TÍNH CHẤT CỦA HÀM VÔ HƯỚNG HÓA CỦA BÀI TOÁN TỐI ƯU TẬP VỚI NÓN PHỤ THUỘC BIẾN VÀ ỨNG DỤNG

Đinh Vinh Hiển* và **Nguyễn Đình Inh**

Khoa Khoa học Ứng dụng, Trường Đại học Công nghiệp Thực phẩm Thành phố Hồ Chí Minh

**Tác giả liên hệ: hiendinhvinh@gmail.com*

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 17/5/2021; Ngày nhận chỉnh sửa: 07/7/2021; Ngày duyệt đăng: 14/02/2022

Tóm tắt

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu tính chất và ứng dụng của hàm vô hướng hóa phi tuyến của bài toán tối ưu tập với nón phụ thuộc biến. Trước hết, chúng tôi mở rộng hàm vô hướng hóa phi tuyến cho trường hợp nón phụ thuộc biến dựa trên quan hệ thứ tự giữa các tập hợp. Sau đó, chúng tôi khảo sát một số tính chất cơ bản của hàm vô hướng hóa đã xét ở trên. Cuối cùng, chúng tôi áp dụng các tính chất trên để thiết lập điều kiện tối ưu cho bài toán tối ưu tập với nón chứa biến. Các kết quả của chúng tôi là mới hoặc mở rộng các kết quả đã có trước đó.

Từ khóa: *Bài toán tối ưu tập, hàm vô hướng hóa phi tuyến, nón phụ thuộc biến.*

PROPERTIES OF SCALARIZING FUNCTIONS OF SET OPTIMIZATION PROBLEMS WITH VARIABLE CONES AND APPLICATIONS

Dinh Vinh Hien* and **Nguyen Dinh Inh**

Faculty of Applied Sciences, Ho Chi Minh City University of Food Industry

**Corresponding author: hiendinhvinh@gmail.com*

Article history

Received: 17/5/2021; Received in revised form: 07/7/2021; Accepted: 14/02/2022

Abstract

In this paper, we study properties and applications of nonlinear scalarizing functions of set optimization problems with variable cones. First, we extend the nonlinear scalarizing functions in the case of variable cones based on set less order relations. Next, we investigate some basic properties of such scalarizing functions. Finally, we apply the above properties to establish the optimal conditions for set optimization problems with variable cones. Our results are new or improve the existing ones in the literature.

Keywords: *Nonlinear scalarizing function, set optimization problem, variable cone.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.11.2.2022.933

Trích dẫn: Đinh Vinh Hiển và Nguyễn Đình Inh. (2022). Tính chất của hàm vô hướng hóa của bài toán tối ưu tập với nón phụ thuộc biến và ứng dụng. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 11*(2), 13-18.

1. Giới thiệu

Trong những năm gần đây, bài toán tối ưu đa trị đã được nhiều tác giả trong và ngoài nước quan tâm, nghiên cứu. Liên quan đến bài toán này, có hai hướng tiếp cận tùy thuộc vào cách ta định nghĩa nghiệm tối ưu. Cách cổ điển là tiếp cận theo tiêu chuẩn vectơ, trong đó nghiệm tối ưu được xác định dựa trên điểm hữu hiệu của hợp của tất cả các ảnh của ánh xạ mục tiêu (xem Jahn, 2011 và Luc, 1989). Nhược điểm của cách tiếp cận này là trong trường hợp tổng quát, ảnh của nghiệm tối ưu chưa chắc là tập "nhỏ nhất" theo một nghĩa nào đó. Để khắc phục nhược điểm này, một hướng tiếp cận khác đã được đề xuất dựa trên tiêu chuẩn tập hợp và do đó ta có bài toán tối ưu tập tương ứng. Theo đó, các tập ảnh sẽ được so sánh với nhau trên cơ sở quan hệ thứ tự giữa các tập hợp được đề xuất bởi Kuroiwa (1998). Bài toán tối ưu tập xuất hiện trong nhiều lĩnh vực của sản xuất, đời sống và đã được nghiên cứu bởi nhiều tác giả như: Gutiérrez *và cs.* (2015), Gutiérrez *và cs.* (2012), Hernández *và cs.* (2010), Jahn và Ha (2011), Lam Quoc Anh *và cs.* (2020a), Lam Quoc Anh *và cs.* (2020b)…

