

Các phương pháp giải bài toán phân tích phi tuyến ổn định hệ thanh

Methods for solving nonlinear buckling analysis of frame system

Trịnh Tiến Khương

Tóm tắt

Bài báo trình bày các phương pháp lặp giải bài phân tích phi tuyến ổn định hệ kết cấu thanh. Bài toán phân tích phi tuyến ổn định được xây dựng trên tiêu chuẩn ổn định của Drucker-Hill để xác định đường cân bằng và các điểm tới hạn. Kết quả phân tích cho thấy việc lựa chọn phương pháp dây cung sử dụng hàm điều khiển cả tải trọng và chuyển vị phù hợp xác định đường cân bằng và các điểm tới hạn trong bài toán phân tích phi tuyến kết cấu.

Từ khóa: Phân tích phi tuyến ổn định, Phương pháp lặp, Biến điều khiển

Abstract

The paper is concerned with the iterative methods for solving the nonlinear buckling problem of the frame system. The stability nonlinear analysis problem is built on the Drucker-Hill stability criterion to determine the equilibrium curve and the critical points. The analysis results show that the selection of the chord method using the control functions for both the load and the appropriate displacement to determine the equilibrium line and the critical points in the structural nonlinear analysis problem.

Key words: Nonlinear buckling analysis, iterative method, regulator variable

1. Đặt vấn đề

Phân tích ổn định là một phần không thể thiếu trong trình tự tính toán thiết kế kết cấu công trình. Hiện tượng mất ổn định là nguyên nhân gây ra một trong hai loại phá hoại cơ bản (phá hoại vật liệu và phá hoại về hình dạng) của kết cấu. Hiện tượng mất ổn định và các lý thuyết phân tích ổn định của kết cấu đã được các nhà nghiên cứu quan tâm từ vài thế kỷ trước, trong giai đoạn đầu tiên trong lịch sử phát triển của lý thuyết phân tích kết cấu [3,4]. Với sự phát triển của công nghệ xây dựng, các công trình xây dựng hiện đại có kích thước lớn hơn, tiết diện của phần tử cũng giảm đi do sử dụng các loại vật liệu có cường độ cao và siêu cao đặt ra nhiều vấn đề trong phân tích ổn định. Từ lý thuyết tính ổn định đàn hồi của thanh chịu nén Euler có chuyển vị nhỏ đến nay, các nghiên cứu về ổn định đã phát triển sang các bài toán phân tích phi tuyến, ổn định động, phân tích ổn định và sau ổn định. Hiện nay việc nghiên cứu các bài toán phân tích phi tuyến ứng xử ổn định và sau ổn định là một vấn đề được nhiều nhà khoa học trên thế giới quan tâm. Để giải các bài toán phân tích phi tuyến cần sử dụng phương pháp lặp và lựa chọn hàm điều khiển đảm bảo có thể xác định chính xác đường cân bằng và các điểm tới hạn. Trong bài báo dưới đây tác giả sẽ trình bày các phương pháp giải bài toán phân tích phi tuyến ổn định theo tiêu chuẩn ổn định Drucker-Hill. Trên cơ sở phân tích các phương pháp, trong bài báo sẽ đưa ra các khuyến cáo lựa chọn phương pháp phù hợp xác định đường cân bằng và các điểm tới hạn trong phân tích phi tuyến ổn định hệ thanh.

2. Tiêu chuẩn ổn định Drucker – Hill trong bài toán phân tích phi tuyến ổn định

Tiêu chí ổn định của Drucker hay còn gọi là tiêu chuẩn ổn định của Hill [3,4] được sử dụng rộng rãi trong bài toán phân tích phi tuyến ổn định của kết cấu của nhiều nghiên cứu trên thế giới và được phát biểu như sau: “Tương ứng với tải trọng tác dụng, nếu hệ ở trạng thái cân bằng ổn định thì độ cứng của hệ dương, nếu hệ ở trạng thái cân bằng không ổn định thì độ cứng âm, nếu hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định thì độ cứng bằng không”

Như vậy, theo tiêu chuẩn ổn định Drucker -Hill:

$$\begin{aligned} \frac{dP}{d\Delta} > 0 &: \text{hệ ở trạng thái cân bằng ổn định.} \\ \frac{dP}{d\Delta} < 0 &: \text{hệ ở trạng thái cân bằng ổn định không ổn định.} \\ \frac{dP}{d\Delta} = 0 &: \text{hệ ở trạng thái cân bằng phiếm định.} \end{aligned}$$

Đường cân bằng và các điểm tới hạn của hệ phi tuyến theo tiêu chuẩn Drucker-Hill thể hiện ở Hình 1.

