

MỘT THUẬT TOÁN CHIẾU MỚI GIẢI BÀI TOÁN CÂN BẰNG GIẢ ĐƠN ĐIỀU

Hồ Phi Tứ

Khoa Toán và Khoa học tự nhiên, Trường Đại học Hải Phòng

Email: tuhp@dhhp.edu.vn

Nguyễn Hồng Nhung

Trường THCS Nam Sơn,

An Dương, Hải Phòng

Hoàng Xuân Bính

Trường THPT chuyên Biên Hòa,

Phủ Lý, Hà Nam

Trần Xuân Hưng

Trường THCS Trương Công Định,

Lê Chân, Hải Phòng

Ngày nhận bài: 09/10/2023

Ngày PB đánh giá: 07/11/2023

Ngày duyệt đăng: 15/12/2023

TÓM TẮT: Trong bài báo này, chúng tôi đề xuất một thuật giải mới cho bài toán cân bằng $EP(C, f)$ với song hàm cân bằng f chỉ cần yêu cầu giả đơn điệu. Tại mỗi bước lặp, phương pháp của chúng tôi là sự kết hợp giữa kỹ thuật bài toán phụ (được đề xuất bởi Mastroeni) và phương pháp chiếu lên nửa không gian chứa miền ràng buộc C , còn được gọi là phương pháp chiếu dưới đạo hàm (đề xuất bởi Censor). Cùng với việc sử dụng tìm kiếm kiểu Amijo, trong chứng minh sự hội tụ của thuật toán của chúng tôi không cần biết trước hệ số Lipschitz của song hàm f . Bên cạnh đó, định lý hội tụ của thuật toán cũng được thiết lập và chứng minh một cách chi tiết trong bài báo.

Từ khóa: Bài toán cân bằng, Giả đơn điệu, Kỹ thuật bài toán phụ, Phương pháp lặp.

A NEW PROJECTION ALGORITHM FOR SOLVING PSEUDO-MONOTONE EQUILIBRIUM PROBLEMS

ABSTRACT: In this article, we introduced a new algorithm for solving equilibrium problem $EP(C, f)$ with equilibrium bifunctions f that only requires pseudo monotone. At each iteration, our method is the combination of the auxiliary subproblem technique (proposed by Mastroeni) and the half-space projection method containing the constrain domain C , also known as the sub-gradient projection method (suggested by Censor). By using Amijo searching method when proving the convergence of our algorithm, we do not need to know the Lipschitz coefficient of the bifunction in advance. Besides that, the convergence theorem of the algorithm is also established and proven in the paper in detail.

Key words: Equilibrium problem, Pseudo monotone, Auxiliary problem technique, Iterative method.

1. Giới thiệu

Bài toán cân bằng được giới thiệu lần đầu tiên bởi H. Nikaido và K. Isoda trong công trình nghiên cứu [1] vào năm 1955. Sau đó bài toán tiếp tục được nghiên cứu bởi nhiều tác giả trong nước và trên thế giới [7, 8, 9] và đã thu được rất nhiều kết quả sâu sắc. Cụ thể bài toán cân bằng được phát biểu như sau:

Cho C là một tập con lồi, đóng, khác rỗng của không gian $\mathbb{R}^n$, f là song hàm từ $C \times C$ vào $\mathbb{R}$ thỏa mãn $f(x, x) = 0$ với mọi $x \in C$.

Tìm $x^* \in C$ sao cho $f(x^*, y) \geq 0, \forall y \in C$. (1.1)

Tập C được gọi là tập ràng buộc, f được gọi là song hàm giá. Bài toán cân bằng với tập ràng buộc C và song hàm giá f thường được ký hiệu $EP(C, f)$ và tập nghiệm được ký hiệu là $Sol(f, C)$.