Phương pháp vô hướng hóa là một trong những công cụ hiệu quả để nghiên cứu bài toán tối ưu tập nói riêng và các bài toán trong tối ưu nói chung. Nhiều kiểu hàm vô hướng đã được đề xuất bởi nhiều tác giả và thông thường mỗi hàm vô hướng sẽ thích hợp cho một loại nghiệm của một bài toán nào đó. Đối với vô hướng hóa phi tuyến thì một trong những hàm phổ biến nhất là hàm Gerstewitz (xem Chen *và cs.*, 2005, Gerstewitz, 1983, Gerth và Weidner, 1990, Göpfert *và cs.*, 2006, Lam Quoc Anh *và cs.*, 2019). Sau đó, kiểu hàm này đã được mở rộng bởi Hamel và Löhne (2002) và Hamel và Löhne (2006). Gần đây, Gutiérrez *và cs.* (2015) đã nghiên cứu sâu hơn các tính chất của hàm này và áp dụng vào việc thiết lập điều kiện tối ưu cho nghiệm hữu hiệu và hữu hiệu yếu của bài toán tối ưu tập.

Trong công trình của mình, Gutiérrez *và cs.* (2015) đã xét hàm vô hướng hóa cho bài toán tối ưu tập với nón cố định (không phụ thuộc biến). Tuy nhiên trong nhiều trường hợp, nón cố định không phản ánh được những tình huống phát sinh do thực tiễn đặt ra. Chẳng hạn, khi chúng ta mua hàng hóa và dịch vụ trên thị trường thì tiêu chí để ta lựa chọn sản phẩm được xác định bởi một nón thứ tự nào đó. Đương nhiên rằng, nón thứ tự đó sẽ khác nhau cho từng đối tượng cụ thể, hay nói cách khác nón thứ tự trong trường hợp này là nón phụ thuộc biến.

Từ những quan sát ở trên, trong bài báo này, chúng tôi đề xuất một kiểu hàm vô hướng hóa phi tuyến cho bài toán tối ưu tập với nón phụ thuộc biến trên cơ sở mở rộng hàm vô hướng hóa của Gutiérrez *và cs.* (2015). Các kết quả nghiên cứu được áp dụng vào bài toán tối ưu tập tương ứng. Cấu trúc của bài báo được trình bày như sau. Phần 2 sẽ nhắc lại các định nghĩa và kết quả được sử dụng trong các phần kế tiếp. Các tính chất của hàm vô hướng hóa phi tuyến cho bài toán tối ưu tập với nón phụ thuộc biến sẽ được nghiên cứu trong Phần 3. Phần 4 sẽ trình bày một ứng dụng của các kết quả trên vào việc thiết lập mối quan hệ giữa điều kiện tối ưu của bài toán tối ưu tập và bài toán tối ưu vô hướng tương ứng. Cuối cùng, các nhận xét kết luận sẽ được nêu trong Phần 5.

2. Kiến thức chuẩn bị

Cho Y là không gian định chuẩn, C là nón lồi, đóng, có đỉnh trong Y, với phần trong khác rỗng. Chúng ta nhắc lại rằng một tập A được gọi là C-chính thường nếu $A+C\neq Y$, C-đóng nếu $A+C$ là một tập đóng, C-bị chặn nếu với mỗi lân cận U của điểm gốc trong Y, tồn tại một số dương t sao cho $A\subset tU+C$, C-compact nếu với một phủ bất kỳ của A có dạng $\{U_\alpha + C : U_\alpha$ là tập mở$\}$ tồn tại một phủ con hữu hạn.