Có thể thấy dọc theo đường cân bằng OABCDE có thể phân ra thành: trạng thái cân bằng ổn định - OA và DE; trạng thái cân bằng không ổn định - AB, BC và CD. Các điểm tới hạn tải trọng: A, D. Các điểm tới hạn chuyển vị là các điểm: B, C.

3. Hệ phương trình giải bài toán phân tích phi tuyến ổn định

Xét hệ N phương trình phi tuyến với u và q là các biến chuyển vị và tải trọng [1,2]:

$$\begin{aligned} \vec{q}(\vec{u}) &= 0; \quad \vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_N); \quad \vec{q} = (q_1, q_2, \dots, q_N) \end{aligned} \quad (1)$$

Khai triển chuỗi Taylor cho hệ phương trình trên:

$$\vec{q}_i(\vec{u} + \delta \vec{u}) = \vec{q}_i(\vec{u}) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial \vec{q}_i}{\partial u_j} \delta u_j + O(\delta \vec{u})^2 \quad (2)$$

Ma trận các đạo hàm riêng (ma trận Jacobi), ma trận độ cứng tiếp tuyến:

$$K_{ij} = \frac{\partial \vec{q}_i}{\partial u_j} \quad (i, j=1, 2, \dots, N) \quad (3)$$

ThS. Trịnh Tiến Khương

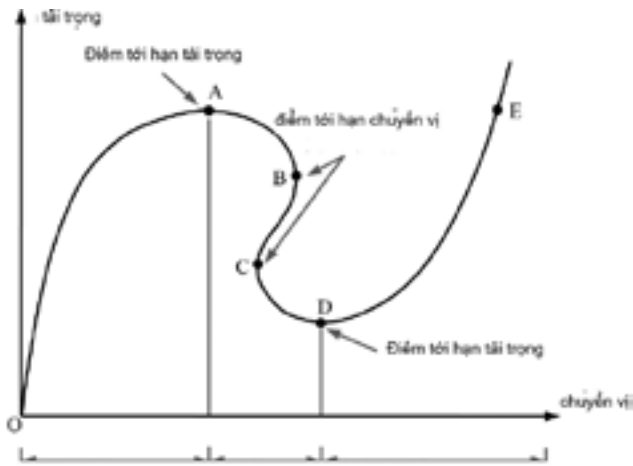
Giảng viên bộ môn Kết cấu bê tông, Khoa Xây dựng, Trường ĐH Kiến trúc Hà Nội
ĐT: 0913009120

Email: trintienkhuong@gmail.com

Ngày nhận bài: 28/5/2020

Ngày sửa bài: 29/5/2020

Ngày duyệt đăng: 9/3/2022



Hình 1. Minh họa đường cân bằng và các điểm tới hạn của hệ phi tuyến

Suy ra:
$$\vec{q}(u + \delta u) = \vec{q}(u) + K \cdot \delta u + O(\delta u^2)$$

Bỏ qua vô cùng bé bậc cao $O(\delta u^2)$ và cho $\vec{q}(u + \delta u) = 0$ ta có:

$$K \cdot \delta u + u(x) = 0 \Rightarrow \delta u = -K^{-1} \cdot q(u) \Rightarrow u_{\text{new}} = u_{\text{old}} + \delta u$$

Hay nghiệm gần đúng ở lần lặp thứ j là:

$$u_j = u_{j-1} + \delta u_j \quad (4)$$

Biểu thức chuyển vị và tải trọng ngoài ở bước gia tải thứ i được viết dưới dạng truy hồi theo kết quả ở bước $i-1$ như sau:

$$u_j^i = u_{j-1}^{i-1} + \Delta u_j^i \quad (5)$$

$$p_j^i = p_{j-1}^{i-1} + \Delta p_j^i \quad (6)$$

$$\Delta u_j^i = \Delta u_{j-1}^i + \delta u_j^i \quad (7)$$

$$\Delta p_j^i = \Delta p_{j-1}^i + \delta p_j^i \quad (8)$$

Phương trình số gia ở bước lặp thứ j có dạng

$$K_{j-1} \cdot \delta u_j^i = p_j^i - q(u_{j-1}^i) \quad (9)$$

Gọi λ là thông số tải trọng được chỉ định ban đầu. Tải trọng p được viết qua thông số tải $p = \lambda \cdot \bar{p}$, số gia tải trọng ở bước lặp thứ j qua thông số tải xác định như sau

