f_1[u_0 + \theta \varepsilon u_1] \varepsilon^2 u_1^2 \right] \\ &= \varepsilon f_1[u_0] + \varepsilon^2 R_1[f, u_0, u_1, \varepsilon], \end{aligned} \quad (33)$$

trong đó $R_1[f, u_0, u_1, \varepsilon] = D_3 f_1[u_0] u_1 + D_3^2 f_1[u_0 + \theta \varepsilon u_1] \varepsilon u_1^2, 0 < \theta < 1$.

ii/ Khai triển Taylor hàm $\mu_\varepsilon[h] = \mu(t, \varepsilon \langle h_x, h'_x \rangle)$ quanh điểm $(t, 0)$ đến cấp 2 ta được

$$\begin{aligned} \mu_\varepsilon[h] - \mu(t, 0) &= D_2 \mu(t, 0) \varepsilon \langle h_x, h'_x \rangle + D_2^2 \mu(t, \theta \varepsilon \langle h_x, h'_x \rangle) (\varepsilon \langle h_x, h'_x \rangle)^2 \\ &= \varepsilon D_2 \mu(t, 0) \langle \nabla u_0, \nabla u'_0 \rangle \\ &\quad + \varepsilon^2 \left[\langle \nabla u_1, \nabla u'_0 \rangle + \langle \nabla u_0, \nabla u'_1 \rangle + \varepsilon \langle \nabla u_1, \nabla u'_1 \rangle + D_2^2 \mu(t, \theta \varepsilon \langle h_x, h'_x \rangle) (\langle h_x, h'_x \rangle)^2 \right], \end{aligned} \quad (34)$$

với $\theta \in (0, 1)$ và $h = u_0 + \varepsilon u_1$.

iii/ Khai triển $(\mu_\varepsilon[h] - \mu(t, 0))\Delta h$.

$$\begin{aligned} (\mu_\varepsilon[h] - \mu(t, 0))\Delta h &= \varepsilon D_2 \mu(t, 0) \langle \nabla u_0, \nabla u'_0 \rangle \Delta u_0 + \varepsilon^2 D_2 \mu(t, 0) \langle \nabla u_0, \nabla u'_0 \rangle \Delta u_1 \\ &\quad + \varepsilon^2 \left[\langle \nabla u_1, \nabla u'_0 \rangle + \langle \nabla u_0, \nabla u'_1 \rangle + \varepsilon \langle \nabla u_1, \nabla u'_1 \rangle \right] (\Delta u_0 + \varepsilon \Delta u_1) \\ &\quad + \varepsilon^2 D_2^2 \mu(t, \theta \varepsilon \langle h_x, h'_x \rangle) (\langle h_x, h'_x \rangle)^2 (\Delta u_0 + \varepsilon \Delta u_1) \\ &= \varepsilon D_2 \mu(t, 0) \langle \nabla u_0, \nabla u'_0 \rangle \Delta u_0 + \varepsilon^2 R_2[\mu, u_0, u_1, \varepsilon]. \end{aligned} \quad (35)$$

iv/ Đánh giá $E_\varepsilon(x, t)$.

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(x, t) &= \varepsilon f_1[h] + (\mu_\varepsilon[h] - \mu(t, 0))\Delta h - \varepsilon F_1 \\ &= \varepsilon f_1[u_0] + \varepsilon^2 R_1[f, u_0, u_1, \varepsilon] \\ &= \varepsilon D_2 \mu(t, 0) \langle \nabla u_0, \nabla u'_0 \rangle \Delta u_0 + \varepsilon^2 R_2[\mu, u_0, u_1, \varepsilon] - \varepsilon F_1 \\ &= \varepsilon (f_1[u_0] + D_2 \mu(t, 0) \langle \nabla u_0, \nabla u'_0 \rangle \Delta u_0 - F_1) + \varepsilon^2 \tilde{R}[f, \mu, u_0, u_1, \varepsilon] \\ &= \varepsilon^2 \tilde{R}[f, \mu, u_0, u_1, \varepsilon], \end{aligned} \quad (36)$$

trong đó $\tilde{R}[f_1, \mu, u_0, u_1, \varepsilon] = R_1[f_1, u_0, u_1, \varepsilon] + R_2[\mu, u_0, u_1, \varepsilon]$.

