VỀ TÍNH SIÊU ỔN ĐỊNH SUY RỘNG CHO PHƯƠNG TRÌNH HÀM DRYGAS

Phạm Thị Mai Thắm[1], Võ Thị Lệ Hằng[2*] và Nguyễn Văn Dũng[3]

[1]Sinh viên, Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp

[2]Phòng Khoa học và Công nghệ, Trường Đại học Đồng Tháp

[3]Khoa Sư phạm Toán - Tin, Trường Đại học Đồng Tháp

[*]Tác giả liên hệ: vtlhang@dthu.edu.vn

Lịch sử bài báo

Ngày nhận: 30/03/2021; Ngày nhận chỉnh sửa: 03/05/2021; Ngày duyệt đăng: 10/05/2021

Tóm tắt

Trong bài viết này, chúng tôi nghiên cứu tính siêu ổn định suy rộng của phương trình hàm Drygas

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+f(y)+f(-y)$$

trên không gian tựa chuẩn, trong đó f là ánh xạ từ X vào Y và $x, y, x+y, x-y \in X$. *Kết quả của bài viết là mở rộng các kết quả của Aiemsomboon và Sintunavarat (2016) về phương trình hàm Drygas trong không gian định chuẩn.*

Từ khóa: *Phương trình hàm, tính siêu ổn định, tựa chuẩn.*

ON THE HYPERSTABILITY OF THE DRYGAS FUNCTIONAL EQUATIONS

Pham Thi Mai Tham[1], Vo Thi Le Hang[2*], and Nguyen Van Dung[3]

[1]Student, Department of Mathematics - Information Technology Teacher Education, Dong Thap University

[2]Office of Science and Technology Management, Dong Thap University

[3]Department of Mathematics - Information Technology Teacher Education, Dong Thap University

[*]Corresponding author: vtlhang@dthu.edu.vn

Article history

Received: 30/03/2021; Received in revised form: 03/05/2021; Accepted: 10/05/2021

Abstract

In this paper we study the hyperstability of the Drygas functional equation of the form

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+f(y)+f(-y)$$

in quasi-normed spaces, where f is a map from X *into Y and* $x, y, x+y, x-y \in X$. *The obtained results are the extensions of the results of Aiemsomboon and Sintunavarat (2016) on the Drygas functional equation in normed spaces.*

Keywords: *Functional equation, hyperstability, quasi-norm.*

DOI: https://doi.org/10.52714/dthu.10.3.2021.864

Trích dẫn: Phạm Thị Mai Thắm, Võ Thị Lệ Hằng và Nguyễn Văn Dũng. (2021). Về tính siêu ổn định suy rộng cho phương trình hàm Drygas. *Tạp chí Khoa học Đại học Đồng Tháp, 10*(3), 21-30.

1. Mở đầu

Ánh xạ $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ được gọi là *thỏa mãn phương trình hàm Drygas* khi và chỉ khi $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+f(y)+f(-y)$ (1.1) với mọi $x,y\in\mathbb{R}$. Lưu ý rằng nếu các ánh xạ $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ thỏa mãn phương trình hàm Drygas thì $f\pm g$ cũng thỏa mãn phương trình hàm Drygas.

Năm 1987, Drygas đã nghiên cứu phương trình (1.1) và đưa ra đặc trưng của các không gian tựa tích (Drygas, 1987). Sau đó Ebanks *và cs.* (1992) đã mở rộng phương trình (1.1) $f(x)=A(x)+Q(x)$ trong đó $A:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là ánh xạ cộng tính và $Q:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ là phương trình hàm bậc hai, nghĩa là với mỗi $x,y\in\mathbb{R},A$ thỏa mãn $A(x+y)=A(x)+A(y)$ và Q thỏa mãn $Q(x+y)+Q(x-y)=2Q(x)+2Q(y)$.

Tính ổn định của phương trình hàm Drygas đã được quan tâm nghiên cứu qua nhiều tác giả (Faiziev và Sahoo, 2007 và 2008; Jung và Sahoo, 2002; Yang, 2004). Năm 2013, Piszczek và Szczawinka đã đưa ra kết quả về tính siêu ổn định suy rộng cho phương trình hàm Drygas (Piszczek và Szczawinka, 2013). Dù một kết quả về tính siêu ổn định đã được đưa ra bởi Bourgin (Bourgin, 1949), nhưng thuật ngữ “siêu ổn định” được sử dụng lần đầu tiên bởi Maksa và Pales (Maksa và Pales, 2014).

Từ các kết quả của Aiemsomboon và Sintunavarat (2016) nghiên cứu về tính siêu ổn định trên không gian định chuẩn, trong bài viết này chúng tôi thiết lập và chứng minh các kết quả về tính siêu ổn định trên không gian tựa chuẩn.

Trong bài viết này $\mathbb{N}_{n_0}$ lần lượt biểu diễn tập các số nguyên lớn hơn hoặc bằng n_0, B^A biểu diễn tập hợp của tất cả các hàm từ tập hợp $A\neq\emptyset$ đến tập hợp $B\neq\emptyset$.

Định nghĩa 1.1 (Kalton, 2003)**.** Giả sử X là không gian vectơ trên trường $\mathbb{K},\kappa\geq 1$ và $\|.\|:X\times X\to\mathbb{R}$ là một ánh xạ sao cho với mọi $x,y\in X$ và mọi $a\in\mathbb{K}$,

1. $\|x\|=0$ khi và chỉ khi $x=0$.

2. $\|ax\|=|a|\|x\|$.

3. $\|x+y\|\leq\kappa(\|x\|+\|y\|)$.

Khi đó $\|.\|$ được gọi là một *tựa chuẩn* và $(X,\|.\|,\kappa)$ được gọi là một *không gian tựa chuẩn.*

Định nghĩa 1.2 (Czerwik S., 1998). Giả sử $X\neq\emptyset$, $\kappa\geq 1$ và $d:X\times X\to\mathbb{R}_+$ là một ánh xạ sao cho với mọi $x,y,z\in X$,

1. $d(x,y)=0$ khi và chỉ khi $x=y$.

2. $d(x,y)=d(y,x)$.

3. $d(x,z)\leq\kappa(d(x,y)+d(y,z))$.

