HỆ THỨC XÁC ĐỊNH PHI TUYẾN ĐỐI VỚI VẬT LIỆU TRỰC HƯỚNG HÌNH TRỤ

Vũ Tiến Đức
Khoa Toán và Khoa học tự nhiên, Trường Đại học Hải Phòng
Email: ducvt@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 04/10/2023
Ngày PB đánh giá: 10/11/2023
Ngày duyệt đăng: 15/12/2023

TÓM TẮT: Trong bài báo này, tôi đã phân tích cấu trúc của tensor đàn hồi đối với các vật liệu trực hướng có dạng hình trụ. Theo đó, trong tensor đàn hồi của vật liệu trực hướng hình trụ không có mười hai thành phần độc lập mà chỉ có sáu thành phần. Tôi cũng đã đề xuất biểu diễn các quá trình biến dạng của vật liệu dị hướng nói chung và tensor đàn hồi đối với vật liệu trực hướng hình trụ trong không gian sáu chiều. Trong không gian này, tôi đã xây dựng một biểu thức đối với vật liệu trực hướng hình trụ thể hiện sự phụ thuộc của biến dạng vào ứng suất. Từ biểu thức này, chúng ta có thể đưa ra các phiên bản khác nhau của hệ thức xác định như: hệ thức xác định tuyến tính, phi tuyến tính bậc hai và bậc ba. Các hệ thức này đều thỏa mãn sự khái quát hóa định đề riêng của tính đẳng hướng trong quá trình biến dạng hữu hạn.

Từ khóa: vật liệu dị hướng, vật liệu trực hướng, hệ thức xác định, biến dạng hữu hạn.

NONLINEAR CONSTRUCTIVE RELATIONSHIPS FOR CYLINDRICAL ORTHOTROPIC MATERIAL

ABSTRACT: In this paper, I analyzed the structure of the elastic tensor for orthotropic materials with cylindrical shape. Accordingly, there are not twelve independent components but only six in the elastic tensor of a cylindrical orthotropic materials. I have also proposed to represent the deformation processes of general anisotropic materials and the elastic tensor for cylindrical orthotropic materials in six-dimensional space in which I have constructed an expression for cylindrical orthotropic materials that shows the dependence of strain on stress. From this expression, we can derive different versions of the deterministic relation such as: linear, quadratic and cubic nonlinear deterministic relations. These relations all satisfy the generalization of the particular postulate of isotropy during finite deformation.

Key words: anisotropic material, orthotropic material, constitutive relations, finite deformations.

---

1. Giới thiệu

Hệ thức xác định dưới dạng khái quát hóa định luật Húc trong trường hợp biến dạng hữu hạn được biểu diễn dưới dạng tensor tuyến tính đã sử dụng cặp tensor ứng suất $\mathbf{T}$ và tensor biến dạng Cauchy-Green $\boldsymbol{\varepsilon}$.

$\mathbf{T} = \mathbf{N}..\boldsymbol{\varepsilon}$, (1)

trong đó **N** là tensor cấp 4, được gọi là tensor đàn hồi.

Đối với vật liệu trực hướng, tensor đàn hồi có 12 thành phần khác không tương ứng với 12 hằng số đàn hồi của vật liệu :

$$\begin{bmatrix} N_{11} & N_{12} & N_{13} & 0 & 0 & 0 \\ N_{21} & N_{22} & N_{23} & 0 & 0 & 0 \\ N_{31} & N_{32} & N_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{66} \end{bmatrix}.$$

Đối với các loại vật liệu trực hướng khác nhau, do tính đối xứng của nó có thể làm giảm bớt số lượng các thành phần khác không độc lập, khiến cho việc nghiên cứu trở nên dễ dàng hơn. Cụ thể, cấu trúc của tensor $\mathbf{N}$ đối với dạng đối xứng khác nhau của vật liệu dị hướng đã được nghiên cứu trong các công bố nổi tiếng của Lekhnitsky [5], Markin A.A., Sokolova M.Y và các cộng sự [6,7,8], Chernykh K.F [1] …

2. Tổng quan nghiên cứu

Định luật Húc (1) đã được sử dụng rộng rãi trong hầu hết các lĩnh vực liên quan đến cơ học và vật liệu. Tuy nhiên sự phát triển nhanh chóng của ngành công nghệ vật liệu đã tạo ra những vật liệu tổng hợp thể hiện đặc tính phi tuyến ngay cả với biến dạng nhỏ. Vì lý do này, các phép tính trong khuôn khổ định luật Húc không thể áp dụng được cho chúng.