Từ tính chất bị chặn của các hàm u_0, u_1 trong $L^\infty(0, T; H^2)$, ta suy ra rằng $R[f_1, \mu, u_0, u_1, \varepsilon]$ bị chặn trong $L^\infty(0, T; L^2)$ bởi một hằng số C_T độc lập với $\varepsilon \in [-1, 1]$. Do đó,

$$\|E_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2)} = \varepsilon^2 \|\tilde{R}[f_1, \mu, u_0, u_1, \varepsilon]\|_{L^\infty(0, T; L^2)} \leq \tilde{C}_T \varepsilon^2. \quad (37)$$

Bổ đề 4.1 được chứng minh. $\square$

Bây giờ, nhân hai vế của (30)₁ bởi $v'(x, t)$ và sau đó tích phân trên $(0, 1) \times (0, t)$ ta có

$$\begin{aligned} \bar{\lambda}_* \bar{S}(t) &\leq 2 \int_0^t \langle E_\varepsilon(s), v'(s) \rangle ds + \int_0^t \mu'_\varepsilon(s) \|v_x(s)\|^2 ds \\ &\quad + 2\varepsilon \int_0^t \langle f_1[v+h] - f_1[h], v'(s) \rangle ds \\ &\quad + 2 \int_0^t (\mu_\varepsilon[v+h] - \mu_\varepsilon[h]) \langle \Delta h(s), v'(s) \rangle ds \\ &\quad - 2g(0) \int_0^t \|v_x(s)\|^2 ds + 2 \int_0^t g(t-s) \langle v_x(s), v_x(t) \rangle ds \\ &\quad + 2 \int_0^t d\tau \int_0^\tau g'(\tau-s) \langle v_x(s), v_x(\tau) \rangle ds = \sum_{i=1}^7 S_i, \end{aligned} \quad (38)$$

trong đó $\bar{\lambda}_* = \min\{1, \mu_*, \lambda\}$ và

$$\bar{S}(t) = \|v'(t)\|^2 + \|v_x(t)\|^2 + \int_0^t \|v'_x(s)\|^2 ds. \quad (39)$$

Tiếp theo, ta đánh giá các tích phân $S_1, \dots, S_7$ ở vế phải của (38).

Đánh giá S_1 . Không khó khăn để thu được các đánh giá S_1 cho như sau

$$S_1 = 2 \int_0^t \langle E_\varepsilon(s), v'(s) \rangle ds \leq 2 \int_0^t \|E_\varepsilon(s)\| \|v'(s)\| ds \leq T \tilde{C}_T^2 \varepsilon^4 + \int_0^t \bar{S}(s) ds. \quad (40)$$

Đánh giá S_2 . Ta có

$$S_2 = \int_0^t \mu'_\varepsilon(s) \|v_x(s)\|^2 ds \leq \int_0^t |\mu'_\varepsilon(s)| \|v_x(s)\|^2 ds \leq \int_0^t |\mu'_\varepsilon(s)| \bar{S}(s) ds.$$

Chú ý rằng

$$\mu'_\varepsilon(t) = D_1 \mu_\varepsilon(t) + \varepsilon D_2 \mu_\varepsilon(t) \left[\|v'_x(t) + h'_x(t)\|^2 + \langle v'_x(t) + h'_x(t), v''_x(t) + h''_x(t) \rangle \right],$$

ta suy ra

$$|\mu'_\varepsilon(t)| \leq \tilde{K}_M(\mu) \left[1 + M^2 + M \|v''_x(t) + h''_x(t)\| \right] \equiv \Phi_M(t),$$

trong đó

$$\begin{aligned} \tilde{K}_M(\mu) &= \|\mu\|_{C^1(\tilde{A}_M)} = \|\mu\|_{C^0(\tilde{A}_M)} + \sum_{i=1}^2 \|D_i \mu\|_{C^0(\tilde{A}_M)}, \\ \|\mu\|_{C^0(\tilde{A}_M)} &= \sup_{(t,z) \in \tilde{A}_M} |\mu(t, z)|, \quad \tilde{A}_M = [0, T^*] \times [-M^2, M^2]. \end{aligned}$$