Khi đó

1. d được gọi là một b*-metric* trên X và (X,d,κ) được gọi là một *không gian* b*-metric.*

2. Dãy $\{x_n\}_n$ được gọi là *hội tụ* đến x trong (X,d,κ) nếu $\lim\limits_{n\to\infty}d(x_n,x)=0.$

3. Dãy $\{x_n\}_n$ được gọi là một *dãy Cauchy* nếu $\lim\limits_{n,m\to\infty}d(x_n,x_m)=0.$

4. Không gian (X,d,κ) được gọi là *đầy đủ* nếu mỗi dãy Cauchy là một dãy hội tụ.

Nếu $(X,\|.\|,\kappa)$ là một không gian tựa chuẩn thì $d(x,y)=\|x-y\|$ với mọi $x,y\in X$ xác định một b-metric trên X. Nếu không giải thích gì thêm thì trên không gian tựa chuẩn ta luôn dùng b-metric trên. Khi đó không gian tựa chuẩn đầy đủ được gọi là *không gian tựa Banach.*

Định lí 1.3 (Paluszyński và Stempak, 2009). *Giả sử* (Y,d,κ) *là một không gian* b*-metric,* $\theta=\log_{2\kappa}2$ *và*

$$D_d(x,y) = \inf\{\sum_{i=1}^{n} d^{\theta}(x_i, x_{i+1}) :$$
$$x = x_1, x_2, ..., x_n, x_{n+1} = y \in X, n \geq 1\} \quad (1.2)$$

với mọi $x, y \in Y$. *Khi đó* D_d *là một metric trên* Y *thỏa mãn*

$$\frac{1}{4} d^{\theta}(x,y) \leq D_d(x,y) \leq d^{\theta}(x,y) \quad (1.3)$$

với mọi $x, y \in Y$. *Đặc biệt, nếu* d *là một metric thì* $\theta = 1$ *và* $D_d = d$.

Hệ quả 1.4 (Aiemsomboon và Sintunavarat, 2017). *Cho* $U \neq \varnothing$, $(Y, \|.\|, \kappa)$ *là một không gian tựa Banach và* $f_1, ..., f_k$ *:* $U \to U$ *và* $L_1, ... L_k$ *:* $U \to \mathbb{R}_+$ *là các ánh xạ, trong đó* k *là một số nguyên dương. Giả sử rằng*

1. $\mathcal{T} : Y^U \to Y^U$ *là một ánh xạ thỏa mãn*

$$\|\mathcal{T}\xi(x) - \mathcal{T}\mu(x)\| \leq \sum_{i=1}^{k} L_i(x) \|\xi(f_i(x)) - \mu(f_i(x))\| \quad (1.4)$$

với mọi $\xi, \mu \in Y^U$ *và* $x \in U$.

2. Tồn tại hai ánh xạ $\varepsilon : U \to \mathbb{R}_+$ *và* $\varphi : U \to Y$ *sao cho với mọi* $x \in U$

$$\|\mathcal{T}\varphi(x) - \varphi(x)\| \leq \varepsilon(x). \quad (1.5)$$

3. Với mỗi $x \in U$ *và* $\theta = \log_{2k} 2$,

$$\varepsilon^*(x) := \sum_{i=1}^{k} (\Lambda^n \varepsilon)^{\theta}(x) < \infty \quad (1.6)$$

trong đó

$$(\Lambda\delta)(x) = \sum_{i=1}^{k} L_i(x) \delta(f_i(x)) \quad (1.7)$$

với mọi $\delta : U \to \mathbb{R}_+$ *và mọi* $x \in U$.

Khi đó ta có,

1. Với mọi $x \in U$, *giới hạn*

$$\lim_{x \to \infty} (\mathcal{T}^n \varphi)(x) = \psi(x) \quad (1.8)$$

tồn tại và ánh xạ $\psi : U \to Y$ *là một điểm bất động của* $\mathcal{T}$ *thỏa mãn*

$$\|\varphi(x) - \psi(x)\|^{\theta} \leq 4\varepsilon^*(x) \quad (1.9)$$

với mọi $x \in U$.

2. Với mỗi $x \in U$, *nếu tồn tại* $M > 0$ *sao cho*

$$\varepsilon^*(x) \leq (M \sum_{n=1}^{\infty} (\Lambda^n \varepsilon)(x))^{\theta} \leq \infty \quad (1.10)$$

thì điểm bất động của $\mathcal{T}$ *thỏa mãn (1.9) là duy nhất.*

2. Kết quả chính

Trong mục này chúng tôi thiết lập và chứng minh một số định lí về tính ổn định của phương trình hàm trong không gian tựa chuẩn.

Định lí 2.1. *Giả sử rằng*

1. X *là một tập con của không gian tựa chuẩn* $(Z, \|.\|, \kappa_Z)$ *trên trường* $\mathbb{F}$ *sao cho* $x \in X$ *thì* $-x \in X$ *và* $(Y, \|.\|, \kappa_Y)$ *là một không gian tựa Banach trên trường* $\mathbb{K}$.

2. Tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ *sao cho* $nx \in X$ *với mọi* $x \in X$ *,* $n \geq n_0$ *và ánh xạ* $h : X \to \mathbb{R}_+$ *thỏa mãn*

$$M_0 := \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \kappa_Y(2s(n+1) + s(n) + s(-n) + s(2n+1)) < 1\}$$

là một tập vô hạn, trong đó

$$s(n) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : h(nx) \leq th(x) \ \forall \ x \in X\}$$

và $s(n)$ *thỏa mãn các điều kiện sau đây với* $n \in \mathbb{N}$,

$$\lim_{n \to \infty} s(n) = 0 \text{ và } \lim_{n \to \infty} s(-n) = 0.$$

3. Hàm $f : X \to Y$ *thỏa mãn bất đẳng thức*

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - f(y) - f(-y)\| \leq h(x) + h(y) \quad (2.1)$$

với mọi $x, y, x+y, x-y \in X$.

Khi đó f *thỏa mãn phương trình*

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+f(y)+f(-y) \quad (2.2)$$
với mọi $x,y\in X$.

