MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

***La Văn Thịnh***

*Học viện Tài chính*

*Email: lavanthinh@hvtc.edu.com*

***Nguyễn Dương Toàn***

*Khoa Toán & KHTN*

*Email: toannd@dhhp.edu.vn*

*Ngày nhận bài: 13/3/2020*

*Ngày PB đánh giá: 14/4/2020*

*Ngày duyệt đăng: 15/4/2020*

**Tóm tắt:** Bài toán bất đẳng thức tích phân xuất hiện nhiều trong các đề thi Olympic Toán học học sinh - sinh viên toàn quốc. Trong bài báo này, chúng tôi phân dạng các bất đẳng thức tích phân, đưa ra các phương pháp giải và bước giải rõ ràng cho từng dạng bài. Ngoài ra, trong từng phương pháp, chúng tôi đưa ra các ví dụ minh họa để làm rõ vấn đề.

**Từ khóa:** Bất đẳng thức tích phân, Olympic toán sinh viên, bất đẳng thức Cauchy–Schwartz.

**SOME METHODS TO PROVE INTEGRAL INEQUALITIES**

Abstract: The problem of integral inequalities appears a lot in the National Student Olympiad in Mathematics. In this paper, we classify integral inequalities, point out some methods to prove integral inequalities, and establish steps to solve each problem. In addition, we provide illustrative examples to classify the problems.

**Key words:** Integral inequality, National Student Olympiad in Mathematics, Cauchy – Schwartz inequality

1. GIỚI THIỆU

Bất đẳng thức tích phân (BĐT TP) là một công cụ thường được sử dụng để chứng minh các tính chất nghiệm của phương trình vi phân như tính bị chặn, sự tồn tại và tính duy nhất nghiệm, tính ổn định nghiệm, dáng điệu nghiệm... Ngoài ra, trong các kì thi học sinh giỏi, hay kì thi Olympic Toán dành cho sinh viên trên các nước, quốc tế thường xuyên xuất hiện các bài toán liên quan BĐT TP, ước lượng một tích phân cho trước (tích phân không tính được) (xem trong [1-3,5]). Hơn nữa, hiện nay, tài liệu tiếng Việt phân dạng các dạng bài liên quan BĐT TP là chưa có. Vì vậy, việc tìm hiểu, nghiên cứu, hệ thống các phương pháp giải BĐT TP, giúp cho sinh viên và giáo viên, giảng viên có tài liệu tham khảo là cần thiết.

Trong bài viết này, chúng tôi hệ thống, phân dạng các bài toán BĐT TP, đưa ra một số phương pháp sử dụng để giải quyết chúng như: Phương pháp đánh giá hàm dưới dấu tích phân, phương pháp tách miền lấy tích phân thành các đoạn thích hợp, phương pháp hàm số.... Đối với mỗi phương pháp, chúng tôi đưa ra các bước giải, và minh họa, làm rõ thông qua một số ví dụ.

Trong bài viết, chúng tôi có sử dụng một số cụm từ viết tắt như: Bất đẳng thức (BĐT), điều phải chứng minh (Đpcm).

Trước khi vào nội dung chính của bài viết, chúng tôi nhắc lại một số các tính chất, định lí được trình bày trong [3,4]:

*Tính chất 1 (Đạo hàm của tích phân có cận biến đổi):*

Nếu  là hàm số liên tục trên đoạn  thì  là hàm số liên tục trên đoạn , khả vi trên khoảng  và

.

Mở rộng:  khả vi trên khoảng , ta có

.

*Tính chất 2 (Định lý về giá trị trung bình tích phân):*

Nếu  là các hàm số khả tích trên đoạn  thì tồn tại một số  sao cho

.

*Tính chất 3:* Nếu  là các hàm số khả tích trên đoạn  và

,

thì

.

*Tính chất 4:* Nếu  là các hàm số khả tích trên đoạn  thì

.

*Tính chất 5:* Nếu  là hàm số liên tục trên đoạn  thì

.

*Tính chất 6 (Bất đẳng thức Cauchy – Schwartz):* Nếu  là các hàm số khả tích trên đoạn  thì

.

2. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẤT ĐẲNG THỨC TÍCH PHÂN

2.1. Phương pháp đánh giá hàm dưới dấu tích phân

Để chứng minh bất đẳng thức  ta thường xác định hàm  thỏa mãn các điều kiện sau:

* Điều kiện 1: . Chú ý một số đánh giá sau
* Bất đẳng thức Cauchy: .
* .
* .
* Điều kiện 2: .

Ví dụ 1 [IMC2010]. Cho . Chứng minh rằng .

*Phân tích*: Ta thấy ; từ đó dẫn đến BĐT đã cho tương đương với , từ đó ta nghĩ đến việc đánh giá

: luôn đúng.

Cách suy diễn ngược từ kết luận của bài toán hoàn toàn rất tự nhiên, đây là một trong những cách ta thường sử dụng trong giải toán.

Ví dụ 2 [OLP 2015B]. Cho  là một hàm liên tục thỏa mãn .