Hơn nữa,

$$\begin{aligned}\int_0^T \Phi_M^2(s) ds &\leq 2\tilde{K}_M^2(\mu) \left[(1+M^2)^2 T + M^2 \int_0^T \|v_x''(s) + h_x''(s)\| ds \right] \\ &\leq 2\tilde{K}_M^2(\mu) \left[(1+M^2)^2 T + M^2 \|u''\|_{L^2(0,T,H_0^1)}^2 \right] \\ &\leq 2\tilde{K}_M^2(\mu) \left[(1+M^2)^2 T + M^4 \right],\end{aligned}$$

hay

$$\|\Phi_M\|_{L^2(0,T)} \leq \sqrt{2}\tilde{K}_M(\mu) \left[(1+M^2)\sqrt{T^*} + M^2 \right] \equiv \hat{\Phi}_M.$$

Khi đó S_2 được đánh giá

$$\begin{aligned}S_2 &= \int_0^t \mu_\varepsilon'(s) \|v_x(s)\|^2 ds \leq \int_0^t \Phi_M(s) \bar{S}(s) ds, \\ \|\Phi_M\|_{L^2(0,T)} &\leq \hat{\Phi}_M.\end{aligned}\tag{41}$$

Đánh giá S_3 . Đặt $M_* = 2M$, chú ý rằng $|\varepsilon| \leq 1$ và

$$\|f_1[v+h] - f_1[h]\| \leq K_{M_*}(f_1) \|v_x(t)\|,$$

trong đó

$$K_{M_*}(f_1) = \|f_1\|_{C^1(A_{M_*})}, \quad A_{M_*} = [0,1] \times [0,T^*] \times [-M_*, M_*].$$

Khi đó S_3 được đánh giá

$$\begin{aligned}S_3 &= 2\varepsilon \int_0^t \langle f_1[v+h] - f_1[h], v'(s) \rangle ds \\ &\leq K_{M_*}(f_1) \int_0^t \bar{S}(s) ds \equiv \sigma_1 \int_0^t \bar{S}(s) ds.\end{aligned}\tag{42}$$

Đánh giá S_4 . Dễ dàng kiểm tra được rằng

$$\|\mu_\varepsilon[v+h] - \mu_\varepsilon[h]\| \leq \sigma_2 (\|v_x(s)\| + \|v_x'(s)\|),$$

trong đó

$$\sigma_2 = 2M\tilde{K}_{M_*}(\mu), \quad \tilde{K}_{M_*}(\mu) = \|\mu\|_{C^1(\tilde{A}_{M_*})}, \quad \tilde{A}_{M_*} = [0,T^*] \times [-M_*^2, M_*^2].$$

Do đó S_4 được đánh giá

$$\begin{aligned}S_4 &= 2 \int_0^t (\mu_\varepsilon[v+h] - \mu_\varepsilon[h]) \langle \Delta h(s), v'(s) \rangle ds \\ &\leq 2\sigma_2 \int_0^t (\|v_x(s)\| \|v'(s)\| + \|v_x'(s)\| \|v'(s)\|) ds \\ &\leq 2\sigma_2 \int_0^t \bar{S}(s) ds + \frac{4\sigma_2^2}{\bar{\lambda}_*} \int_0^t \|v'(s)\|^2 ds + \frac{\bar{\lambda}_*}{4} \int_0^t \|v_x'(s)\|^2 ds \\ &\leq \left(2\sigma_2 + \frac{4\sigma_2^2}{\bar{\lambda}_*} \right) \int_0^t \bar{S}(s) ds + \frac{\bar{\lambda}_*}{4} \bar{S}(t).\end{aligned}\tag{43}$$

Các tích phân S_5, S_6, S_7 được đánh giá như sau

$$\begin{aligned}
 S_5 &= -2g(0)\int_0^t \|v_x(s)\|^2 ds \leq 2|g(0)|\int_0^t \bar{S}(s) ds \equiv \sigma_3 \int_0^t \bar{S}(s) ds, \\
 S_6 &= 2\int_0^t g(t-s)\langle v_x(s), v_x(t) \rangle ds \\
 &\leq \frac{\bar{\lambda}_*}{4} \bar{S}(t) + \frac{4}{\bar{\lambda}_*} \|g\|_{L^2(0,T^*)}^2 \int_0^t \bar{S}(s) ds \\
 &\equiv \frac{\bar{\lambda}_*}{4} \bar{S}(t) + \sigma_4 \int_0^t \bar{S}(s) ds,
 \end{aligned} \tag{44}$$

$$\begin{aligned}
 S_7 &= 2\int_0^t d\tau \int_0^\tau g'(\tau-s)\langle v_x(s), v_x(\tau) \rangle ds \\
 &\leq 2\sqrt{T^*} \|g'\|_{L^2(0,T^*)} \int_0^t \bar{S}(s) ds \equiv \sigma_5 \int_0^t \bar{S}(s) ds.
 \end{aligned}$$