Chứng minh. Với $x\in X, m\in M_0$ thay x bởi $(m+1)x$ và y bởi mx vào (2.1), ta có

$$\|f((m+1)x+mx)+f((m+1)x-mx)$$
$$-2f((m+1)x)-f(mx)-f(-mx)\|$$
$$=\|2f((m+1)x)+f(mx)+f(-mx)-f((2m+1)x)-f(x)\|$$
$$\le h((m+1)x)+h(mx). \quad (2.3)$$

Xác định ánh xạ $\mathcal{T}_m : Y^X \to Y^X$ với $m\in M_0$ bởi

$$(\mathcal{T}_m\xi)(x):=2\xi((m+1)x)+\xi(mx)+\xi(-mx)$$
$$-\xi((2m+1)x), x\in X, \xi\in Y^X.$$

Ta có, với mọi $x\in X$

$$\varepsilon_m(x):=h((m+1)x)+h(mx)\le[s(m+1)+s(m)]h(x). \quad (2.4)$$

Khi đó bất đẳng thức (2.3) có dạng $\|\mathcal{T}_m f(x)-f(x)\|\le\varepsilon_m(x)$. Điều này chứng tỏ (1.5) được thỏa mãn với $\varphi=f, \varepsilon=\varepsilon_m$.

Xác định ánh xạ $\Lambda_m:\mathbb{R}_+^X\to\mathbb{R}_+^X$ bởi

$$(\Lambda_m\eta)(x):=\kappa_Y(2\eta((m+1)x)+\eta(mx)+\eta(-mx)+\eta((2m+1)x))$$
với $\eta\in\mathbb{R}_+^X, x\in X$.

Khi đó (1.7) được thỏa mãn với $k=4$, $f_1(x)=(m+1)x$, $f_2(x)=mx$, $f_3(x)=-mx$, $f_4(x)=(2m+1)x$, $L_1(x)=2\kappa_Y{}^2$ và $L_2(x)=L_3(x)=L_4(x)=\kappa_Y{}^2$.

Hơn nữa, với mọi $\xi,\mu\in Y^U, x\in X$, theo Định nghĩa 1.1, ta có

$$\|\mathcal{T}_m\xi(x)-\mathcal{T}_m\mu(x)\|=\|2\xi((m+1)x)+\xi(mx)+\xi(-mx)-\xi((2m+1)x)$$
$$-2\mu\big((m+1)x\big)-\mu\big(mx\big)-\mu\big(-mx\big)+\mu\big((2m+1)x\big)\|$$
$$\le\ 2\kappa_Y{}^2\|(\xi-\mu)((m+1)x)\|+\kappa_Y{}^2\|(\xi-\mu)(mx)\|$$
$$+\kappa_Y{}^2\|(\xi-\mu)(-mx)\|+\kappa_Y{}^2\|(\xi-\mu)((2m+1)x)\|$$
$$=\sum_{i=1}^{4}L_i(x)\|(\xi-\mu)(f_i(x))\|.$$

Bằng phép quy nạp toán học, chúng ta sẽ chỉ ra rằng với mọi $x\in X, n\ge 0, m\in M_0$,

$$\Lambda_m^n\varepsilon_m(x)\le\kappa_Y{}^2[s(m+1)+s(m)][2s(m+1)+s(m)$$
$$+s(-m)+s(2m+1)]^n h(x). \quad (2.5)$$

Từ (2.4), ta suy ra (2.5) đúng với $n=0$. Giả sử rằng (2.5) đúng cho $n=l$, với $l\in\mathbb{N}_0$. Với $n=l+1$, ta có

$$\Lambda_m^{l+1}\varepsilon_m(x)$$
$$=\Lambda_m(\Lambda_m^l\varepsilon_m(x))$$
$$=2\kappa_Y{}^2\Lambda_m^l\varepsilon_m((m+1)x)+\kappa_Y{}^2\Lambda_m^l\varepsilon_m(mx)$$
$$+\kappa_Y{}^2\Lambda_m^l\varepsilon_m(-mx)+\kappa_Y{}^2\Lambda_m^l\varepsilon_m((2m+1)x)$$
$$\le\kappa_Y^{2l+2}[s(m+1)+s(m)][2s(m+1)+s(m)+s(-m)+s(2m+1)]^l$$
$$\times[2h((m+1)x)+h(mx)+h(-mx)+h((2m+1)x)]$$
$$\le\kappa_Y^{2(l+1)}[s(m+1)+s(m)][2s(m+1)+s(m)+s(-m)$$
$$+s(2m+1)]^{l+1}h(x).$$

Điều này chỉ ra rằng (2.5) đúng với $n=l+1$. Do đó (2.5) đúng với tất cả $n\in\mathbb{N}_0$. Theo định nghĩa M_0 và tổng cấp số nhân, với $x\in X$ và $m\in M_0$ thì

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\Lambda_m^n\varepsilon_m)^\theta(x)$$
$$\le\sum_{n=0}^{\infty}\kappa_Y^{\theta 2n}[s(m+1)+s(m)]^\theta[2s(m+1)+s(m)+s(-m)$$
$$+s(2m+1)]^{\theta n}h^\theta(x)$$
$$=\frac{[s(m+1)+s(m)]^\theta h^\theta(x)}{1-\kappa_Y^{2\theta}[2s(m+1)+s(m)+s(-m)+s(2m+1)]^\theta}<\infty. \quad (2.6)$$

Từ (1.6) và (2.6) ta suy ra được

$$\varepsilon^*(x)=\frac{[s(m+1)+s(m)]^\theta h^\theta(x)}{1-\kappa_Y^{2\theta}[2s(m+1)+s(m)+s(-m)+s(2m+1)]^\theta}.$$

Do đó, theo Hệ quả 1.4, với mỗi $m\in M_0$, tồn tại một nghiệm $F_m:X\to Y$ của phương trình

$$F_m(x) = 2F_m((m+1)x) + F_m(mx) + F_m(-mx) - F_m((2m+1)x)$$

sao cho

$$\| f(x) - F_m(x)\|^{\theta} \le 4\frac{[s(m+1)+s(m)]^{\theta} h^{\theta}(x)}{1-\kappa_Y^{2\theta}[2s(m+1)-s(m)-s(-m)-s(2m+1)]^{\theta}}. \quad (2.7)$$

Hơn nữa theo (1.8), ta có

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_m^n f(x) = F_m(x). \quad (2.8)$$

Tiếp theo chúng ta chứng minh

$$\left\|\mathcal{T}_m^n f(x+y) + \mathcal{T}_m^n f(x-y) - 2\mathcal{T}_m^n f(x) - \mathcal{T}_m^n f(y) - \mathcal{T}_m^n f(-y)\right\| \le \kappa_Y^{2n}[2s(m+1)+s(m)+s(-m)+s(2m+1)]^n (h(x) + h(y)) \quad (2.9)$$

với mọi $x, y, x+y, x-y \in X$ và $n \in \mathbb{N}_0$.