$$\delta p_j^i = \delta \lambda_j^i \cdot \bar{p} \quad (10)$$

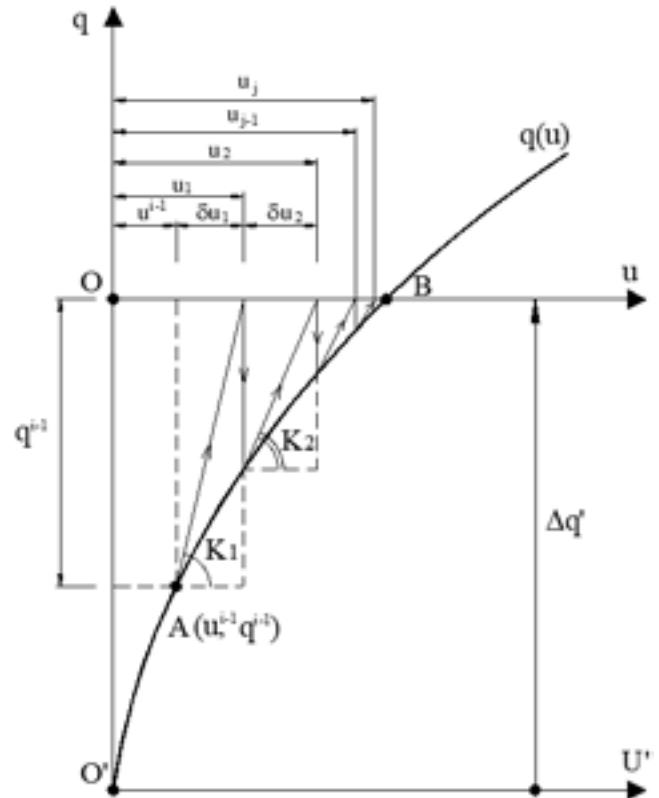
Từ (9) và (10) nhận được phương trình cân bằng số gia

$$K_{j-1} \cdot \delta u_j^i = r_{j-1}^i + \delta \lambda_j^i \cdot \bar{p} \quad (11)$$

Phương trình (11) có $N+1$ ẩn số gồm N ẩn số gia chuyển

vị δu_j^i và 1 ẩn số gia thông số tải trọng $\delta \lambda_j^i$

4. Các phương pháp lặp giải hệ phương trình cân bằng phi tuyến xác định đường cân bằng và tải trọng tới hạn



Hình 2. Phương pháp lặp Newton-Raphson

4.1. Phương pháp lặp Newton-Raphson cổ điển và ý tưởng về đường hỗ trợ

Trình tự giải bài toán phân tích phi tuyến bằng phương pháp lặp Newton-Raphson cổ điển [5] thể hiện trên hình 2. Nội dung của phương pháp lặp là tìm điểm B có hoành độ là nghiệm của phương trình $q(u)=0$ nếu biết điểm $A(u^{i-1}, q^{i-1})$ trên đường $q(u)$ đến bước lặp có sai số nằm trong giới hạn theo yêu cầu. Điều kiện để quá trình lặp hội tụ là $\det(K) \neq 0$. Đây là nhược điểm của phương pháp khi tìm điểm tới hạn (Load limit point) vì điểm này có tiếp tuyến ngang.

Để xử lý nhược điểm này đã xuất hiện ý tưởng đưa ra đường hỗ trợ để tìm các điểm cân bằng do Risk [5] đề xuất. Trình tự giải bài toán lặp Newton-Risk với việc sử dụng đường hỗ trợ thể hiện trên hình 3.