Kết nối các ước lượng (38) – (44), ta thu được

$$\bar{S}(t) \leq \frac{2}{\bar{\lambda}_*} T \tilde{C}_T^2 \varepsilon^4 + \frac{2}{\bar{\lambda}_*} \int_0^t [\hat{\sigma}_M + \Phi_M(s)] \bar{S}(s) ds, \tag{45}$$

với

$$\hat{\sigma}_M = 1 + \sigma_1 + 2\sigma_2 + \frac{4\sigma_2^2}{\bar{\lambda}_*} + \sigma_3 + \sigma_4 + \sigma_5. \tag{46}$$

Sử dụng Bổ đề Gronwall, ta suy ra rằng

$$\begin{aligned}
 \bar{S}(t) &\leq \frac{2}{\bar{\lambda}_*} T \tilde{C}_T^2 \varepsilon^4 \exp\left(\frac{2}{\bar{\lambda}_*} \int_0^t [\hat{\sigma}_M + \Phi_M(s)] ds\right) \\
 &\leq \frac{2}{\bar{\lambda}_*} T \tilde{C}_T^2 \varepsilon^4 \exp\left(\frac{2}{\bar{\lambda}_*} \left[T \hat{\sigma}_M + \|\Phi_M\|_{L^1(0,T)}\right]\right) \\
 &\leq \frac{2}{\bar{\lambda}_*} T \tilde{C}_T^2 \varepsilon^4 \exp\left(\frac{2}{\bar{\lambda}_*} \left[T \hat{\sigma}_M + \sqrt{T} \Phi_M\right]\right) \equiv \varepsilon^4 \hat{\eta}_M(T).
 \end{aligned}$$

Do đó

$$\|u_\varepsilon - u_0 - \varepsilon u_1\|_{W_1(T)} \leq C_T \varepsilon^2.$$

Cuối cùng, chúng ta có định lý sau đây.

Định lý 4.2. *Giả sử $(H_1), (H_2), (H_3), (H_4)$ đúng. Khi đó tồn tại các hằng số $M > 0$ và $T > 0$ sao cho, với mỗi ε , $|\varepsilon| \leq 1$, bài toán (P_ε) có một nghiệm yếu duy nhất $u_\varepsilon \in W_1(M, T)$ thỏa đánh giá tiệm cận đến cấp 2 như sau*

$$\|u_\varepsilon - u_0 - u_1 \varepsilon\|_{W_1(T)} \leq C_T \varepsilon^2, \tag{47}$$

trong đó các hàm u_0, u_1 là các nghiệm yếu của các bài toán $(P_0), (P_1)$, tương ứng và C_T là một hằng số chỉ phụ thuộc vào T, μ, f_1, g, u_0, u_1 .