Chứng minh rằng .

*Phân tích*: Từ giả thiết  và BĐT cần chứng minh xuất hiện  nên dẫn đến tìm đánh giá sau với 

.

Tích phân hai vế trên đoạn  suy ra

.

Chọn  thỏa mãn  ; thì ta có Đpcm.

Ví dụ 3. Chứng minh rằng nếu  là hàm số nhận giá trị thực, khả tích trên đoạn  và  thì .

*Lời giải*: Từ giả thiết ta có . Lấy tích phân hai vế ta có

. Suy ra,



Như vậy (Đpcm).

2.2. Phương pháp tách miền lấy tích phân thành các đoạn thích hợp

Để chứng minh bất đẳng thức , ta sử dụng tính chất 1, tách đoạn lấy tích phân thành nhiều đoạn, chẳng hạn .

* Trên đoạn , ta chọn hàm  sao cho .
* Trên đoạn , ta chọn hàm  sao cho .

Từ đó đánh giá .

Ví dụ 4. [OLP2017] Giả sử  là một hàm số liên tục thỏa mãn đồng thời hai điều kiện sau

.

Chứng minh rằng tồn tại một khoảng mở , không rỗng sao cho

.

*Phân tích*: Để giải quyết bài này, một cách rất tự nhiên ta nghĩ đến sử dụng phương pháp phản chứng, điều này dẫn đến bất đẳng thức sau

.

Điều ta cần chỉ ra là cần phải chứng minh giả thiết sai, tách cận như sau





Chọn  thỏa mãn .

Dấu “=” xảy ra trong bất đẳng thức trên, vì  liên tục trên đoạn  nên



Tuy nhiên hàm số này không liên tục tại . Như vậy điều phản chứng là sai.

Vậy ta suy ra điều phải chứng minh.

Ví dụ 5. Cho  là hàm số liên tục, có đạo hàm trên đoạn  và thỏa mãn

.

Chứng minh rằng .

*Lời giải*: Ta tách cận như sau  với 

Lấy  bất kỳ. Theo Định lý Lagrange,

,

.

Do đó 

Chọn  ta có  Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi



Tuy nhiên hàm số này không liên tục tại . Vậy ta có điều phải chứng minh.

2.3. Phương pháp hàm số

Để chứng minh bất đẳng thức , ta có thể sử dụng phương pháp hàm số như sau:

* Xét hàm số , khi đó  là hàm số liên tục trên đoạn  và  khả vi trên khoảng  với

.

* Dựa vào giả thiết, tìm cách đánh giá, khảo sát hàm số  trên đoạn  để chứng minh .

Ví dụ 6. [OLP1995] Cho  và  là hàm số liên tục, nghịch biến trên đoạn . Chứng minh rằng với mọi  ta luôn có .

*Lời giải*: Ta sẽ giải quyết bài toán này theo 2 cách khác nhau như sau

Cách 1: (Phương pháp hàm số) Nhận thấy với mọi  ta có

.

BĐT này gợi ý cho chúng ta xét đến hàm số , chú ý đến giả thiết  nghịch biến trên đoạn , do đó

.

Suy ra,  nghịch biến trên  đúng (đpcm).

Cách 2: (Phương pháp tách cận)

Với , ta có  do đó biến đổi BĐT đã cho tương đương với



trong đó  (theo Định lý về giá trị trung bình tích phân).

Bất đẳng thức cuối cùng đúng do  là hàm giảm trên đoạn . Vậy ta có Đpcm.

Ví dụ 7. [OLP 2019] Cho  là một hàm số khả vi liên tục trên  và .

1. Chứng minh rằng

.

1. Tìm ví dụ về một hàm số  khả vi liên tục trên  và  sao cho

.

*Lời giải*: a) Nhận xét: Chú ý rằng, do  ta nghĩ đến tích phân với cận biến đổi   nên ta có

.

Do đó BĐT đã cho tương đương với

.

Ta có .

Vậy ta có Đpcm.

b) Chọn một hàm số  dạng đa thức bậc hai có đạo hàm  đổi dấu trên .

Đặt , ta có  là một hàm số khả vi liên tục trên  với và

.

Vậy  thỏa mãn yêu cầu đề bài.

Ví dụ 8. [OLP 2018] Cho hai số thực  và là một hàm số khả vi liên tục sao cho

.

Chứng minh rằng .

*Lời giải*: Vì  liên tục nên tồn tại .

BĐT cần chứng minh tương đương với



Để ý rằng , do đó ta dẫn đến đặt hàm số

.

Ta có  và .

Vì  nên  là hàm lồi trên đoạn , mà  do đó , như vậy

. 

Tương tự, đặt  ta có  là hàm lõm trên đoạn  dẫn đến

. 

Từ  và  suy ra BĐT phải chứng minh.

Ví dụ 9. Giả sử hàm số  liên tục trên đoạn , khả vi trên khoảng  và

.

Chứng minh rằng .

*Lời giải*: Xét hàm số , vì  liên tục trên đoạn  nên



Từ giả thiết suy ra ; đồng thời

.