Phương trình hỗ trợ của Risk có dạng tổng quát như sau

$$a_j^i \cdot \delta u_j^i + b_j^i \cdot \delta \lambda_j^i = c_j^i \quad (12)$$

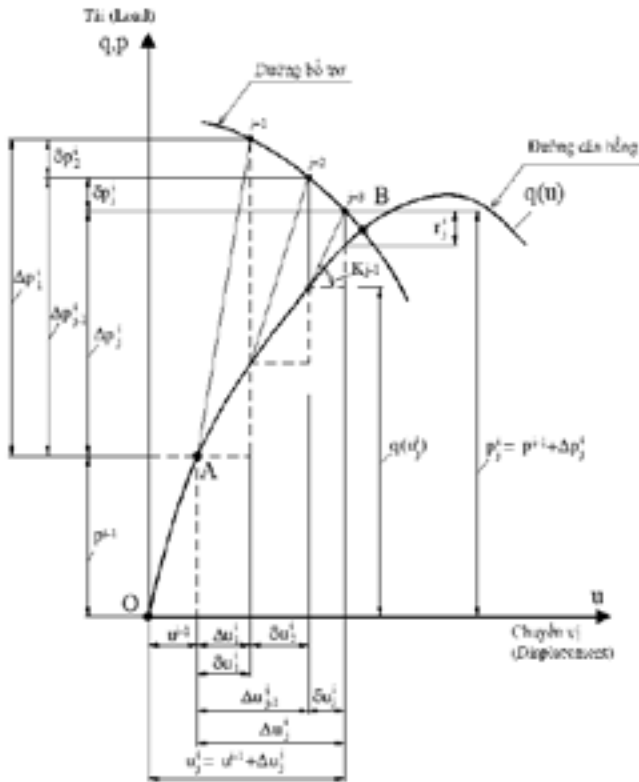
a_j^i, b_j^i, c_j^i là các hệ số được chọn tùy theo cách giải bài toán, phụ thuộc vào biến điều khiển được lựa chọn (tải trọng, chuyển vị hay cả hai)

Phương trình cân bằng số gia sử dụng đường hỗ trợ được viết dưới dạng sau

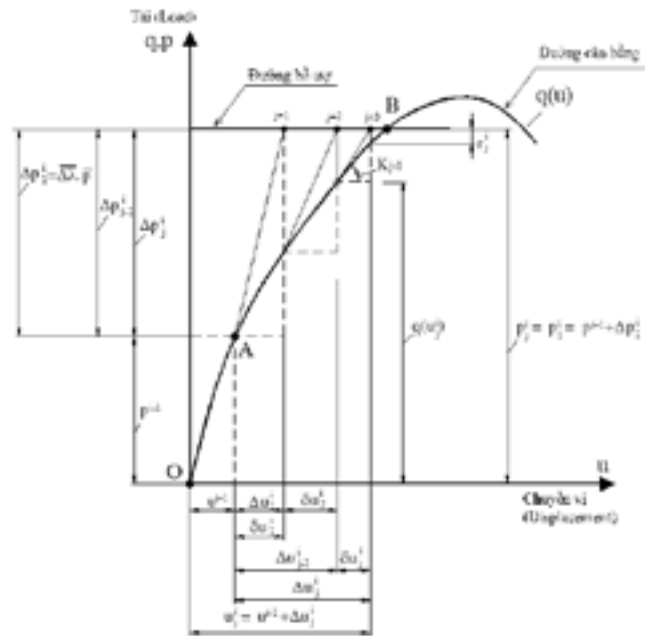
$$\begin{bmatrix} K_{j-1} & -\bar{p} \\ \{a_j^i\}^T & b_j^i \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_j^i \\ \delta \lambda_j^i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_{j-1}^i \\ c_j^i \end{Bmatrix} \quad (13)$$

4.2. Phương pháp điều khiển tải trọng sử dụng đường hỗ trợ

Phương pháp điều khiển tải trọng có sử dụng đường hỗ trợ là phương pháp lặp Newton-Raphson cải tiến. Theo



Hình 3. Phương pháp lặp Newton-Risk



Hình 4. Phương pháp điều khiển tải trọng

phương pháp điều khiển tải trọng thì tải trọng ngoài được chỉ định tại lần lặp đầu tiên ($j=1$) trong bước gia tải thứ i và giữ không đổi trong những lần lặp tiếp theo ($j>1$) cho đến khi hội tụ ở bước gia tải i này, như minh họa trong hình 4.