Tuy bài toán cân bằng (1) được phát biểu rất đơn giản nhưng lại bao hàm được rất nhiều lớp bài toán quan trọng trước đó [10], như bài toán tối ưu, bài toán bù, bài toán bất đẳng thức biến phân, bài toán tìm điểm bất động, bài toán tìm điểm yên ngựa, đặc biệt là bài toán tìm điểm cân bằng Nash trong trò chơi bất hợp tác. Do đó việc nghiên cứu bài toán cân bằng không những có ý nghĩa trong lý thuyết mà còn có ý nghĩa trong cả thực tiễn. Cụ thể là việc tìm lời giải

cho bài toán cân bằng suy ra lời giải cho một số lớp bài toán liên quan. Điều này cũng giải thích vì sao bài toán cân bằng ngày càng được nhiều người quan tâm nghiên cứu.

Một số khái niệm được sử dụng trong nghiên cứu này như tính đơn điệu của song hàm, phép chiếu, nón pháp tuyến, dưới vi phân [11, 12].

Cho song hàm $f : C \times C \rightarrow \mathbb{R}$, khi đó f được gọi là

Đơn điệu trên C nếu và chỉ nếu

$$f(x, y) + f(y, x) \leq 0 \quad \forall x, y \in C;$$

Giả đơn điệu trên C , nếu và chỉ nếu

$$f(x, y) \geq 0 \Rightarrow f(y, x) \leq 0 \quad \forall x, y \in C;$$

Liên tục kiểu Lipschitz trên C với các hằng số $c_1 > 0$ và $c_2 > 0$, nếu

$$f(x, z) \leq f(x, y) + f(y, z) + c_1 \|x - y\|^2 + c_2 \|y - z\|^2 \quad \forall x, y, z \in C.$$

Với mỗi $x \in \mathbb{R}^n$. Khi đó $P_C(x) := \arg \min \{ \|y - x\|^2 : y \in C \}$ được gọi là phép chiếu metric của $\mathbb{R}^n$ lên C . Dễ thấy $P_C(\cdot)$ có các tính nhất sau:

- $\langle x - y, P_C(x) - P_C(y) \rangle \geq \|P_C(x) - P_C(y)\|^2 \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$,
- $\langle x - P_C(x), P_C(x) - y \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in C$,
- $\|x - y\|^2 \geq \|x - P_C(x)\|^2 + \|y - P_C(y)\|^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n, y \in C$.

Với mỗi $x^0 \in C$ cố định, tập $N_C(x^0) = \{ \omega \in \mathbb{R}^n : \langle \omega, x - x^0 \rangle \leq 0, \forall x \in C \}$ được gọi là nón pháp tuyến của C tại x^0 và tập

$$\partial f(x, \cdot)(x^0) = \left\{ \begin{array}{l} w \in \mathbb{R}^n : f(x, y) \\ \geq \langle w, y - x^0 \rangle \\ + f(x, x^0) \quad \forall y \in C \end{array} \right\}, x \in C$$

được gọi là dưới vi phân của f theo biến thứ 2 tại x^0 .

Một hàm $g : C \rightarrow \mathbb{R}$ được gọi là Lồi trên C nếu với mọi $x, y \in C$, $\lambda \in [0, 1]$, ta có $g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y)$.

Nửa liên tục dưới trên C nếu với mọi $x_0 \in C$, ta có $\liminf_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq g(x_0)$.

2. Tổng quan nghiên cứu

Ngày nay, bài toán $EP(C, f)$ nhận được nhiều sự quan tâm bởi các nhà nghiên cứu không những bởi tính mới trong lý thuyết mà còn bởi tính ứng dụng trong thực tiễn của bài toán. Các kết quả về sự tồn tại nghiệm, tính chất tập

nghiệm cũng như cấu trúc tập nghiệm của bài toán cân bằng là khá đầy đủ. Do đó, hiện nay các nhà nghiên cứu tập trung chủ yếu vào hướng nghiên cứu đề xuất các thuật giải mới cho bài toán $EP(C, f)$. Có nhiều thuật toán đã được đề xuất cho bài toán cân bằng như thuật toán chiếu [2, 13], thuật toán đạo hàm tăng cường (thuật toán chiếu hai lần) [3, 14]. Gần đây có phương pháp chiếu cắt lai ghép [4], phương pháp hiệu chỉnh Tikhonov [5]. Tuy nhiên các thuật toán chủ yếu áp dụng cho song hàm f đơn điệu. Trong trường hợp song hàm f không có được tính đơn điệu, chẳng hạn chỉ là giả đơn điệu thì các thuật toán trên không đảm bảo tính hội tụ về nghiệm của bài toán $EP(C, f)$. Một xu thế hiện nay mà các nhà nghiên cứu đang rất quan tâm là nghiên cứu đề xuất các thuật toán cho bài toán cân bằng $EP(C, f)$ giả đơn điệu, khi đó thuật toán được áp dụng cho lớp song hàm rộng hơn.