Nhận xét 2.1. Theo Luc (1989) thì mỗi tập C-compact là C-đóng và C-bị chặn. Hơn nữa, nếu A là compact thì A là C-compact.

Bổ đề 2.2. (Gutiérrez *và cs.*, 2012) Một tập hợp khác rỗng $A\subset Y$ là C-chính thường nếu và chỉ nếu không tồn tại phần tử $e\in \operatorname{int} C$ sao cho $-e+A\subset A+C$.

Ta ký hiệu $\mathcal{P}(Y)$ là họ các tập con không rỗng của Y. Với mỗi $Q\in\{C,\operatorname{int} C\}$, chúng ta nhắc lại quan hệ thứ tự tập trong $\mathcal{P}(Y)$ như sau: cho hai tập hợp $A,B\in\mathcal{P}(Y)$,

$$A\preceq_Q B \Leftrightarrow B\subset A+Q.$$

Các quan hệ này được giới thiệu bởi Young (1931) trong đại số, Nishnianidze (1984) trong lý thuyết điểm bất động, và sau đó là Kuroiwa (1998) trong lý thuyết tối ưu.

Cho X là không gian định chuẩn, $F: X \rightrightarrows Y$ là một ánh xạ đa trị, và M là một tập con không rỗng của X. Ta xét bài toán tối ưu tập sau đây:

$$(P)\ Minimize\ \ F(x)$$
$$subject\ to\ \ x \in M.$$

Gọi $K: X \rightrightarrows Y$ là ánh xạ đa trị sao cho với mỗi $x \in X$, $K(x)$ là nón lồi, đóng, có đỉnh trong Y, với $\operatorname{int} K(x) \neq \varnothing$.

Dựa trên ý tưởng của nghiệm cực tiểu Robust với cấu trúc trội chứa biến (variable domination structure) được giới thiệu bởi Köbis và Tammer (2017) và nghiệm cực tiểu được giới thiệu bởi Kuroiwa (1998), chúng tôi đề xuất ý tưởng nghiệm của bài toán (P) như sau:

Định nghĩa 2.3. Một phần tử $x_0 \in M$ được gọi là nghiệm hữu hiệu của bài toán (P) nếu

$x \in M, F(x) \preceq_{K(x_0)} F(x_0) \Rightarrow F(x_0) \preceq_{K(x)} F(x)$. Ta ký hiệu tập hợp các nghiệm hữu hiệu của (P) bởi Min.

Cho $\mathcal{S} \subset \mathcal{P}(Y)$, chúng tôi đề xuất các định nghĩa sau trên cơ sở ý tưởng của Gutiérrez *và cs.* (2015).

Định nghĩa 2.4. Hàm $h: \mathcal{S} \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ được gọi là

(i) order representing (order representing ngặt) tại $A \in \mathcal{S}$ đối với $x_0 \in M$ nếu,

$$B \in \mathcal{S}:\ h(B) \le h(A)\ \Rightarrow\ B \preceq_{K(x_0)} A$$
$$(h(B) < h(A)\ \Rightarrow\ B \preceq_{\operatorname{int} K(x_0)} A,\ \text{tương ứng}).$$

(ii) đơn điệu (đơn điệu ngặt) tại $A \in \mathcal{S}$ đối với $x_0 \in M$ nếu,

$$B \in \mathcal{S}:\ B \preceq_{K(x_0)} A\ \Rightarrow\ h(B) \le h(A)$$
$$(B \preceq_{\operatorname{int} K(x_0)} A\ \Rightarrow\ h(B) < h(A),\ \text{tương ứng}).$$

h được gọi là order representing (order representing ngặt, đơn điệu, đơn điệu ngặt) trên $\mathcal{S}$, nếu nó order representing (order representing ngặt, đơn điệu, đơn điệu ngặt, tương ứng) tại mỗi $A \in \mathcal{S}$.