Với $n=0$, (2.9) trở thành (2.1). Giả sử rằng (2.9) đúng với $n = r \in \mathbb{N}_0$ với mọi $x, y, x+y, x-y \in X$, ta có

$$\begin{aligned}
&\left\|\mathcal{T}_m^{r+1} f(x+y) + \mathcal{T}_m^{r+1} f(x-y) - 2\mathcal{T}_m^{r+1} f(x) - \mathcal{T}_m^{r+1} f(y) - \mathcal{T}_m^{r+1} f(-y)\right\| \\
&= \left\|\mathcal{T}_m\mathcal{T}_m^r f(x+y) + \mathcal{T}_m\mathcal{T}_m^r f(x-y) - 2\mathcal{T}_m\mathcal{T}_m^r f(x) \right.\\
&\quad \left. - \mathcal{T}_m\mathcal{T}_m^r f(y) - \mathcal{T}_m\mathcal{T}_m^r f(-y)\right\| \\
&= \left\|2\mathcal{T}_m^r f((m+1)(x+y)) + \mathcal{T}_m^r f(m(x+y)) + \mathcal{T}_m^r f(-m(x+y)) \right.\\
&\quad - \mathcal{T}_m^r f((2m+1)(x+y) + 2\mathcal{T}_m^f((m+1)(x-y)) + \mathcal{T}_m^r f(m(x-y)) \\
&\quad + \mathcal{T}_m^r f(-m(x-y)) - \mathcal{T}_m^r f((2m+1)(x-y)) - 2(2\mathcal{T}_m^r f((m+1)x) \\
&\quad + \mathcal{T}_m^r f(mx) + \mathcal{T}_m^r f(-mx) - \mathcal{T}_m^r f((2m+1)x)) \\
&\quad - 2\mathcal{T}_m^r f((m+1)y) - \mathcal{T}_m^r f(my) - \mathcal{T}_m^r f(-my) + \mathcal{T}_m^r f((2m+1)y) \\
&\quad - 2\mathcal{T}_m^r f((m+1)(-y)) - \mathcal{T}_m^r f(m(-y)) - \mathcal{T}_m^r f(-m(-y)) \\
&\quad \left. + \mathcal{T}_m^r f((2m+1)(-y))\right\| \\
&\le \kappa_Y{}^2\kappa_Y^{2r}[2s(m+1)+s(m)+s(-m)+s(2m+1)]^r[2h((m+1)x) \\
&\quad + 2h((m+1)y) + h(mx) + h(my) + h(-mx) + h(-my) \\
&\quad + h((2m+1)x) + h((2m+1)y)] \\
&\le \kappa_Y^{2(r+1)}[2s(m+1)+s(m)+s(-m)+s(2m+1)]^{r+1}(h(x)+h(y)).
\end{aligned}$$

Suy ra (2.9) đúng với $n = r+1$. Điều này suy ra rằng (2.9) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}_0$.

Đặt $d(x,y) = \|x-y\|$ với mọi $x, y \in Y$. Khi đó (Y, d, κ_Y) là một không gian b-metric. Từ (2.9) và (1.3) trong Định lí 1.3, ta có

$$\begin{aligned}
0 &\le D_d(\mathcal{T}_m^n f(x+y) + \mathcal{T}_m^n f(x-y), 2\mathcal{T}_m^n f(x) + \mathcal{T}_m^n f(y) + \mathcal{T}_m^n f(-y)) \\
&\le d^{\theta}(\mathcal{T}_m^n f(x+y) + \mathcal{T}_m^n f(x-y), 2\mathcal{T}_m^n f(x) + \mathcal{T}_m^n f(y) + \mathcal{T}_m^n f(-y)) \\
&= \left\|\mathcal{T}_m^n f(x+y) + \mathcal{T}_m^n f(x-y) - 2\mathcal{T}_m^n f(x) - \mathcal{T}_m^n f(y) - \mathcal{T}_m^n f(-y)\right\|^{\theta} \\
&\le \kappa_Y^{\theta 2n}[2s(m+1)+s(m)+s(-m)+s(2m+1)]^{\theta n}(h(x)+h(y))^{\theta} \\
&= 0 \qquad (2.10)
\end{aligned}$$

Suy ra

$$\mathcal{T}_m^n f(x+y) + \mathcal{T}_m^n f(x-y) = 2\mathcal{T}_m^n f(x) + \mathcal{T}_m^n f(y) + \mathcal{T}_m^n f(-y).$$

Lấy giới hạn hai vế của (2.7) khi $m \to \infty$, ta được $0 \le \lim_{m\to\infty} \| f(x) - F_m(x)\|^{\theta} \le 0$, suy ra $\lim_{m\to\infty} \| f(x) - F_m(x)\| = 0$. Do đó

$$\lim_{m\to\infty} F_m(x) = f(x). \quad (2.11)$$

Từ (2.11) với $x, y \in X$, ta có

$$\lim_{m\to\infty}(2F_m(x) + F_m(y) + F_m(-y)) = 2f(x) + f(y) + f(-y). \quad (2.12)$$

Từ (2.10), ta suy ra

$$\lim_{n\to\infty} D_d(\mathcal{T}_m^n f(x+y) + \mathcal{T}_m^n f(x-y), 2\mathcal{T}_m^n f(x) + \mathcal{T}_m^n f(y) + \mathcal{T}_m^n f(-y)) = 0. \quad (2.13)$$

Vì D_d liên tục, cho $n \to \infty$ trong (2.10), sử dụng định nghĩa của M_0 và (2.8), với mọi $x, y \in X$, ta có

$$\begin{aligned}
&D_d(F_m(x+y) + F_m(x-y), 2F_m(x) + F_m(y) + F_m(-y)) \\
&= \lim_{n\to\infty} D_d(\mathcal{T}_m^n f(x+y) + \mathcal{T}_m^n f(x-y), 2\mathcal{T}_m^n f(x) \\
&\quad + \mathcal{T}_m^n f(y) + \mathcal{T}_m^n f(-y)). \qquad (2.14)
\end{aligned}$$

Kết hợp (2.13) và (2.14), ta có

$$\begin{aligned}
&D_d(f(x+y) + f(x-y), 2f(x) + f(y) + f(-y) \\
&= \lim_{m\to\infty} D_d(F_m f(x+y) + F_m f(x-y), 2F_m(x) \\
&\quad + F_m(y) + F_m(-y)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Do đó

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + f(y) + f(-y).$$

Điều này chứng tỏ f là một nghiệm của phương trình tuyến tính tổng quát (2.2). □

Định lí 2.2. *Giả sử rằng*

1. X là một tập con của không gian tựa chuẩn $(Z,\|\ \|,\kappa_Z)$ trên trường $\mathbb{F}$ sao cho $x \in X$ thì $-x \in X$ và $(Y,\|\ \|,\kappa_Y)$ là một không gian tựa Banach trên trường $\mathbb{K}$.

2. Tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $nx \in X$ với mọi $x \in X, n \geq n_0$ và ánh xạ $u, v : X \to \mathbb{R}_+$ thỏa mãn

$$M_0 := \{n \in \mathbb{N}, n \geq n_0 : \kappa_Y[2s_{12}(n+1) + s_{12}(n) + s_{12}(-n) + s_{12}(2n+1)] < 1\}$$

là một tập vô hạn, trong đó

$$s_1(n)s_2(n) := s_{12}(n),$$

$$s_1(n) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : u(nx) \leq tu(x) \text{ với mỗi } x \in X\},$$

$$s_2(n) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : v(nx) \leq tv(x) \text{ với mỗi } x \in X\},$$

và $s_1(n), s_2(n)$ thỏa mãn các điều kiện sau đây với $n \in \mathbb{N}$

$$(W_1) \lim_{n\to\infty} s_1(\pm n)s_2(\pm n) = 0;$$

$$(W_2) \lim_{n\to\infty} s_1(n) = 0 \text{ hoặc } \lim_{n\to\infty} s_2(n) = 0.$$

3. Hàm $f : X \to Y$ thỏa mãn bất đẳng thức

$$\|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x) - f(y) - f(-y)\| \leq u(x)v(y) \quad (2.15)$$

với mỗi $x, y, x+y, x-y \in X$.

Khi đó f thỏa mãn phương trình

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) + f(y) + f(-y) \quad (2.16)$$

với mọi $x, y \in X$.

Chứng minh. Với $x \in X, m \in M_0$ thay x bởi $(m+1)x$ và y bởi mx vào (2.15) đã cho

$$\|f((m+1)x + mx) + f((m+1)x - mx) - 2f((m+1)x) - f(mx) - f(-mx)\|$$
$$= \|2f((m+1)x) + f(mx) + f(-mx) - f((2m+1)x) - f(x)\|$$
$$\leq u((m+1)x)v(mx). \quad (2.17)$$

Xác định ánh xạ $\mathcal{T}_m : Y^X \to Y^X$ với $m \in M_0$ bởi

$$(\mathcal{T}_m\xi)(x) := 2\xi((m+1)x) + \xi(mx) + \xi(-mx) - \xi((2m+1)x), x \in X, \xi \in Y^X.$$

Ta có, với mọi $x \in X$

$$\varepsilon_m(x) := u((m+1)x)v(mx) \leq [s_1(m+1)s_2(m)]u(x)v(x). \quad (2.18)$$

Khi đó bất đẳng thức (2.17) có dạng $\|\mathcal{T}_m f(x) - f(x)\| \leq \varepsilon_m(x)$. Điều này chứng tỏ (1.5) được thỏa mãn với $\varphi = f, \varepsilon = \varepsilon_m$.

Xác định ánh xạ $\Lambda_m : \mathbb{R}_+^X \to \mathbb{R}_+^X$ với mỗi $m \in M_0, \eta \in \mathbb{R}_+^X, x \in X$ bởi

$$(\Lambda_m\eta)(x) := \kappa_Y^2(2\eta((m+1)x) + \eta(mx) + \eta(-mx) + \eta((2m+1)x)). \quad (2.19)$$

Khi đó (1.7) được thỏa mãn với $k = 4$, $f_1(x) = (m+1)x$, $f_2(x) = mx$, $f_3(x) = -mx$, $f_4(x) = (2m+1)x$, $L_1(x) = 2\kappa_Y^2$ và $L_2(x) = L_3(x) = L_4(x) = \kappa_Y^2$ với $x \in X$. Hơn nữa với mọi $\xi, \mu \in Y^U, x \in X$ và theo Định nghĩa 1.1 về không gian tựa chuẩn, ta có

$$\|\mathcal{T}_m\xi(x) - \mathcal{T}_m\mu(x)\|$$
$$= \|2\xi((m+1)x) + \xi(mx) + \xi(-mx) - \xi((2m+1)x) - 2\mu((m+1)x) - \mu(mx) - \mu(-mx) + \mu((2m+1)x)\|$$
$$\leq 2\kappa_Y^2\|(\xi-\mu)((m+1)x)\| + \kappa_Y^2\|(\xi-\mu)(mx)\| + \kappa_Y^2\|(\xi-\mu)(-mx)\| + \kappa_Y^2\|(\xi-\mu)((2m+1)x)\|$$
$$= \sum_{i=1}^{4} L_i(x)\|(\xi-\mu)(f_i(x))\|.$$

Bằng phép quy nạp toán học, chúng tôi sẽ chỉ ra rằng với mọi $x \in X, n \geq 0, m \in M_0$,

$$\Lambda_m^n\varepsilon_m(x) \leq \kappa_Y^{2n}[s_1(m+1)s_2(m)][2s_{12}(m+1) + s_{12}(m) + s_{12}(-m) + s_{12}(2m+1)]^n u(x)v(x). \quad (2.20)$$

Thật vậy, từ (2.18), ta suy ra (2.20) đúng với $n = 0$. Giả sử rằng (2.20) đúng cho $n = l$, trong đó $l \in \mathbb{N}_0$, ta có