Số gia thông số tải trọng và các hệ số:

$$\delta \lambda_j^i = \begin{cases} \overline{\Delta \lambda} & \text{for } j=1 \\ 0 & \text{for } j \geq 2 \end{cases}$$

$$a_j^i = 0; \quad b_j^i = 1$$

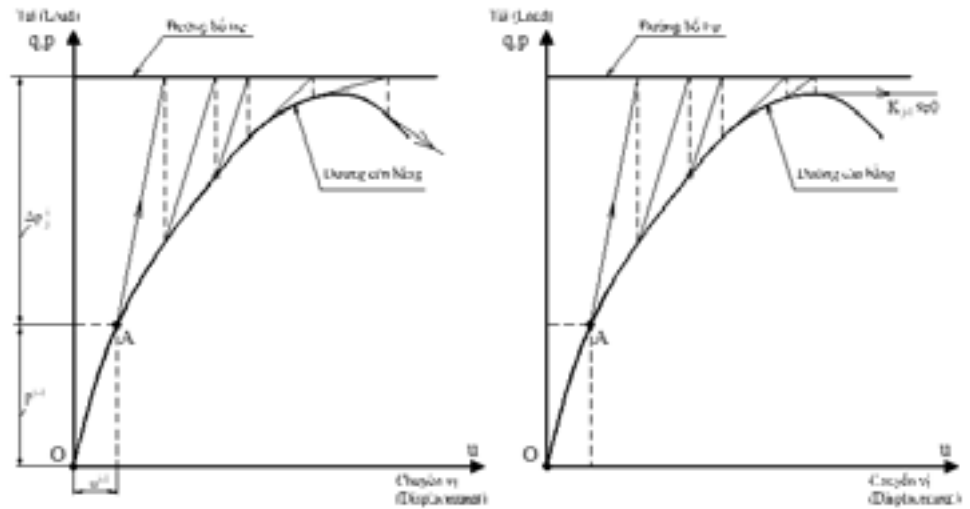
$$c_j^i = \begin{cases} \overline{\Delta \lambda} & \text{for } j=1 \\ 0 & \text{for } j \geq 2 \end{cases}$$

Phương trình cân bằng số gia với điều khiển tải trọng có dạng

$$\begin{cases} K_{j-1} \cdot \delta u_1^i = \overline{\Delta \lambda} \cdot \bar{p} & \text{for } j=1 \\ K_{j-1} \cdot \delta u_j^i = r_{j-1}^i & \text{for } j \geq 2 \end{cases} \quad (13)$$

Phương pháp điều khiển tải trọng được áp dụng rộng rãi và hiệu quả trong các bài toán phi tuyến tiếp xúc nhưng lại gặp khó khăn trong bài toán tìm tải trọng giới hạn. Phương pháp này sẽ không hội tụ khi định thức của ma trận tiếp tuyến có giá trị rất nhỏ hoặc khi số gia tải trọng làm cho đường hỗ trợ vượt ngoài đường cân bằng (hình 5).

4.3. Phương pháp điều khiển chuyển vị sử dụng đường hỗ trợ



Hình 5. Trường hợp phương pháp điều khiển tải trọng không hội tụ

Phương pháp điều khiển chuyển vị sử dụng một thành phần chuyển vị như là một thông số điều khiển để tìm các điểm trên đường cân bằng. Trong véc tơ chuyển vị u tổng quát, thành phần chuyển vị được chọn để điều khiển như sau

$$\delta u_{j,ctrl}^i = \begin{cases} \overline{\Delta u} & \text{for } j=1 \\ 0 & \text{for } j \geq 2 \end{cases} \quad (14)$$

Với $\overline{\Delta u}$ là giá trị số gia chuyển vị ban đầu.

Phương trình số gia chuyển vị có dạng như sau

$$\delta u_{j,ctrl}^i = \delta \lambda_j^i \cdot \delta u_{p_j,ctrl}^i + \delta u_{r_j,ctrl}^i \quad (15)$$

$$\text{Hay } \delta\lambda_j^i = \frac{\delta u_{j,ctrl}^i - \delta u_{r_j,ctrl}^i}{\delta u_{p_j,ctrl}^i}$$

Trong lần lặp đầu tiên ($j=1$) của bước gia tăng chuyển vị thứ i , biểu thức số gia tải trọng được viết như sau

$$\delta\lambda_j^i = \begin{cases} \frac{\delta u_{j,ctrl}^i}{\delta u_{p_j,ctrl}^i} & \text{for } j=1 \\ \frac{-\delta u_{r_j,ctrl}^i}{\delta u_{p_j,ctrl}^i} & \text{for } j \geq 2 \end{cases} \quad (16)$$