3. Tính chất của hàm vô hướng hóa

Cho $e: M \to Y$ là ánh xạ liên tục sao cho $e(x) \in \operatorname{int} K(x), \forall x \in M$. Dựa trên ý tưởng của Hamel và Löhne (2002), Hamel và Löhne (2006), và Gutiérrez *và cs.* (2015), với mỗi $x \in M$, chúng tôi đề xuất định nghĩa hàm vô hướng hóa $\xi_{e,x}: \mathcal{P}(Y) \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ như sau:

$$\xi_{e,x}(A) := \inf\{t \in \mathbb{R} : A \preceq_{K(x)} te(x) + F(x)\},$$
$$\forall A \in \mathcal{P}(Y).$$

Mệnh đề 3.1. Cho $A, B \in \mathcal{P}(Y)$, khi đó:

(i) Với mọi $y \in M$, nếu A là $K(y)$-bị chặn thì tồn tại $t > 0$ sao cho

$$B - te(y) \preceq_{\operatorname{int} K(y)} A.$$

(ii) Với mọi $y \in M$, nếu A là $K(y)$-compact và $B \preceq_{\operatorname{int} K(y)} A$ thì tồn tại $t > 0$ sao cho

$$B + te(y) \preceq_{\operatorname{int} K(y)} A.$$

Chứng minh. (i) Giả sử A là $K(y)$-bị chặn. Khi đó, với mọi $z \in B$, hiển nhiên rằng $A - z$ là $K(y)$-bị chặn và $-e(y) + \operatorname{int} K(y)$ là một lân cận của điểm gốc trong Y. Do đó, tồn tại $t > 0$ sao cho

$$A - z \subset t(-e(y) + \operatorname{int} K(y)) + K(y)$$
$$= -te(y) + \operatorname{int} K(y).$$

Vì vậy $A \subset B - te(y) + \operatorname{int} K(y)$, nghĩa là $B - te(y) \preceq_{\operatorname{int} K(y)} A$.

(ii) Do $A \subset B + \operatorname{int} K(y)$ và $B + \operatorname{int} K(y)$ là tập mở nên với mọi $z \in A$, tồn tại $t_z > 0$ sao cho $z - t_z e(y) \in B + \operatorname{int} K(y)$. Điều này dẫn đến

$$A \subset \bigcup_{z \in A} (t_z e(y) + B + \operatorname{int} K(y))$$
$$= \bigcup_{z \in A} (t_z e(y) + B + \operatorname{int} K(y) + K(y)).$$

Bởi vì A là $K(y)$-compact, tồn tại $\{z_1, ..., z_n\} \subset A$ sao cho

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} (t_{z_i} e(y) + B + \operatorname{int} K(y)).$$

Đặt $t = \min\{t_{z_1}, ..., t_{z_n}\} > 0$, ta đi đến $A \subset te(y) + B + \operatorname{int} K(y)$. Mệnh đề đã được chứng minh. □

Mệnh đề 3.2. Cho $x \in M, A \in \mathcal{P}(Y)$, khi đó:

(i) $\xi_{e,x}(A) > -\infty$ nếu và chỉ nếu A là $K(x)$-chính thường.

(ii) Nếu $F(x)$ là $K(x)$-bị chặn thì $\xi_{e,x}(A) < +\infty$.

Chứng minh. (i) Nếu $\xi_{e,x}(A) = -\infty$ thì $\{t \in \mathbb{R} : A \preceq_{K(x)} te(x) + F(x)\} = \mathbb{R}$ và

$$\bigcup_{t\in\mathbb{R}} (te(x) + F(x)) \subset A + K(x). \quad (3.1)$$

Với mỗi $u \in Y$, ta cần chỉ ra tồn tại $t < 0$ sao cho $u \in te(x) + K(x)$. Thật vậy, do $e(x) \in \operatorname{int} K(x)$, tồn tại $\epsilon > 0$ sao cho $B(x) := \{v \in Y : \|v - e(x)\| < \epsilon\} \subset \operatorname{int} K(x)$. Do đó, ta có thể chọn $t < 0$ sao cho $\left\| e(x) - \frac{1}{t}u - e(x) \right\| = \frac{1}{|t|}\|u\| < \epsilon$. Vì vậy, $e(x) - \frac{1}{t}u \in B(x) \subset \operatorname{int} K(x) \subset K(x) = -\frac{1}{t}K(x)$. Cho nên $te(x) - u \in -K(x)$ và $u \in te(x) + K(x)$. Kết quả là $\bigcup_{t<0}(te(x) + K(x)) = Y$. Kết hợp điều này với (3.1) ta thu được