$$\Lambda_m^{l+1}\varepsilon_m(x)$$
$$= \Lambda_m(\Lambda_m^l \varepsilon_m(x))$$
$$= 2\kappa_Y{}^2\Lambda_m^l\varepsilon_m((m+1)x) + \kappa_Y{}^2\Lambda_m^l\varepsilon_m(mx)$$
$$+ \kappa_Y{}^2\Lambda_m^l\varepsilon_m(-mx) + \kappa_Y\Lambda_m^l\varepsilon_m((2m+1)x)$$
$$\le 2\kappa_Y{}^2 \times \kappa_Y^{2l}[s_1(m+1)s_2(m)][2s_{12}(m+1)+s_{12}(m)+s_{12}(-m)$$
$$\le \kappa_Y^{2l+2}[s_1(m+1)s_2(m)][2s_{12}(m+1)+s_{12}(m)+s_{12}(-m)$$
$$+ s_{12}(2m+1)]^l[2u((m+1)x)v((m+1)x)+u(mx)v(mx)$$
$$+u(-mx)v(-mx)+u((2m+1)x)v((2m+1)x)]$$
$$\le \kappa_Y^{2l+2}[s_1(m+1)s_2(m)][2s_{12}(m+1)+s_{12}(m)+s_{12}(-m)$$
$$+s_{12}(2m+1)]^l[2s_{12}(m+1)u(x)v(x)+s_{12}(m)u(x)v(x)$$
$$+s_{12}(-m)u(x)v(x)+s_{12}(2m+1)u(x)v(x)]$$
$$\le \kappa_Y^{2(l+1)}[s_1(m+1)s_2(m)][2s_{12}(m+1)+s_{12}(m)$$
$$+ s_{12}(-m)+s_{12}(2m+1)]^{l+1}u(x)v(x).$$

Điều này chỉ ra rằng (2.20) đúng với $n = l+1$. Do đó (2.20) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}_0$. Theo định nghĩa M_0 và tổng cấp số nhân, với $x \in X$, $m \in M_0$ và $\theta = \log_{2\kappa_Y} 2$ thì

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\Lambda_m^n\varepsilon_m)^\theta(x)$$
$$\le \sum_{n=0}^{\infty}\kappa_Y^{\theta 2n}[s_1(m+1)s_2(m)]^\theta[2s_{12}(m+1)+s_{12}(m)$$
$$+ s_{12}(-m)+s_{12}(2m+1)]^{\theta n}u^\theta(x)v^\theta(x)$$
$$= \frac{[s_1(m+1)s_2(m)]^\theta u^\theta(x)v^\theta(x)}{1-\kappa_Y^{2\theta}[2s_{12}(m+1)+s_{12}(m)+s_{12}(-m)+s_{12}(2m+1)]^\theta}$$
$$< \infty. \tag{2.21}$$

Từ (1.6) và (2.21) ta suy ra được

$$\varepsilon^*(x) = \frac{[s_1(m+1)s_2(m)]^\theta u^\theta(x)v^\theta(x)}{1-\kappa_Y^{2\theta}[2s_{12}(m+1)+s_{12}(m)+s_{12}(-m)+s_{12}(2m+1)]^\theta}.$$

Do đó, theo Hệ quả 1.4, với mỗi $m \in M_0$ tồn tại một nghiệm $F_m : X \to Y$ của phương trình

$$F_m(x) = 2F_m((m+1)x)+F_m(mx)+F_m(-mx)-F_m((2m+1)x)$$

sao cho

$$\|f(x)-F_m(x)\|^\theta$$
$$\le 4\frac{[s_1(m+1)s_2(m)]^\theta u(x)^\theta v(x)^\theta}{1-\kappa_Y^{2\theta}[2s_{12}(m+1)-s_{12}(m)-s_{12}(-m)-s_{12}(2m+1)]^\theta}. \tag{2.22}$$

với $\varphi(x) = f(x)$ và $\psi(x) = F_m(x)$. Hơn nữa theo (1.8), ta có $\lim_{n\to\infty}\mathcal{T}_m^n f(x) = F_m(x)$. (2.23)

Tiếp theo chúng ta chứng minh

$$\left\|\mathcal{T}_m^n f(x+y)+\mathcal{T}_m^n f(x-y)-2\mathcal{T}_m^n f(x)-\mathcal{T}_m^n f(y)-\mathcal{T}_m^n f(-y)\right\|$$
$$\le \kappa_Y^{2n}[2s_{12}(m+1)+s_{12}(m)+s_{12}(-m)$$
$$+ s_{12}(2m+1)]^n(u(x)v(y)) \tag{2.24}$$

với mọi $x, y, x+y, x-y \in X$ và $n \in \mathbb{N}_0$.

Thật vậy với $n=0$ (2.24) trở thành (2.15). Do đó (2.24) đúng với $n=0$. Với $r \in \mathbb{N}_0$ và giả sử rằng (2.24) đúng với $n=r$ với mọi $x, y, x+y, x-y \in X$, ta có

$$\left\|\mathcal{T}_m^{r+1} f(x+y)+\mathcal{T}_m^{r+1} f(x-y)-2\mathcal{T}_m^{r+1} f(x)-\mathcal{T}_m^{r+1} f(y)-\mathcal{T}_m^{r+1} f(-y)\right\|$$
$$= \left\|\mathcal{T}_m\mathcal{T}_m^r f(x+y)+\mathcal{T}_m\mathcal{T}_m^r f(x-y)-2\mathcal{T}_m\mathcal{T}_m^r f(x)\right.$$
$$\left.-\mathcal{T}_m\mathcal{T}_m^r f(y)-\mathcal{T}_m\mathcal{T}_m^r f(-y)\right\|$$
$$= \left\|2\mathcal{T}_m^r f((m+1)(x+y))+\mathcal{T}_m^r f(m(x+y))+\mathcal{T}_m^r f(-m(x+y))\right.$$
$$-\mathcal{T}_m^r f((2m+1)(x+y)+2\mathcal{T}_m^f((m+1)(x-y))+\mathcal{T}_m^r f(m(x-y))$$
$$+\mathcal{T}_m^r f(-m(x-y))-\mathcal{T}_m^r f((2m+1)(x-y))-2(2\mathcal{T}_m^r f((m+1)x)$$
$$+\mathcal{T}_m^r f(mx)+\mathcal{T}_m^r f(-mx)-\mathcal{T}_m^r f((2m+1)x))-2\mathcal{T}_m^r f((m+1)y)$$
$$-\mathcal{T}_m^r f(my)-\mathcal{T}_m^r f(-my)+\mathcal{T}_m^r f((2m+1)y)-2\mathcal{T}_m^r f((m+1)(-y))$$
$$\left.-\mathcal{T}_m^r f(m(-y))-\mathcal{T}_m^r f(-m(-y))+\mathcal{T}_m^r f((2m+1)(-y))\right\|$$
$$\le \kappa_Y{}^2\kappa_Y^{2r}[2s_{12}(m+1)+s_{12}(m)+s_{12}(-m)+s_{12}(2m+1)]^r[2u((m+1)x)v((m+1)y)$$
$$+u(mx)v(my)+u(-mx)v(-my)+u((2m+1)x)v((2m+1)y)]$$
$$\le \kappa_Y^{2r+2}[2s_{12}(m+1)+s_{12}(m)+s_{12}(-m)$$
$$+ s_{12}(2m+1)]^r[2s_{12}(m+1)u(x)v(y)+s_{12}(m)u(x)v(y)$$
$$+ s_{12}(-m)u(x)v(y)+s_{12}(2m+1)u(x)v(y)]$$
$$\le \kappa_Y^{2(r+1)}[2s_{12}(m+1)+s_{12}(m)+s_{12}(-m)+s_{12}(2m+1)]^{r+1}u(x)v(y).$$

Suy ra (2.24) đúng với $n = r+1$. Điều này suy ra rằng (2.24) đúng với mọi $n \in \mathbb{N}_0$.