Số gia thông số tải và các hệ số a , b , c xác định như sau

$$\delta\lambda_j^i = \begin{cases} \frac{\overline{\Delta u}}{\delta u_{p_j,ctrl}^i} & \text{for } j=1 \\ \frac{-\delta u_{r_j,ctrl}^i}{\delta u_{p_j,ctrl}^i} & \text{for } j \geq 2 \end{cases} \quad (17)$$

$$a_j^i = \{0, 0, \dots, 1, \dots, 0\}$$

control displacement

$$b_j^i = 0$$

$$c_j^i = \begin{cases} \overline{\Delta u} & \text{for } j=1 \\ 0 & \text{for } j \geq 2 \end{cases}$$

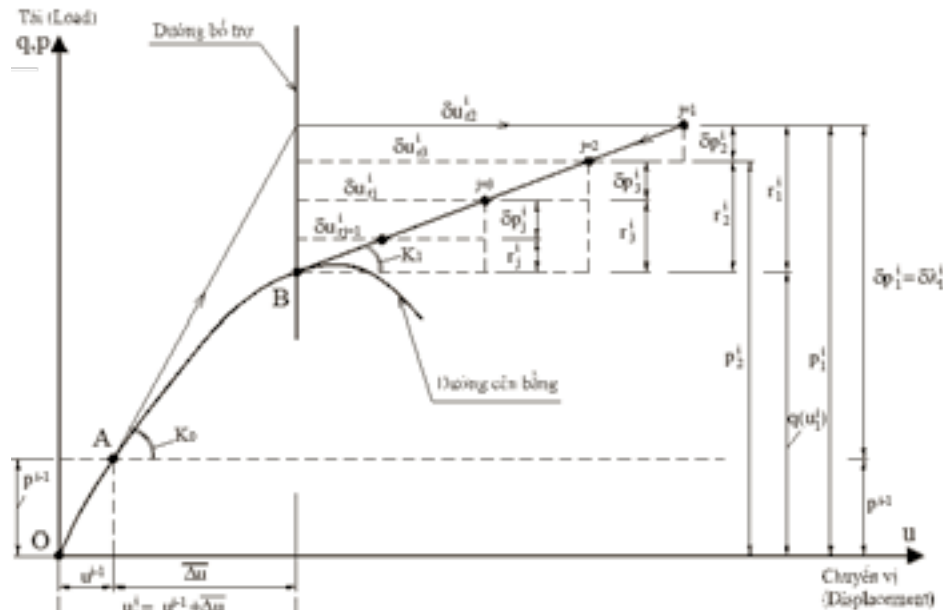
Phương pháp điều khiển chuyển vị có thể khắc phục trong việc tìm giới hạn tải trọng (Load Limit Point) tuy nhiên lại gặp khó khăn trong việc tìm giới hạn chuyển vị (Displacement Limit Point) như hình 7.

4.3. Phương pháp điều khiển đồng thời tải trọng và chuyển vị sử dụng đường hỗ trợ

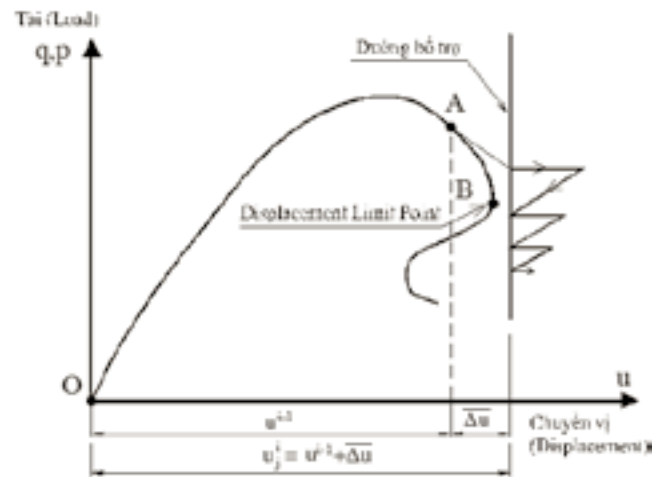
Để khắc phục khó khăn của hai phương pháp điều khiển tải trọng và điều khiển chuyển vị khi tìm điểm giới hạn tải và giới hạn chuyển vị, các nghiên cứu của nhiều tác giả trên thế giới đề xuất phương pháp chiều dài dây cung dùng phương trình hỗ trợ dưới dạng điều khiển đồng thời cả tải trọng và chuyển vị [6]. Các phương trình hỗ trợ có dạng mặt cầu, mặt elip hay mặt phẳng.