$$Y = Y + F(x) = \bigcup_{t<0}(te(x) + K(x)) + F(x)$$
$$= \bigcup_{t<0}(te(x) + K(x) + F(x)) \subset A + K(x).$$

Điều này có nghĩa là A không $K(x)$-chính thường.

Đảo lại, nếu A không $K(x)$-chính thường thì $te(x) + F(x) \subset Y = A + K(x), \forall t \in \mathbb{R}$. Do đó $A \preceq_{K(x)} te(x) + F(x), \forall t \in \mathbb{R}$ và $\xi_{e,x}(A) = -\infty$.

(ii) Từ $F(x)$ là $K(x)$-bị chặn, theo Mệnh đề 3.1(i), tồn tại $t > 0$ sao cho $A - te(x) \preceq_{\operatorname{int} K(x)} F(x)$, nghĩa là $F(x) \subset A - te(x) + \operatorname{int} K(x)$. Từ đó $F(x) + te(x) \subset A + \operatorname{int} K(x) \subset A + K(x)$, hay $A \preceq_{K(x)} te(x) + F(x)$. Do vậy $\xi_{e,x}(A) < +\infty$. □

Định lý 3.3. Với mọi $x \in M$, ta có:

(i) $\xi_{e,x}$ đơn điệu trên $\mathcal{P}(Y)$ đối với x.

(ii) $\xi_{e,x}(A + te(x)) = \xi_{e,x}(A) + t, \forall A \in \mathcal{P}(Y), t \in \mathbb{R}$.

Chứng minh. (i) Với mọi $A, B \in \mathcal{P}(Y)$, giả sử $A \preceq_{K(x)} B$, tức là $B \subset A + K(x)$. Khi đó

$$\{t \in \mathbb{R} : te(x) + F(x) \subset B + K(x)\}$$
$$\subset \{t \in \mathbb{R} : te(x) + F(x) \subset A + K(x)\}.$$

Do vậy $\xi_{e,x}(A) \le \xi_{e,x}(B)$.

(ii) Lấy $A \in \mathcal{P}(Y)$, $t \in \mathbb{R}$, đặt

$$G(x) = \{r \in \mathbb{R} : (r - t)e(x) + F(x) \subset A + K(x)\},$$ và

$$H(x) = \{r \in \mathbb{R} : re(x) + F(x) \subset A + K(x)\}.$$

Hiển nhiên là $G(x) = H(x) + t$. Chú ý rằng $G(x) = \varnothing$ khi và chỉ khi $H(x) = \varnothing$. Do đó

$$\xi_{e,x}(A + te(x)) = +\infty \Leftrightarrow \xi_{e,x}(A) = +\infty.$$

Mặt khác, nếu $\xi_{e,x}(A) < +\infty$ thì $\xi_{e,x}(A + te(x)) = \xi_{e,x}(A) + t$. □

Định lý 3.4. Cho $x \in M$, giả sử $F(x)$ là $K(x)$-chính thường, khi đó:

(i) $\xi_{e,x}(F(x)) = 0$.

(ii) $\xi_{e,x}$ order representing ngặt tại $F(x)$ đối với x. Hơn nữa, nếu A là $K(x)$-đóng và $\xi_{e,x}(A) \le \xi_{e,x}(F(x))$ thì $A \preceq_{K(x)} F(x)$.