Trong nghiên cứu này dựa trên ý tưởng thuật toán chiếu trong bài báo [6] của Solodov-Svaiter cho bài toán bất đẳng thức biến phân, chúng tôi mở rộng cho bài toán cân bằng với song hàm giả đơn điệu. Đồng thời chúng tôi chứng minh được sự hội tụ của thuật toán về nghiệm của bài toán cân bằng $EP(C, f)$ dưới các điều kiện thích hợp của bộ tham số.

3. Nội dung nghiên cứu

Trong mục này, chúng tôi đề xuất một thuật toán mới cho bài toán cân bằng với song hàm giả đơn điệu.

Gọi Ω là tập con lồi đóng khác rỗng trong R^n và chứa tập C . Trước hết chúng tôi đưa ra một số giả thiết thông dụng cho song hàm giả f như sau:

(A1) $f(\cdot, y)$ liên tục trên Ω với mọi $y \in C$;

(A2) $f(x, \cdot)$ nửa liên tục dưới, lồi trên Ω với mọi $x \in C$;

(A3) f giả đơn điệu trên Ω .

3.1. Thuật toán 1

Bước 0. Lấy $x^0 \in C$, chọn $\eta \in (0, 1)$, $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$ và gán $k := 1$.

Bước 1. Tính $y^k = \arg \min \{f(x^k, y) + \frac{1}{\rho} \|y - x^k\|^2 : y \in C\}$.

Bước 2. Tìm m_k là số nguyên dương nhỏ nhất trong các số m thỏa mãn

$$\begin{cases} z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k \\ \langle g^{k,m}, x^k - y^k \rangle \geq \frac{1}{\rho} \|x^k - y^k\|^2, \quad g^{k,m} \in \partial_2 f(z^{k,m}, z^{k,m}) \end{cases} \quad (3.1)$$

Bước 3. Tính $x^{k+1} = P_{C_k}(x^k)$, trong đó $C_k = \{x \in C : \langle g^k, x - z^k \rangle \leq 0\}$ với $z^k := z^{k,m_k}, g^k := g^{k,m_k}$.

Bước 4. Nếu $\|x^k - y^k\| < \varepsilon$ thì dừng thuật toán. Ngược lại, gán $\eta := \eta^{m_k}$, $k := k+1$ và quay về **Bước 1**.

3.2. Sự hội tụ

Để chứng minh sự hội tụ của thuật toán trên, trước hết chúng tôi cần một số bổ đề sau đây.

Bổ đề 3.1. Giả sử các điều kiện (A2) và (A3) được thỏa mãn. Khi đó, tập nghiệm $Sol(C, f) \subseteq H_z$ với mọi $z \in C$, trong đó $H_z = \{x \in R^n : \langle g, x - z \rangle \leq 0\}, g \in \partial_2 f(z, z)$

Chứng minh. Giả sử $x^* \in Sol(C, f)$, ta sẽ chỉ ra x^* cũng thuộc H_z . Thật vậy, từ $g \in \partial_2 f(z, z)$ và tính cân bằng của song hàm f suy ra $\langle g, x^* - z \rangle \leq f(z, x^*) - f(z, z) = f(z, x^*), \forall z \in C$.

Mặt khác, do $x^* \in Sol(C, f)$ nên $f(x^*, z) \geq 0, \forall z \in C$, kết hợp với tính giả đơn điệu của song hàm f dẫn đến $f(z, x^*) \leq 0, \forall z \in C$. Dẫn đến $\langle g, x^* - z \rangle \leq 0, \forall z \in C$ hay $x^* \in H_z$.