5. KẾT LUẬN

Trong nghiên cứu này, chúng tôi đã sử dụng các phương pháp của giải tích hàm phi tuyến một cách phù hợp để thiết lập các định lý (Định lý 3.1 và Định lý 3.2) về sự tồn tại và duy nhất nghiệm yếu địa phương cho mô hình bài toán (1). Nghiên cứu cũng đưa ra một cách tiếp cận cho vấn đề xấp xỉ nghiệm của bài toán nhiều bởi một tham số bé, khai triển tiệm cận nghiệm cho bài toán (22) đến cấp hai (Định lý 4.2). Phương pháp này có thể mở rộng để khai triển tiệm cận nghiệm yếu đến cấp cao hơn với yêu cầu các dữ liệu đủ trơn. Tuy nhiên, với mong muốn nhấn mạnh vào các kỹ thuật và ý tưởng của phương pháp, chúng tôi chỉ dừng lại ở việc khai triển đến cấp 2. Ngoài các kết quả được trình bày trong bài báo, một số tính chất khác của nghiệm đối với bài toán (1) như tính chất tắt dần của nghiệm theo tốc độ hàm mũ, hoặc bậc tổng quát hơn cũng đang được triển khai nghiên cứu. Mô hình bài toán (1) với các số hạng xuất phát từ các vấn đề thực tiễn, do đó việc tìm kiếm lời giải và nghiên cứu các tính chất nghiệm cho lớp bài toán này hứa hẹn sẽ thúc đẩy các ý tưởng áp dụng toán học trong các mô hình thực tế phù hợp đồng thời cũng đóng góp những ý tưởng khoa học chuyên khảo cho chuyên ngành.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Balakrishnan A. V., Taylor L. W. - Distributed parameter nonlinear damping models for flight structures, *Proceeding Damping 89, Flight Dynamics Lab and Air Force Wright Aeronautical Labs, WPAFB*, 1989.
2. Bass R. W., Zes D. - Spillover nonlinearity and flexible structures, *The Fourth NASA Workshop on Computational Control of Flexible Aerospace Systems, NASA Conference Publication 10065* (ed. L. W. Taylor) (1991) 1-14.
3. Boulaaras S., Draifia A., Zennir K. - General decay of nonlinear viscoelastic Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping and logarithmic nonlinearity, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **42** (14) (2019) 4795-4814.
4. Boulaaras S. - Polynomial decay rate for a new class of viscoelastic Kirchhoff equation related with Balakrishnan-Taylor dissipation and logarithmic source terms, *Alexandria Engineering Journal* **59** (3) (2020) 1059-1071.
5. Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V. N., Prates Filho J. S. - Existence and exponential decay for a Kirchhoff-Carrier model with viscosity, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **226** (1998) 40-60.
6. Carrier G. F. - On the nonlinear vibrations problem of elastic string, *Quarterly of Applied Mathematics* **3** (1945) 157-165.
7. Emmrich E., Thälhammer M. - A class of integro-differential equations incorporating nonlinear and nonlocal damping with applications in nonlinear elastodynamics: Existence via time discretization, *Nonlinearity* **24** (2011) 2523-2546.
8. Feng B., Kang Y. H. - Decay rates for a viscoelastic wave equation with Balakrishnan-Taylor and frictional dampings, *Topological Methods in Nonlinear Analysis* **54** (1) (2019) 321-343.
9. Freitas M. M., Santos M. L., Langa J. A. - Porous elastic system with nonlinear damping and sources terms, *Journal of Differential Equations* **264** (2018) 2970-3051.
10. Freitas M. M. - Pullback attractors for non-autonomous porous elastic system with nonlinear damping and sources terms, *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **43** (2) (2019) 658-681.