Phương trình đường (mặt) hỗ trợ được viết dưới dạng

$$\{\Delta u_j^i\} \cdot \{\Delta u_j^i\}^T + \eta \cdot (\delta\lambda_j^i)^2 = (\Delta s_j^i)^2 \quad (18)$$



Hình 6. Phương pháp điều khiển chuyển vị



Hình 7. Trường hợp phương pháp điều khiển chuyển vị không hội tụ

Trong đó η là tham số luôn dương phụ thuộc vào dạng mặt hỗ trợ.

Số gia thông số tải và các hệ số a , b , c xác định như sau

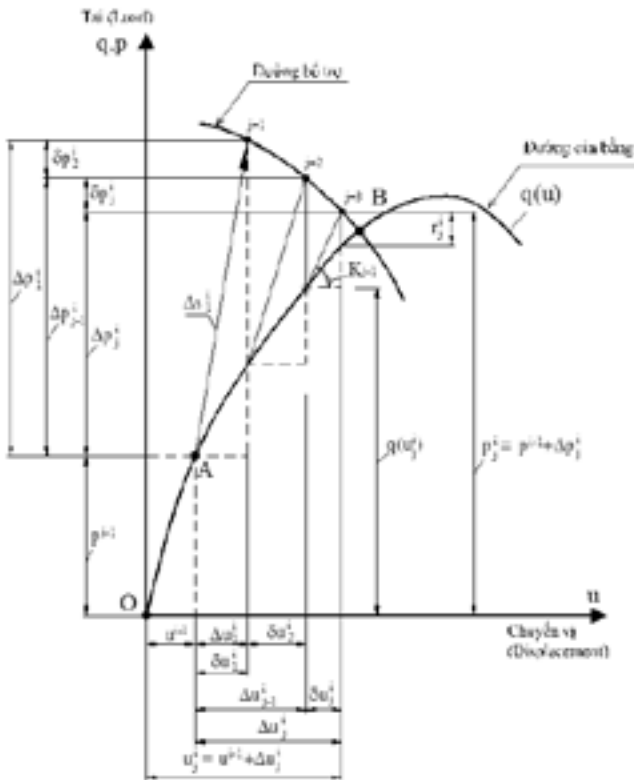
$$\delta\lambda_j^i = \begin{cases} \pm \frac{\overline{\Delta s}}{\sqrt{\delta u_{p1}^i \cdot \delta u_{p1}^i + \eta}} & \text{for } j=1 \\ -\frac{\delta u_{p1}^i \cdot \delta u_{p1}^i}{\delta u_{p1}^i \cdot \delta u_{p1}^i + \eta \cdot \delta\lambda_1^i} & \text{for } j \geq 2 \end{cases} \quad (19)$$

$$a_j^i = \delta u_1^i = \delta\lambda_1^i \cdot \delta u_{p1}^i; \quad b_j^i = \eta \cdot \delta\lambda_1^i$$

$$c_j^i = \begin{cases} (\overline{\Delta s})^2 & \text{for } j=1 \\ 0 & \text{for } j \geq 2 \end{cases}$$

5. Kết luận

Bài toán phân tích phi tuyến ổn định kết cấu liên quan đến việc xác định điểm giới hạn cả tải trọng và chuyển vị trong



Hình 8. Phương pháp điều khiển chiều dài dây cung

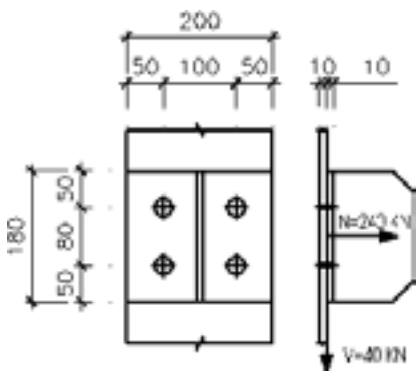
giai đoạn ổn định và mất ổn định. Phương pháp Newton-Raphson phù hợp với việc giải các bài toán phi tuyến phân tích tĩnh kết cấu nhưng không phù hợp với bài toán phân tích phi tuyến trong giai đoạn ổn định và mất ổn định của hệ kết cấu. Sự ra đời của lý thuyết sử dụng hàm hỗ trợ là một bước tiến trong nghiên cứu phương pháp tính phi tuyến ổn định. Việc lựa chọn phương pháp điều khiển phụ thuộc vào mục tiêu phân tích của bài toán. Phương pháp chiều dài dây cung với biến điều khiển đồng thời cả tải trọng và chuyển vị là phương pháp cho phép xác định điểm giới hạn tải trọng và chuyển vị trong phân tích phi tuyến giai đoạn ổn định và sau ổn định của kết cấu./.