Bổ đề 3.2. Cho $\{z^k\}$ là một dãy trong C , hội tụ về $\bar{z}$ và $\{g^k\}$ với $g^k \in \partial_2 f(z^k, z^k)$ là một hội tụ về $\bar{g}$. Khi đó, dưới các điều kiện (A1) và (A2), ta có $\bar{g} \in \partial_2 f(\bar{z}, \bar{z})$.

Chứng minh. Với $g^k \in \partial_2 f(z^k, z^k)$, ta có

$$f(z^k, y) \geq f(z^k, z^k) + \langle g^k, y - z^k \rangle = \langle g^k, y - z^k \rangle, \forall y \in C.$$

Cho qua giới hạn hai vế bất đẳng thức trên, kết hợp với giả thiết nửa liên tục trên theo biến thứ nhất của song hàm f , chúng ta thu được

$$f(\bar{z}, y) \geq \limsup_{k \rightarrow \infty} f(z^k, y) \geq \lim_{k \rightarrow \infty} \langle g^k, y - z^k \rangle = \langle \bar{g}, y - \bar{z} \rangle = f(\bar{z}, \bar{z}) + \langle \bar{g}, y - \bar{z} \rangle, \forall y \in C.$$

Suy ra $\bar{g} \in \partial_2 f(\bar{z}, \bar{z})$ $\square$

Bổ đề 3.3. Giả sử các điều kiện (A1) và (A2) được thỏa mãn. Khi đó, tại mỗi bước lặp k của thuật toán, luôn tồn tại số nguyên dương m thỏa mãn hệ (3.1) với mỗi $g^{k,m} \in \partial_2 f(z^{k,m}, z^{k,m})$. Hơn nữa, nếu thêm điều kiện (A3) thì với mỗi $x^* \in \text{Sol}(C, f)$ ta có bất đẳng thức sau:

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 - \left(\frac{\eta_k}{\rho \|g^k\|} \right)^2 \|x^k - y^k\|^4 \quad \forall k, \quad (33)$$

Trong đó $\bar{x}^k = P_{H_{z^k}}(x^k)$.

Chứng minh. Trước hết chúng tôi sẽ chỉ ra tồn tại số nguyên dương m_0 sao cho $\langle g^{k,m_0}, x^k - y^k \rangle \geq \frac{1}{\rho} \|y^k - x^k\|^2$, $\forall g^{k,m_0} \in \partial_2 f(z^{k,m_0}, z^{k,m_0})$.

Thật vậy, giả sử ngược lại, với mọi số nguyên dương m và $z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k$ tồn tại $g^{k,m} \in \partial_2 f(z^{k,m}, z^{k,m})$ sao cho $\langle g^{k,m}, x^k - y^k \rangle < \frac{1}{\rho} \|x^k - y^k\|^2$.

Từ $z^{k,m} = (1-\eta^m)x^k + \eta^m y^k$ và $\eta \in (0, 1)$ suy ra $z^{k,m} \rightarrow x^k$ khi $m \rightarrow \infty$, kết hợp với Định lý 25.4 trong [15] dẫn đến dãy $\{g^{k,m}\}$ hội tụ về $\bar{g}$ nào đó. Áp dụng Bổ đề 3.2, ta thu được $\bar{g} \in \partial_2 f(x^k, x^k)$ và $\langle \bar{g}, x^k - y^k \rangle \leq \frac{1}{\rho} \|x^k - y^k\|^2$. (3.4)

Theo định nghĩa dưới vi phân $\bar{g} \in \partial_2 f(x^k, x^k)$, ta có

$$f(x^k, y^k) \geq f(x^k, x^k) + \langle \bar{g}, y^k - x^k \rangle = \langle \bar{g}, y^k - x^k \rangle.$$

Kết hợp điều này với (3.4) dẫn đến $f(x^k, y^k) + \frac{1}{\rho} \|y^k - x^k\|^2 \geq 0$,

Điều này mâu thuẫn với giả thiết $f(x^k, y^k) + \frac{1}{\rho} \|y^k - x^k\|^2 < 0$.

Như vậy, phải tồn tại số nguyên dương m_0 sao cho $\langle g^{k,m_0}, x^k - y^k \rangle \geq \frac{1}{\rho} \|y^k - x^k\|^2$, $\forall g^{k,m_0} \in \partial_2 f(z^{k,m_0}, z^{k,m_0})$.