11. Ha T. G. - General decay rate estimates for viscoelastic wave equation with Balakrishnan-Taylor damping, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **67** (2) (2016) 1-17.
12. Ha T.G. - Stabilization for the wave equation with variable coefficients and Balakrishnan-Taylor damping, *Taiwanese Journal of Mathematics* **21** (4) (2017) 807-817.
13. Ha T.G. - On the viscoelastic equation with Balakrishnan-Taylor damping and acoustic boundary conditions, *Evolution Equations and Control Theory* **7** (2) (2018) 281-291.
14. Hao J., Hou Y. - Stabilization for wave equation of variable coefficients with Balakrishnan-Taylor damping and source term, *Computational Mathematics and Applications* **76** (2018) 2235-2245.
15. Kang J. H, Lee M. J., Park S. H. - Asymptotic stability for a viscoelastic problem with Balakrishnan-Taylor damping and time-varying delay, *Computational Mathematics and Applications* **74** (6) (2017) 1506-1515.
16. Kirchhoff G. R. - *Vorlesungen über Mathematische Physik: Mechanik*, Teuber, Leipzig, 1876, Section 29.7.
17. Lee M. J., Park J. Y., Kang Y. H. - Asymptotic stability of a problem with Balakrishnan-Taylor damping and a time delay, *Computational Mathematics and Applications* **70** (2015) 478-487.
18. Long N. T., Dinh A. P. N., Diem T. N. - Linear recursive schemes and asymptotic expansion associated with the Kirchhoff-Carrier operator, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **267** (1) (2002) 116-134.
19. Long N. T. - On the nonlinear wave equation $u_{tt} - B(t, \|u\|^2, \|u_x\|^2)u_{xx} = f(x, t, u, u_x, u_t, \|u\|^2, \|u_x\|^2)$ associated with the mixed homogeneous conditions, *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **306** (1) (2005) 243-268.
20. Nhan N. H., Ngoc L. T. P., Long N. T. - Existence and asymptotic expansion of the weak solution for a wave equation with nonlinear source containing nonlocal term, *Boundary Value Problems* **2017** (1) (2017).
21. Nhan N. H., Ngoc L. T. P., Long N. T. - On a nonlinear wave equation of Kirchhoff-Carrier type: Linear approximation and asymptotic expansion of solution in a small parameter, *Mathematical Problems in Engineering* **2018**, 3626543, 18p.
22. Lions J. L. - *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites nonlinéaires*, Dunod; Gauthier-Villars, Paris, 1969.
23. Mu C., Ma J. - On a system of nonlinear wave equations with Balakrishnan-Taylor damping, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **65** (2014) 91-113.
24. Ngoc L. T. P., Nhan N. H., Nam B. D., Long N. T. - Existence and exponential decay of the Dirichlet problem for a nonlinear wave equation with the Balakrishnan-Taylor term, *Lithuanian Mathematical Journal* **60** (2) (2020) 225-247.
25. Ngoc L. T. P., Quynh D. T. N., Long N. T. - Linear approximation and asymptotic expansion associated to the Robin-Dirichlet problem for a Kirchhoff-Carrier equation with a viscoelastic term, *Kyungpook Mathematical Journal* **59** (2019), 735-769.
26. Quynh D. T. N., Nhan N. H., Ngoc L. T. P., Long N. T. - Continuous dependence and general decay of solutions for a wave equation with a nonlinear memory term, *Applications of Mathematics* [Online First].

<https://link.springer.com/article/10.21136/AM.2022.0200-21>

27. Tatar N. E., Zarái A. - Exponential stability and blow up for a problem with Balakrishnan-Taylor damping, *Demonstratio Mathematica* **44** (1) (2011) 67-90.
28. Tatar N. E., Zarái A. - On a Kirchhoff equation with Balakrishnan-Taylor damping and source term, *Dynamics of Continuous, Discrete and Impulsive Systems Series A: Mathematical Analysis* **18** (5) (2011) 615-627.
29. Tavares E. H. G., Silva M. A. J., Narciso V. - Long-time dynamics of Balakrishnan-Taylor extensible beams, *Journal of Dynamics and Differential Equations* **32** (2) (2019).
30. Triet N. A., Ngoc L. T. P., Long N. T. - On a nonlinear Kirchhoff-Carrier wave equation associated with Robin conditions, *Nonlinear Analysis* **11** (2010) 3363-3388.
31. Zarái A., Tatar N. E. - Global existence and polynomial decay for a problem with Balakrishnan-Taylor damping, *Archiv der Mathematik* **46** (3) (2010) 157-176.

ABSTRACT

ASYMPTOTIC EXPANSION OF WEAK SOLUTIONS OF THE DIRICHLET PROBLEM FOR A NONLINEAR VISCOELASTIC WAVE EQUATION WITH BALAKRISHNAN-TAYLOR TERM

Bui Duc Nam^{1*}, Doan Thi Nhu Quynh¹, Ly Anh Duong²

¹*Ho Chi Minh City University of Food Industry*

²*FPT University in Ho Chi Minh City*

*Email: nambd@hufi.edu.vn

In this paper, we consider the Dirichlet problem for a nonlinear viscoelastic wave equation with Balakrishnan-Taylor damping. First, under suitable conditions on the initial data, the local existence and uniqueness of a weak solution are established by the linearization method together with the Faedo-Galerkin method. Next, when the source term and Balakrishnan-Taylor term contain noise parameters, an expansion an asymptotic expansion of solutions on this small parameter with second order is established.

Keywords: Nonlinear wave equation, viscoelastic, Balakrishnan-Taylor damping, Faedo-Galerkin method, local existence, asymptotic expansion.