Tài liệu tham khảo

1. M. A. Crisfield, *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Volume 1&2*, John Wiley & Sons Ltd. 1997.
2. Crisfield, M. A., *A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure That Handles Snap-Through*, *Comput. Struct.*, 1981
3. Lê Thọ Trình, Đỗ Văn Bình, *Ổn định công trình*, Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, 2006.
4. Timosenko, *Ổn định đàn hồi*, Nhà xuất bản khoa học và kỹ thuật, 1976.
5. Riks, E., *The Application of Newton's Method to the Problem of Elastic Stability*, *ASME J. Appl. Mech.*, 1972.
6. Ritto-Correa, M., and Camotim, D., *On the Arc-Length and Other Quadratic Control Methods: Established, Less Known and New Implementation Procedures*, *Comput. Struct.*, 2008.

Các phương pháp giải bài toán phân tích phi tuyến...

(tiếp theo trang 39)



Hình 1. Ví dụ tính toán 1

Hệ số γ_{b1} được nhân với hệ số $(1 - N_t / P_b)$, trong đó N_t là lực kéo trên mỗi bu lông, P_b là lực căng của bu lông lấy bằng $P_b = f_{hb} A_{bn}$.

$$1 - N_t / P_b = 1 - 60000 / (770 \times 245) = 0,68$$

Thay vào công thức có khả năng chịu trượt của một bu lông:

$$[N]_b = f_{hb} A_{bn} \gamma_{b1} \left(\frac{\mu}{\gamma_{b2}} \right) n_f = 770 \times 245 \times (0,8 \times 0,68) \times \frac{0,35}{1,17} \times 1$$

$$= 30700 N = 30,7 kN$$

$$N_v = 10 kN < [N]_b = 30,7 kN.$$

$$[N]_b = \frac{f_{hb} A_{bn} \mu}{\gamma_{b2}} \quad n \geq \frac{N}{[N]_b n_f \gamma_{b1} \gamma_c} \quad (6) \quad (7)$$

$$n \geq \frac{N}{[N]_b n_f \gamma_{b1} \gamma_c} \rightarrow N \leq n [N]_b n_f \gamma_{b1} \gamma_c = n \frac{f_{hb} A_{bn} \mu}{\gamma_{b2}} n_f \gamma_{b1} \gamma_c$$

$$N \leq n \frac{f_{hb} A_{bn} \mu}{\gamma_{b2}} n_f \gamma_{b1} \gamma_c = 4 \times \frac{770 \times 245 \times 0,35}{1,17} \times 1 \times (0,8 \times 0,68) \times 1$$

$$= 122800 N = 122,8 kN$$

Mà $N = 40 kN < 122,8 kN$ thỏa mãn. Vậy bu lông đảm bảo khả năng chịu lực.

4. Kết luận và kiến nghị

Bài báo này đã chỉ ra một số điểm mới về liên kết bu lông giữa tiêu chuẩn Nga SP so với Tiêu chuẩn Việt Nam TCVN 5575:2012.

Có thể áp dụng một số công thức tính toán cho liên kết bu lông thô, thường, tinh chịu kéo, cắt đồng thời; bu lông cường độ cao khi chịu lực kéo ngoài làm giảm khả năng chịu lực mà tiêu chuẩn Việt Nam không có./.

Tài liệu tham khảo

1. Phạm Văn Hội, Nguyễn Quang Viên và nnk (2010), "Kết cấu thép - Cấu kiện cơ bản", Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
2. Phạm Văn Hội, Nguyễn Quang Viên và nnk (2006) "Kết cấu thép - Công trình dân dụng và công nghiệp", Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
3. Tiêu chuẩn Việt Nam TCVN 5575:2012, "Kết cấu thép - Tiêu chuẩn thiết kế", Nhà xuất bản Khoa học và Kỹ thuật, Hà Nội.
4. SP 16.13330.2017.