Do đó , mà liên tục trên đoạn  nên

 (Đpcm).

2.4. Phương pháp sử dụng bất đẳng thức Cauchy–Schwartz

Ví dụ 10. Giả sử  là hàm số liên tục thỏa mãn điều kiện

.

Chứng minh rằng .

*Lời giải*: Sử dụng bất đẳng thức Cauchy –Schwartz ta có



Chọn  sao cho  Như vậy ta chứng minh được

.

Dưới đây chúng tôi đưa ra một số ví dụ kết hợp phương pháp BĐT Cauchy–Schwartz với các phương pháp nêu trên.

Ví dụ 11. [OLP2013] Cho  là hàm dương, liên tục trên  và thỏa mãn điều kiện

.

Chứng minh rằng .

*Lời giải*: Dựa vào giả thiết ta nghĩ đến hàm lượng giác  dẫn đến



Sử dụng phép đổi biến ;  và sử dụng BĐT Cauchy –Schwartz ta có





Dấu “=” xảy ra dẫn đến : vô lý. Vậy ta có đpcm.

Ví dụ 12. [OLP2014] Cho  là hàm số liên tục trên đoạn  và thỏa mãn

.

Chứng minh rằng .

*Lời giải*: Từ giả thiết ta có . BĐT cần chứng minh tương đương với BĐT sau



Sử dụng bất đẳng thức Cauchy –Schwartz, với  ta có

.

Ta có  do đó



Suy ra 

*Nhận xét*: Bài toán này đòi hỏi chúng ta kết hợp nhiều phương pháp với nhau. Ta thấy phải khá tinh ý trong việc biến đổi các tích phân.

Ví dụ 13. [OLP1998] Cho  khả vi liên tục trên đoạn  và . Chứng minh rằng

.

*Lời giải*: Đặt , ta có

.

Với , sử dụng bất đẳng thức Cauchy –Schwartz ta có



Do đó  Lấy tích phân hai vế trên đoạn  ta được

 (Đpcm).

2.5. Một số phương pháp khác

Trên đây là một số phương pháp điển hình, chúng ta hay gặp trong các kì thì Olympic sinh viên Toàn quốc. Ngoài ra, có một số kĩ thuật khác để giải quyết các BĐT tích phân, ta xét các ví dụ dưới đây

**Ví dụ 14.** Cho  là hàm số liên tục trên đoạn  và thỏa mãn

.

Chứng minh rằng

.

***Lời giải*:** + Để chứng minh BĐT vế trái ta chia đoạn  thành  phần bằng bởi  điểm , theo định nghĩa tích phân xác định ta có



 (Đpcm).

+ Chú ý rằng từ giả thiết suy ra  là hàm lồi trên đoạn , tức là

.

Ta chia đoạn  thành  phần bằng bởi  điểm , theo định nghĩa tích phân xác định ta có



.

**Ví dụ 15.** Cho  là hàm số liên tục trên đoạn  và .

Chứng minh rằng

.

*Lời giải*: Vì  là hàm số liên tục trên đoạn  nên  sao cho

.

BĐT cần chứng minh tương đương với .

TH1: Nếu  thì do  là hàm số liên tục tại  nên với mọi  đủ nhỏ,  sao cho với  ta đều có

.

Suy ra ; từ đó dẫn đến .

TH2: Nếu  hoặc  thì ta làm tương tự dẫn đến .

Mặt khác, .

Như vậy ta chứng minh được  Từ đây ra thu được Đpcm.

**3. KẾT LUẬN**

Bất đẳng thức tích phân là một chủ đề quan trọng trong các kì thi học sinh giỏi và kì thi Olympic toán học dành cho sinh viên. Ta thường gặp khó khăn trong việc tiếp cận, giải bài toán về chủ đề này. Để giúp các bạn phần nào có cái nhìn hệ thống và tổng quan nhất có thể, chúng tôi giới thiệu một số phương pháp và hệ thống các ví dụ góp phần giải quyết các khó khăn đó. Đây có thể coi là tài liệu hữu ích dành cho các thầy cô ôn thi Olympic Toán và các bạn sinh viên quan tâm.

**TÀI LIỆU THAM KHẢO**

1. Tô Văn Ban (2005), *Những bài tập nâng cao Giải tích*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

2. Hội toán học Việt Nam (2015-2019), *Kỷ yếu kỳ thi Olympic Toán học sinh viên-học sinh các năm 2015, 2016, 2017, 2018, 2019.*

3. W. J. Kaczor, M. T. Nowak (2003), *Problems in mathematical analysis III*, AMS, United States of American.

4. T. Đ. Long, N. Đ. Sang, H. Q. Toàn (2006), *Giáo trình giải tích*, Tập 2 (*Phép tính tích phân* hàm một biến, chuỗi số - dãy hàm – chuỗi hàm), NXB ĐHQG, Hà Nội.

5. W.Rudin (1976), *Principles of mathemmatical Analysis*, McGraw – Hill Education, United States of American.