Tiếp theo, để chứng minh bất đẳng thức (3.3). Ta đặt $d^k := x^k - y^k$, $H_k = H_{z^k}$

Từ $x^{k+1} = P_{C \cap H_k}(\bar{x}^k)$ và $x^* \in \text{Sol}(C, f)$, $x^* \in C \cap H_k$ kết hợp với Bổ đề 3.1, ta có $\|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 \leq \langle x^* - \bar{x}^k, x^{k+1} - \bar{x}^k \rangle$.

$$\text{Lại có } \|x^{k+1} - x^*\|^2 = \|\bar{x}^k - x^*\|^2 + \|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 + 2\langle \bar{x}^k - x^*, x^{k+1} - \bar{x}^k \rangle$$

suy ra

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|\bar{x}^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2. \quad (3.5)$$

$$\bar{x}^k = P_{H_k}(x^k) =$$

Chọn $x^k - \frac{\langle g^k, x^k - z^k \rangle}{\|g^k\|^2} g^k$, thế vào (3.5) ta được

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 - 2\langle g^k, x^k - x^* \rangle \frac{\langle g^k, x^k - z^k \rangle}{\|g^k\|^2} + \frac{\langle g^k, x^k - z^k \rangle^2}{\|g^k\|^2}.$$

Thay $x^k = z^k + \eta_k d^k$, chúng ta thu được

$$\begin{aligned} \|x^{k+1} - x^*\|^2 &\leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 + \left(\frac{\eta_k \langle g^k, d^k \rangle}{\|g^k\|} \right)^2 - \frac{2\eta_k \langle g^k, d^k \rangle}{\|g^k\|^2} \langle g^k, x^k - x^* \rangle \\ &= \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 - \left(\frac{\eta_k \langle g^k, d^k \rangle}{\|g^k\|} \right)^2 - \frac{2\eta_k \langle g^k, d^k \rangle}{\|g^k\|^2} \langle g^k, z^k - x^* \rangle, \end{aligned}$$

kết hợp với $\langle g^k, x^k - y^k \rangle \geq \frac{1}{\rho} \|x^k - y^k\|^2$ và $x^* \in H_k$ chúng ta có thể viết lại thành

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 - \left(\frac{\eta_k}{\rho \|g^k\|} \right)^2 \|x^k - y^k\|^4.$$

Vậy ta thu được bất đẳng thức cần chứng minh.

Tiếp theo, chúng tôi phát biểu và chứng minh định lý hội tụ của thuật toán chúng tôi đề xuất và đây cũng là kết quả chính của nghiên cứu.

Định lý 3.1. Giả sử $\text{Sol}(C, f) \neq \emptyset$, các điều kiện (A1) – (A3) được thỏa mãn. Khi đó, dãy $\{x^k\}$ sinh ra từ Thuật toán 1 hội tụ về điểm $x^* \in \text{Sol}(C, f)$.

Chứng minh. Với $x^* \in \text{Sol}(C, f)$, theo Bổ đề 3.3 ta có

$$\|x^{k+1} - x^*\|^2 \leq \|x^k - x^*\|^2 - \|x^{k+1} - \bar{x}^k\|^2 - \left(\frac{\eta_k}{\rho \|g^k\|} \right)^2 \|x^k - y^k\|^4,$$

suy ra dãy $\{\|x^k - x^*\|\}$ hội tụ. Do đó các dãy $\{x^k\}$, $\{y^k\}$, $\{z^k\}$ đều bị chặn.