Chứng minh. (i) Đặt $L(x) := \{t \in \mathbb{R} : F(x) \preceq_{K(x)} te(x) + F(x)\}$. Do $0 \in L(x)$ ta có $\xi_{e,x}(F(x)) \le 0$. Nếu $\xi_{e,x}(F(x)) < 0$ thì tồn tại $t < 0$ sao cho $F(x) \preceq_{K(x)} te(x) + F(x)$, tức là $te(x) + F(x) \subset F(x) + K(x)$. Theo Bổ đề 2.2, $F(x)$ không $K(x)$-chính thường, là điều mâu thuẫn.

(ii) Với mọi $A \in \mathcal{P}(Y)$, giả sử rằng $\xi_{e,x}(A) < \xi_{e,x}(F(x))$. Theo (i), $\xi_{e,x}(A) < 0$, nên tồn tại $t < 0$ sao cho $te(x) + F(x) \subset A + K(x)$. Do đó $F(x) \subset A + K(x) - te(x) \subset A + \operatorname{int} K(x)$. Kết quả là $A \preceq_{\operatorname{int} K(x)} F(x)$ và $\xi_{e,x}$ order representing ngặt tại $F(x)$ đối với x.

Hơn nữa, giả sử A là $K(x)$-đóng và $\xi_{e,x}(A) \le \xi_{e,x}(F(x))$. Khi đó:

Nếu $\xi_{e,x}(A) < \xi_{e,x}(F(x))$ thì bằng cách sử dụng lập luận như trên, ta có $A \preceq_{\operatorname{int} K(x)} F(x)$ và do đó $A \preceq_{K(x)} F(x)$.

Nếu $\xi_{e,x}(A) = \xi_{e,x}(F(x))$ thì theo (i), $\xi_{e,x}(A) = 0$. Vì thế tồn tại một dãy $\{t_n\}$, với

$t_n \searrow 0$ sao cho $t_n e(x)+F(x)\subset A+K(x)$. Nếu $F(x)\not\subset A+K(x)$ thì tồn tại y sao cho $y\in F(x)$ và $y\notin A+K(x)$. Do $A+K(x)$ là tập đóng nên tồn tại $n_0\in\mathbb{N}$ sao cho $t_n e(x)+y\in Y\setminus(A+K(x))$ với mọi $n>n_0$. Điều này mâu thuẫn với $t_n e(x)+F(x)\subset A+K(x)$. Do đó $A\preceq_{K(x)} F(x)$. □

Định lý 3.5. Cho $x\in M$, nếu $F(x)$ là $K(x)$-bị chặn và B là $K(x)$-compact thì $\xi_{e,x}$ đơn điệu ngặt tại B đối với x.

Chứng minh. Lấy $A\in\mathcal{P}(Y)$ sao cho $A\preceq_{\operatorname{int}K(x)} B$. Do B là $K(x)$-compact, theo Mệnh đề 3.1(ii), tồn tại $t>0$ sao cho $A+te(x)\preceq_{\operatorname{int}K(x)} B$ và do vậy $A+te(x)\preceq_{K(x)} B$. Khi đó:

Nếu A không $K(x)$-chính thường thì, theo Mệnh đề 3.2(i), $\xi_{e,x}(A)=-\infty$. Chú ý rằng B là $K(x)$-chính thường, cũng theo Mệnh đề 3.2(i), $\xi_{e,x}(B)>-\infty$. Do đó $\xi_{e,x}(A)<\xi_{e,x}(B)$.

Nếu A là $K(x)$-chính thường thì, do $F(x)$ là $K(x)$-bị chặn, theo Mệnh đề 3.2, $-\infty<\xi_{e,x}(A)<+\infty$. Định lý 3.3 cho ta

$$\xi_{e,x}(A)<t+\xi_{e,x}(A)=\xi_{e,x}(A+te(x))\le\xi_{e,x}(B).$$

Định lý đã được chứng minh. □

4. Ứng dụng

Trong phần này, ta ứng dụng các kết quả trên vào việc xét điều kiện tối ưu của bài toán tối ưu tập thông qua bài toán tối ưu vô hướng.