Do đó, trong những thập niên gần đây, nhiều nhà khoa học đã giành nhiều thời gian cho việc nghiên cứu các hệ thức xác định phi tuyến tính. Trong đó, các tính chất của vật liệu đẳng hướng trong khuôn khổ lý thuyết đàn hồi đa môđun đã được nghiên cứu bởi các tác giả như S.A. Ambartsumyan và A.A. Khachatryan, L.A. Tolokonnikov, N.M. Matchenko, E.V. Lomakin, G.S. Shapiro…. Các nghiên cứu về tính chất của vật liệu dị hướng và đặc biệt là vật liệu trực hướng được trình bày bởi các tác giả như V-.J. Papa-zoglou và N.-G. Tsouv-alis, B.P. Patel, K. Khan, Y. Na-thC.W. Bert, C.-W.- Bert, J.N. Reddy ….

Các mô hình phức tạp hơn của vật liệu trực hướng đàn hồi, có tính đến khả năng chịu kéo và nén khác nhau cũng như mối quan hệ phi tuyến của ứng suất và biến dạng, được đề xuất trong công trình N.M. Matchenko và A.A. Treshcheva, A.A. Treshcheva, E.V. Lomakin và B.N. Fedulova R.M. Jones và D.A.R. Nelson.

Tuy nhiên, hạn chế của các nghiên cứu này đó là việc tuyến tính hóa từng phần trong quá trình biến dạng. Việc xây dựng một mô hình hoàn chỉnh đối với tất cả các vật liệu dị hướng vẫn chưa có được kết quả khả quan. Do đó, việc nghiên cứu riêng lẻ cho từng dạng vật liệu dị hướng là cần thiết.

Trong nghiên cứu ngày, vật liệu trực hướng hình trụ là vật liệu có tính dị hướng cong, theo đó tại mỗi điểm nó lấy các trục của hệ tọa độ trụ là các trục chính của tính dị hướng. Trong các trục chính của tính dị hướng, vật liệu trực hướng có cấu trúc được xác định bởi ma trận:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_{rrrr} & N_{rr\varphi\varphi} & N_{rrzz} & 0 & 0 & 0 \\ N_{\varphi\varphi rr} & N_{\varphi\varphi\varphi\varphi} & N_{\varphi\varphi zz} & 0 & 0 & 0 \\ N_{zzrr} & N_{zz\varphi\varphi} & N_{zzzz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{r\varphi r\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{\varphi z\varphi z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{zrzr} \end{pmatrix}.$$

Hơn nữa, do tính đối xứng của tensor $\mathbf{N}$ nên có các hệ thức sau:

$N_{rr\varphi\varphi} = N_{\varphi\varphi rr}$,

$N_{rrzz} = N_{zzrr}$, $N_{\varphi\varphi zz} = N_{zz\varphi\varphi}$.

Theo Lekhnitsky S. G. [1], nếu trục chính của tính dị hướng đi vào bên trong vật thể thì hướng xuyên tâm và hướng tiếp tuyến không thể phân biệt được trên trục này. Do đó, chúng ta thiết lập được liên hệ giữa các hằng số đàn hồi khác không của vật liệu trực hướng hình trụ:

$N_{rrrr} = N_{\varphi\varphi\varphi\varphi}$,

$N_{rrzz} = N_{\varphi\varphi zz}$, $N_{rzrz} = N_{\varphi z\varphi z}$.

Do đó, trong tensor đàn hồi của vật liệu trực hướng hình trụ không có mười hai thành phần độc lập mà chỉ có sáu thành phần. Tensor đàn hồi tuyến tính của vật liệu trực hướng hình trụ trong các trục chính dị hướng có dạng:

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} N_{rrrr} & N_{rr\varphi\varphi} & N_{rrzz} & 0 & 0 & 0 \\ N_{rr\varphi\varphi} & N_{rrrr} & N_{rrzz} & 0 & 0 & 0 \\ N_{rrzz} & N_{\varphi\varphi zz} & N_{zzzz} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{r\varphi r\varphi} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{zrzr} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N_{zrzr} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

3. Biểu diễn các quá trình biến dạng của vật liệu dị hướng trong không gian sáu chiều

Việc xem xét cơ sở tensor sáu chiều để biểu diễn các tensor ứng suất và biến dạng đã được thực hiện bởi nhiều tác giả khác nhau. Đặc biệt, trong bài báo [6] cơ sở tensor chính tắc được hình thành bởi các tensor:

$$\mathbf{I}^{0}=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3\right);\ \mathbf{I}^{1}=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\mathbf{a}_3\mathbf{a}_3-\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1-\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\right);$$

$$\mathbf{I}^{2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2\mathbf{a}_2\right);\mathbf{I}^{3}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2+\mathbf{a}_2\mathbf{a}_1\right); \qquad (3)$$

$$\mathbf{I}^{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3+\mathbf{a}_3\mathbf{a}_2\right);\ \mathbf{I}^{5}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_1\mathbf{a}_3\right).$$

Các tensor (3) được chuẩn hóa bởi hệ thức $\mathbf{I}^{\alpha}..\mathbf{I}^{\beta}=\delta^{\alpha\beta},\ \alpha,\beta=\overline{0,5}.$ Các vectơ cơ sở $\mathbf{a_i}$ được giả sử là có hướng dọc theo hướng chính của vật liệu. Giả sử tại thời điểm ban đầu các vectơ $\mathbf{a}_1,\mathbf{a}_2,\mathbf{a}_3$ trùng với các vectơ cơ sở $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3$.