Cho (3.3) qua giới hạn, chúng ta thu được $\lim_{k \rightarrow \infty} \eta_k \|x^k - y^k\| = 0$. (3.6)

Ta xét hai trường hợp sau:

Trường hợp 1. $\limsup_{k \rightarrow \infty} \eta_k > 0$. Khi đó tồn tại số $\bar{\eta} > 0$ và dãy con $\{\eta_{k_i}\} \subset \{\eta_k\}$ sao cho $\eta_{k_i} > \bar{\eta} \forall i$, kết hợp điều này với (3.6) suy ra $\lim_{i \rightarrow \infty} \|x^{k_i} - y^{k_i}\| = 0$. (3.7)

Mặt khác, do $\{x^k\}$ bị chặn, suy ra $\{x^{k_i}\}$ hội tụ về $\bar{x}$ nào đó khi $i \rightarrow \infty$. Từ (3.7) suy ra $\{y^{k_i}\}$ cũng hội tụ về $\bar{x}$ và do đó $z^{k_i} \rightarrow \bar{x}$ khi $i \rightarrow \infty$. Từ định nghĩa của y^{k_i} , ta có $f(x^{k_i}, y) + \frac{1}{\rho} \|y - x^{k_i}\|^2 \geq f(x^{k_i}, y^{k_i}) + \frac{1}{\rho} \|x^{k_i} - y^{k_i}\|^2 \forall y \in C$.

Cho $i \rightarrow \infty$, ta thu được bất đẳng thức

$$f(\bar{x}, y) + \frac{1}{\rho} \|\bar{x} - y\|^2 \geq f(\bar{x}, \bar{x}) + \frac{1}{\rho} \|\bar{x} - \bar{x}\|^2 = 0.$$

$$\text{Hay } f(\bar{x}, y) + \frac{1}{\rho} \|\bar{x} - y\|^2 \geq 0 \quad \forall y \in C.$$

Điều này có nghĩa là $\bar{x}$ là nghiệm của bài toán (1.1). Áp dụng bất đẳng thức (3.3) với $x^* = \bar{x}$, ta thu được dãy $\{\|x^k - \bar{x}\|\}$ hội tụ. Từ $\|x^{k_i} - \bar{x}\| \rightarrow 0$ chúng ta thu được $\{x^k\}$ hội tụ về $\bar{x} \in \text{Sol}(C, f)$.

Trường hợp 2. $\limsup_{k \rightarrow \infty} \eta_k = 0$. Theo Thuật toán 1 $z^k = (1 - \eta_k)x^k + \eta_k y^k$.

Như trên, chúng ta có thể giả sử rằng dãy $\{x^{k_i}\} \subset \{x^k\}$ hội tụ về điểm $\bar{x}$. Bằng lập luận tương tự trên ta cũng có dãy $\{y^k\}$ bị chặn, nên tồn tại dãy con $\{y^{k_i}\} \subset \{y^k\}$ hội tụ về $\bar{y}$. Từ định nghĩa của y^{k_i} , ta có

$$f(x^{k_i}, y^{k_i}) + \frac{1}{\rho} \|x^{k_i} - y^{k_i}\|^2 \leq f(x^{k_i}, y) + \frac{1}{\rho} \|x^{k_i} - y\|^2 \quad \forall y \in C.$$

Cho $i \rightarrow \infty$, kết hợp với tính nửa liên tục dưới của f theo biến thứ hai và nửa liên tục trên của f theo biến thứ nhất, ta thu được

$$f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{1}{\rho} \|\bar{x} - \bar{y}\|^2 \leq f(\bar{x}, y) + \frac{1}{\rho} \|\bar{x} - y\|^2 \quad \forall y \in C. \quad (3.8)$$

Mặt khác, theo tìm kiếm kiểu Amijo (3.1), với mọi $m_{k_i} - 1$, luôn tồn tại $g^{k_i, m_{k_i} - 1} \in \partial_2 f(z^{k_i, m_{k_i} - 1}, z^{k_i, m_{k_i} - 1})$ sao cho $\langle g^{k_i, m_{k_i} - 1}, x^{k_i} - y^{k_i} \rangle < \frac{1}{\rho} \|x^{k_i} - y^{k_i}\|$.