Trước hết, ta xét bài toán tối ưu vô hướng

$$(P_{\xi_{e,x}})\ \text{Minimize } \xi_{e,x}(F(u))$$
$$\text{subject to } u\in M.$$

Tập nghiệm của bài toán $(P_{\xi_{e,x}})$ được ký hiệu bởi $S(\xi_{e,x},M)$.

Nếu $F(x)\preceq_{K(y)} F(y)$ và $F(y)\preceq_{K(x)} F(x)$ thì ta nói $F(x)$ tương đương với $F(y)$ và ký hiệu $F(x)\sim F(y)$. Với mỗi $u_0\in M$, ta ký hiệu:

$$P(u_0):=\{u\in M: F(u)\sim F(u_0)\},$$

và

$$Q(u_0):=(M\setminus P(u_0))\cup\{u_0\}.$$

Định lý 4.1. Giả sử F có giá trị compact, khi đó các mệnh đề sau thỏa mãn:

(i) Nếu $u_0\in\operatorname{Min}$ thì $S(\xi_{e,u_0},M)\subset P(u_0)$.

(ii) Nếu $S(\xi_{e,u_0},M)=P(u_0)$ thì $u_0\in\operatorname{Min}$.

Chứng minh. (i) Với mọi $u\in Q(u_0), u\ne u_0$, ta có $u\in M$ và $F(u)\nsim F(u_0)$. Nếu $u_0\in\operatorname{Min}$ thì $F(u_0)\not\subset F(u)+K(u_0)$. Chú ý rằng, do F có giá trị compact nên $F(u)$ là $K(u_0)$-đóng. Ngoài ra $F(u_0)$ là $K(u_0)$-chính thường, vì nếu ngược lại thì theo Bổ đề 2.2, tồn tại $k\in\operatorname{int}K(u_0)$ sao cho $F(u_0)\subset F(u_0)+K(u_0)+k\subset F(u_0)+\operatorname{int}K(u_0)$. Do đó,

$$F(u_0)+K(u_0)\subset F(u_0)+\operatorname{int}K(u_0)+K(u_0)$$
$$=F(u_0)+\operatorname{int}K(u_0).$$

Đây là điều mâu thuẫn vì $F(u_0)+K(u_0)$ là tập đóng và $F(u_0)+\operatorname{int}K(u_0)$ là tập mở. Định lý 3.4(ii) cho ta $\xi_{e,u_0}(F(u))>\xi_{e,u_0}(F(u_0))$. Do đó

$$S(\xi_{e,u_0},Q(u_0))=\{u_0\}. \tag{3.2}$$

Theo Định lý 3.3 (i), ξ_{e,u_0} đơn điệu trên $\mathcal{P}(Y)$ đối với u_0. Lấy $v\in P(u_0)$, từ $F(v)\preceq_{K(u_0)} F(u_0)$, ta có $\xi_{e,u_0}(F(v))\le\xi_{e,u_0}(F(u_0))$. Kết hợp với (3.2) ta thu được $S(\xi_{e,u_0},M)\subset P(u_0)$.

(ii) Nếu $S(\xi_{e,u_0},M)=P(u_0)$ thì $S(\xi_{e,u_0},Q(u_0))=\{u_0\}$ do $u_0\in P(u_0)$. Giả sử ngược lại rằng $u_0\notin\operatorname{Min}$, khi đó tồn tại $u\in M$ sao cho $F(u)\preceq_{K(u_0)} F(u_0)$ và $F(u)\nsim F(u_0)$. Do đó $u\in Q(u_0)\setminus\{u_0\}$. Vì ξ_{e,u_0} đơn điệu tại $F(u_0)$ đối với u_0, $\xi_{e,u_0}(F(u))\le\xi_{e,u_0}(F(u_0))$. Từ điều kiện $S(\xi_{e,u_0},Q(u_0))=\{u_0\}$ dẫn đến điều mâu thuẫn là $u=u_0$. Định lý đã được chứng minh hoàn toàn. □