Đặt $d(x,y)=\|x-y\|$ với mọi $x,y\in Y$. Khi đó (Y,d,κ_Y) là một không gian b-metric. Từ (1.3) trong Định lí 1.3 và (2.24), ta có

$$
\begin{aligned}
0 &\le D_d(\mathcal{T}_m^n f(x+y)+\mathcal{T}_m^n f(x-y),2\mathcal{T}_m^n f(x)\\
&\quad +\mathcal{T}_m^n f(y)+\mathcal{T}_m^n f(-y))\\
&\le d^{\theta}(\mathcal{T}_m^n f(x+y)+\mathcal{T}_m^n f(x-y),2\mathcal{T}_m^n f(x)\\
&\quad +\mathcal{T}_m^n f(y)+\mathcal{T}_m^n f(-y))\\
&=\|\mathcal{T}_m^n f(x+y)+\mathcal{T}_m^n f(x-y)-2\mathcal{T}_m^n f(x)\\
&\quad -\mathcal{T}_m^n f(y)-\mathcal{T}_m^n f(-y)\|\\
&\le \kappa_Y^{\theta 2n}[2s_{12}(m+1)+s_{12}(m)+s_{12}(-m)\\
&\quad +s_{12}(2m+1)]^{\theta n}(u^{\theta}(x)v^{\theta}(y))=0. \quad (2.25)
\end{aligned}
$$

Suy ra

$$\mathcal{T}_m^n f(x+y)+\mathcal{T}_m^n f(x-y)=2\mathcal{T}_m^n f(x)+\mathcal{T}_m^n f(y)+\mathcal{T}_m^n f(-y).$$

Lấy giới hạn hai vế của (2.22) khi $m\to\infty$ ta được $0\le \lim_{m\to\infty}\|f(x)-F_m(x)\|^{\theta}\le 0.$

Suy ra $\lim_{m\to\infty}\|f(x)-F_m(x)\|=0.$ Do đó

$$\lim_{m\to\infty}F_m(x)=f(x). \quad (2.26)$$

Từ (2.26), ta cũng có

$$\lim_{m\to\infty}(2F_m(x)+F_m(y)+F_m(-y))=2f(x)+f(y)+f(-y). \quad (2.27)$$

Từ (2.25), ta suy ra

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}D_d(\mathcal{T}_m^n f(x+y)+\mathcal{T}_m^n f(x-y),2\mathcal{T}_m^n f(x)\\
&+\mathcal{T}_m^n f(y)+\mathcal{T}_m^n f(-y))=0. \quad (2.28)
\end{aligned}
$$

Vì D_d liên tục, cho $n\to\infty$ trong (2.25), sử dụng Hệ quả 1.4 và định nghĩa của M_0, với mọi $x,y\in X$, ta có

$$
\begin{aligned}
&D_d(F_m(x+y)+F_m(x-y),2F_m(x)+F_m(y)+F_m(-y)\\
&=\lim_{n\to\infty}D_d(\mathcal{T}_m^n f(x+y)+\mathcal{T}_m^n f(x-y),2\mathcal{T}_m^n f(x)\\
&\quad +\mathcal{T}_m^n f(y)+\mathcal{T}_m^n f(-y)). \quad (2.29)
\end{aligned}
$$

Kết hợp (2.26) và (2.29), ta có

$$
\begin{aligned}
&D_d(f(x+y)+f(x-y),2f(x)+f(y)+f(-y)\\
&=\lim_{m\to\infty}D_d(F_m f(x+y)+F_m f(x-y),2F_m(x)\\
&\quad +F_m(y)+F_m(-y))=0.
\end{aligned}
$$

Do đó

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+f(y)+f(-y).$$

Điều này chứng tỏ f là một nghiệm của phương trình tuyến tính tổng quát (2.16). □

3. Một số trường hợp đặc biệt

Hệ quả 3.1. *Giả sử rằng*

1. X là một tập con của không gian tựa chuẩn $(Z,\|.\|,\kappa_Z)$ trên trường $\mathbb{F}$ sao cho $x\in X$ thì $-x\in X$ và $(Y,\|.\|,\kappa_Y)$ là một không gian tựa Banach trên trường $\mathbb{K}, c\ge 0$ và $p<0$.

2. Tồn tại $n_0\in\mathbb{N}$ với $nx\in X$, $x\in X$, $n\ge n_0$ và ánh xạ $f:X\to Y$ thỏa mãn bất phương trình

$$\|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)-f(y)-f(-y)\|\le c(\|x\|^p+\|y\|^p)$$

với mọi $x,y,x+y,x-y\in X$.

Khi đó f thỏa mãn phương trình

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+f(y)+f(-y)$$

với mọi $x,y\in X$.

Chứng minh. Định nghĩa $h:X\to\mathbb{R}_+$ được xác định bởi $h(x):=c\|x\|^p$ với $c\in\mathbb{R}_+, x\in X$.

Với mọi $n\in\mathbb{N}, c>0,$ khi đó $s(n)=\inf\{t\in\mathbb{R}_+ : h(nx)\le th(x), x\in X\}=|n|^p$.

Tương tự, ta có $s(-n)=|-n|^p=|n|^p$. Suy ra $\lim_{n\to\infty}s(n)=\lim_{n\to\infty}s(-n)=\lim_{n\to\infty}|n|^p=0.$ Do đó $\kappa_Y{}^2(2s(n+1)+s(n)+s(-n)+s(2n+1))<1.$ Khi đó, tất cả các điều kiện trong Định lí 2.1 là đúng. Do đó, f thỏa mãn phương trình $f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+f(y)+f(-y).$ □

Hệ quả 3.2. *Giả sử rằng*

1. X là một tập con của không gian tựa chuẩn $(Z, \|.\|, \kappa_Z)$ trên trường $\mathbb{F}$ sao cho $x \in X$ thì $-x \in X$ và $(Y, \|.\|, \kappa_Y)$ là một không gian tựa Banach trên trường $\mathbb{K}$, $c \geq 0$ và $p, q \in \mathbb{R}$ với $p + q < 0$.

2. Tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ với $nx \in X$, $x \in X$, $n \geq n_0$ và ánh xạ $f : X \to Y$ thỏa mãn bất phương trình

$$\|f(x+y)+f(x-y)-2f(x)-f(y)-f(-y)\| \leq c(\|x\|^p+\|y\|^p)$$

với mỗi $x, y, x+y, x-y \in X$.

Khi đó f thỏa mãn phương trình

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+f(y)+f(-y)$$

với mỗi $x, y \in X$.

Chứng minh. Định nghĩa ánh xạ $u, v : X \to \mathbb{R}_+$ với $u(x) := s\|x\|^p$ và $v(x) := r\|x\|^q$, trong đó $s, r \in \mathbb{R}_+$, $sr = c$, $p, q \in \mathbb{R}, p+q<0,$ với mọi $x \in X$.

Theo định nghĩa $s_1(n), s_2(n)$ trong Định lí 2.2 và $c > 0,$ ta có

$s_1(n) = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : u(nx) \leq tu(x), x \in X\} = |n|^p$.

Tương tự, ta có

$$s_1(-n) = |-n|^p = |n|^p$$

$$s_2(n) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : v(nx) \leq t(vx), x \in X\} = |n|^q$$

$$s_2(-n) = |-n|^q = |n|^q .$$

Với $p, q \in \mathbb{R},$ $p+q<0,$ do đó $p<0$ hoặc $q<0.$ Khi đó $\lim_{n\to\infty} s_1(n) = 0$ hoặc $\lim_{n\to\infty} s_2(n) = 0.$

Với $c = 0$ thì $r = 0$ hoặc $s = 0.$ Từ định nghĩa của s_1 và s_2, ta có $\lim_{n\to\infty} s_1(\pm n)s_2(\pm n) = 0.$

Suy ra

$$\kappa_Y{}^2(2s_{12}(n+1)+s_{12}(n)+s_{12}(-n)+s_{12}(2n+1))<1.$$

Khi đó các điều kiện trong Định lí 2.2 là đúng. Do đó, f thỏa mãn phương trình

$$f(x+y)+f(x-y)=2f(x)+f(y)+f(-y) \;\square./.$$

Tài liệu tham khảo

Aiemsomboon L. and Sintunavarat W. (2016). Two new generalised hyperstability results for the Drygas functional equation. *Bull. Aust. Math. Soc.*, 12 pages.

Aiemsomboon L. and Sintunavarat W. (2016). On generalized hyperstability of a general linear equation. *Acta Math. Hungar*. *149*(2), 413-422.

Aiemsomboon L., Sintunavarat W. (2017). A note on the generalised hyperstability of the general linear equation. *Bull. Aust. Math. Soc., 96*(2), 263-273.

Bourgin D. G. (1949). Approximately isometric and multiplicative transformations on continuous function rings. *Duke Math. J., 16*, 385-397.

Brzdek J. (2013). Stability of additivity and fixed point methods. *Fixed Point Theory Appl., 2013*, Article ID 285, 9 pages.

Brzdek J. (2015). Remarks on stability of some inhomogeneous functinal equations. *Aequationes Math., 89*, 83-96.

Brzdek J., Chudziak J. and Pales Zs. (2011). Fixed point approach to stability of functional equations. *Nonlinear Anal., 74*, 6728-6732.

Brzdek J. and Cieplinski K. (2013). Hyperstability and superstability. *Abstr. Appl. Anal, 2013*, Article ID 401756, 13 pages.

Czerwik S. (1998). Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces. Atti *Semin. Mat. Fis. Univ. Modena*, 46, 263-276.

Drygas H. (1987). *Quasi-inner products and their applications,* in: Advances in

Multivariate Statistical Analysis (ed. K. Gupta) (Springer, Netherlands, 13-30.

Dung N. V. and Hang V. T. L. (2018). The generalized hyperstability of general linear equations in quasi-Banach spaces, *J. Math. Anal. Appl.*, *462*, 131-147.

Ebanks B. R., Kannappan Pl. and Sahoo P. K. (1992). A common generalization of functional equations characterizing normed and quassi-inner-product spaces. *Canad. Math. Bull.*, *35*(3), 321-327.

Faiziev V. A. and Sahoo P. K. (2007). On the stability of Drygas functional equation on groups. *Banach J. Math. Anal.*, *1*(1), 43-55.

Faiziev V. A. and Sahoo P. K. (2007). Stability of Drygas functional equation on T (3, $\mathbb{R}$). *Int. J. Math. Stat.*, ***7***, 70-81.

Jung S. M. and Sahoo P. K. (2002). Stability of a functional equation of Drygas. *Aequationes Math.*, *64*, 263-273.

Kalton N. (2003). *Quasi-Banach spaces*, in: Johnson W.B., Lindenstrauss J. (Eds.), Handbook of the Geometry of Banach Spaces 2, Elsevier, 1099-1130.

Maksa Gy. and Pales Zs. (2001). Hyperstability of a class of linear functional equations. *Acta Math. Acad. Paedagog.* Nyhazi. (N.S), *17*, 1007-112.

Paluszyński M., Stempak K. (2009). On quasi-metric and metric spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, *137*(12), 43074312.

Piszczek M. (2015). Hyperstability of the general linear functional equation. *Bull. Korean Math. Soc.*, *52*, 1827-1838.

Piszczek M. and Szczawinka J. (2013). Hyperstability of the Drygas functional equation. *J. Funct. Spaces Appl., 2013*, Article ID 912718, 4 pages.

Yang D. (2004). Remarks on the stability of Drygas equation and the Pexider-quadratic equation. *Aequationes Math.*, *64*, 108-116.

Zhang D. (2015), On hyperstability of generalised linear functional equations in several variables. *Bull. Aust. Math. Soc.*, *92*, 259-267.

Zhang D. (2016). On Hyers-Ulam stability of generalized linear functional equation and its induced Hyers-Ulam programming problem. *Aequationes Math.*, *90*, 559-568.