Do $z^{k_i, m_{k_i} - 1} \rightarrow \bar{x}$ khi $i \rightarrow \infty$, áp dụng Định lý 2.45 trong [15] suy ra dãy $\{g^{k_i, m_{k_i} - 1}\}$ hội tụ về $\bar{g}$. Theo Bổ đề 3.1, ta có $\bar{g} \in \partial_2 f(\bar{x}, \bar{x})$. Cho bất đẳng thức trên qua giới hạn, ta thu được $\langle \bar{g}, \bar{x} - \bar{y} \rangle < \frac{1}{\rho} \|\bar{x} - \bar{y}\|$. (3.9)

Mà $\bar{g} \in \partial_2 f(\bar{x}, \bar{x})$ suy ra $\langle \bar{g}, \bar{x} - \bar{y} \rangle \geq -f(\bar{x}, \bar{y})$. Kết hợp điều này với (3.9), ta có $f(\bar{x}, \bar{y}) + \frac{1}{\rho} \|\bar{x} - \bar{y}\| \geq 0$. (3.10)

Từ (3.8) và (3.10) dẫn đến $f(\bar{x}, y) + \frac{1}{\rho} \|\bar{x} - y\|^2 \geq 0, \forall y \in C$.

Điều này suy ra $\bar{x}$ là một nghiệm của bài toán cân bằng giả đơn điệu (1.1). Tiếp theo ta áp dụng bất đẳng thức (3.3) cho $x^* = \bar{x}$ và lý luận tương tự ta thu được dãy $\{x^k\}$ hội tụ về $\bar{x} \in \text{Sol}(C, f)$. Như vậy định lý hoàn toàn được chứng minh.

4. Kết luận

Như chúng ta đã biết lớp song hàm đơn điệu chứa trong lớp song hàm giả đơn điệu. Do đó, thuật toán của chúng tôi áp dụng được cho một lớp bài toán cân bằng rộng hơn những thuật toán trước đó. Hơn nữa trong thuật toán của chúng tôi, bằng việc sử dụng kỹ thuật tìm kiếm kiểu Amijo tại mỗi bước lặp, chúng tôi đã chứng minh được sự hội tụ của thuật toán về nghiệm của bài toán cân bằng $EP(f, C)$ mà không cần biết trước hệ số Lipschitz của song hàm f .

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. H. Nikaido, K. Isoda (1955), Note on noncooperative convex games, *Pacific Journal of Mathematics*, pp. 807-815.
2. P. Daniele, F. Giannessi, A. Maugeri (2003), *Equilibrium Problems and Variational Models*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht.
3. G.M. Korpelevich (1976), The extragradient method for finding saddle points and other problems, *Ekonom. Math. Methody* 12, pp. 747-756.
4. M.V. Solodov and B.F. Svaiter (1999), A hybrid projection-proximal point algorithm, *J. Convex Anal.* 6, pp. 59-70.
5. A.N. Tikhonov (1977), V.Ya. Arsenin, Solutions of Ill-Posed Problems, *John Wiley and Sons*, New York.
6. M.V. Solodov and B.F. Svaiter (1999), A new projection method for variational inequality problems, *SIAM J. Control. Optim.*, 37, pp. 765-776.
7. A. Moudafi (1999), Proximal point algorithm extended to equilibrium problem, *J. Natural Geom.* 15, pp. 91-100.
8. T.D. Quoc, P.N. Anh, and L.D. Muu (2012), Dual extragradient algorithms to equilibrium Problems, *J. Global Optim.* 52, pp. 139-159.
9. P.N. Anh (2013), A hybrid extragradient method extended to fixed point problems and equilibrium problems. *Optim.* 62, 271- 283.
10. L.D. Muu, W. Oettli (1992), Convergence of an adaptive penalty scheme for finding constrained equilibria, *Nonlinear Anal. TMA.* 18, pp. 1159-1166.
11. G. Bigi, M. Castellani, M. Pappalardo, M. Passacantando (2019), *Nonlinear Programming Techniques for Equilibria*, Springer Nature Switzerland AG 2019.
12. H. Tuy (1998), *Convex analysis and global optimization*, Kluwer Academic Publishers.
13. S. Scheimberg, P.S.M. Santos (2011), A relaxed projection method for finite dimensional equilibrium problems. *Optimization* 60, 1193-1208.
14. N.T.T. Van, J.J. Strodiot, V.H. Nguyen (2009), The interior proximal extragradient method for solving equilibrium problems. *J. Glob. Optim.* 44, 175-192.
15. R.T. Rockafellar (1970), *Convex Analysis*, Princeton University Press.