5. Kết luận

Bài báo đã đề xuất hàm vô hướng hóa phi tuyến cho bài toán tối ưu tập với nón phụ thuộc biến. Các tính chất của hàm này đã được nghiên cứu và ứng dụng vào việc thiết lập điều kiện tối ưu của nghiệm hữu hiệu của bài toán tối ưu tập thông qua bài toán tối ưu vô hướng tương ứng. Kết quả của bài báo có thể được tiếp tục mở rộng để nghiên cứu điều kiện tối ưu của nghiệm yếu, nghiệm lý tưởng, nghiệm xấp xỉ cũng như các chủ đề về tính ổn định và đặt chỉnh của bài toán tối ưu tập với nón phụ thuộc biến.

Tài liệu tham khảo

Chen, G. Y., Huang, X., and Yang, X. (2005). *Vector Optimization: Set-Valued and Variational Analysis*, Vol. 541. Berlin: Springer-Verlag.

Gerstewitz, C. (1983). Nichtkonvexe dualität in der vektoroptimierung. *Wissenschaftliche Zeitschrift Der Technischen Hochschule Leuna-Merseburg*, *25*(3), 357-364.

Gerth, C. and Weidner, P. (1990). Nonconvex separation theorems and some applications in vector optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications, 67*(2), 297-320.

Göpfert, A., Riahi, H., Tammer, C., and Zalinescu, C. (2006). *Variational methods in partially ordered spaces*. New York: Springer Science & Business Media.

Gutiérrez, C., Jiménez, B., and Novo, V. (2015). Nonlinear scalarizations of set optimization problems with set orderings. In: Hamel, A., Heyde, F., Löhne, A., Rudloff, B., and Schrage, C. *Set Optimization and Applications-The State of the Art,* (43-63). Berlin: Springer.

Gutiérrez, C., Miglierina, E., Molho, E., and Novo, V. (2012). Pointwise well-posedness in set optimization with cone proper sets. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications, 75*(4), 1822-1833.

Hamel, A. and Löhne, A. (2002). *Minimal set theorems* (11). Halle (Saale): Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg, Institut für Mathematik.

Hamel, A. and Löhne, A. (2006). Minimal element theorems and ekeland's principle with set relations. *Journal of Nonlinear and Convex Analysis*, *7*(1), 19-37.

Hernández, E., Rodríguez-Marín, L., and Sama, M. (2010). On solutions of set-valued optimization problems. *Computers & Mathematics with Applications*, *60*(5), 1401-1408.

Jahn, J. (2011). *Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions*. Berlin: Springer.

Jahn, J. and Ha, T.X.D. (2011). New order relations in set optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *148*(2), 209-236.

Köbis, E. and Tammer, C. (2017). Robust vector optimization with a variable domination structure. *Carpathian Journal of Mathematics*, *33*(3), 343-351.

Kuroiwa, D. (1998). The natural criteria in set-valued optimization. *Kyoto University*, (1031), 85-90.

Lam Quoc Anh, Tran Quoc Duy, and Dinh Vinh Hien. (2019). Stability for parametric vector quasiequilibrium problems with variable cones. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, *40*(4), 461-483.

Lam Quoc Anh, Tran Quoc Duy, Dinh Vinh Hien, Kuroiwa, D., and Petrot, N. (2020). Convergence of solutions to set optimization problems with the set less order relation. *Journal of Optimization Theory and Applications*, *185*(2), 416-432.

Lam Quoc Anh, Tran Quoc Duy, and Dinh Vinh Hien. (2020). Stability of effcient solutions to set optimization problems. *Journal of Global Optimization*, *78*(3), 563-580.

Luc, D.T. (1989). *Theory of Vector Optimization. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*, Vol. 319. Berlin: Springer.

Nishnianidze, Z. (1984). Fixed points of monotonic multiple-valued operators. *Bulletin of the Georgian National Academy of Sciences*, *114*, 489-491.

Young, R.C. (1931). The algebra of many-valued quantities. *Mathematische Annalen*, *104*(1), 260-290.