Bất kỳ tensor đối xứng nào bậc hai trong không gian E^3 đều có thể biểu diễn theo các tensor cơ sở (3), ví dụ, tensor biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}$ và tensor ứng suất $\mathbf{T}$ có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$\boldsymbol{\varepsilon}=e_{\alpha}\mathbf{I}^{\alpha};\mathbf{T}=t_{\alpha}.\mathbf{I}^{\alpha},\quad \alpha=\overline{0,5}, \qquad (4)$$

trong đó các hệ số giãn nở được xác định bởi:

$$e_0=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}+\varepsilon_{33}\right);e_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(2\varepsilon_{33}-\varepsilon_{11}+\varepsilon_{22}\right);$$

$$e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}\right);\ e_3=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varepsilon_{12}+\varepsilon_{21}\right); \qquad (5)$$

$$e_4=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varepsilon_{23}+\varepsilon_{32}\right);\ e_5=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\varepsilon_{31}+\varepsilon_{13}\right).$$

Hệ thức nghịch đảo có dạng:

$$\varepsilon_{11}=\frac{1}{\sqrt{3}}e_0-\frac{1}{\sqrt{6}}e_1+\frac{1}{\sqrt{2}}e_2;\ \varepsilon_{22}=\frac{1}{\sqrt{3}}e_0-\frac{1}{\sqrt{6}}e_1-\frac{1}{\sqrt{2}}e_2;$$

$$\varepsilon_{33}=\frac{1}{\sqrt{3}}e_0-\sqrt{\frac{2}{3}}e_1;$$

$$\varepsilon_{12}=\frac{1}{\sqrt{2}}e_3;\quad \varepsilon_{23}=\frac{1}{\sqrt{2}}e_4;\ \varepsilon_{31}=\frac{1}{\sqrt{2}}e_5. \qquad (6)$$

Đối với tensor $\mathbf{T}$ cũng nhận được các hệ thức tương tự.

Các hệ thức (5), (6) chỉ có thể xảy ra nếu giả sử rằng trong quá trình biến dạng vị trí của các trục chính dị hướng không thay đổi, nghĩa là các vectơ $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ trùng với các vectơ cơ sở $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ không chỉ ở thời điểm ban đầu mà trong suốt quá trình biến dạng.

Trong lý thuyết của Ilyushin A.A [2], quá trình biến dạng được xem xét trong không gian sáu chiều và được đặc trưng bởi ảnh của nó. Trong không gian này, các vectơ biến dạng sáu chiều $\mathbf{e} = e_\alpha \mathbf{i}_\alpha$ và ứng suất $\mathbf{t} = t_\alpha \mathbf{i}_\alpha$ được xem xét. Lưu ý tọa độ của các vectơ sáu chiều $\mathbf{e}, \mathbf{t}$ trùng với hệ số giãn nở của các tensor tương ứng (4).

Trong [1, 6], các tensor bậc 4 đã được xây dựng, dùng làm cơ sở để biểu diễn các tensor đặc trưng cho tính chất đàn hồi của vật liệu. Các tensor cơ sở bậc 4 được biểu diễn dưới dạng:

$$\mathbf{I}^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\mathbf{I}^\alpha \mathbf{I}^\beta + \mathbf{I}^\beta \mathbf{I}^\alpha) \qquad (7)$$

Các tensor trong (7) đối xứng theo từng cặp chỉ số, các thành phần của chúng được nêu trong bài báo [6]. Tensor $\mathbf{N}$ bán đối xứng hạng bốn có biểu diễn trên cơ sở $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ dưới dạng:

$\mathbf{N} = N_{ijkl} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \mathbf{a}_l$, trong đó: $N_{ijkl} = N_{jikl} = N_{ijlk} = N_{klij}$. Tensor $\mathbf{N}$ có thể được biểu diễn theo các tensor cơ sở (7):

$$\mathbf{N} = \sum_{\alpha,\beta=0}^{5} n_{\alpha\beta} \mathbf{I}^{\alpha\beta}, \quad n_{\alpha\beta} = n_{\beta\alpha}. \qquad (9)$$

Mối liên hệ giữa các thành phần $n_{\alpha\beta}$ và N_{ijkl} được thiết lập trong bài báo [2] và có dạng:

$$n_{\alpha\beta} = \beta_\alpha^{ij} N_{ijkl} \beta_{kl}^\beta, N_{ijkl} = \beta_{ij}^\alpha n_{\alpha\beta} \beta_\beta^{kl}. \qquad (10)$$

trong đó các ma trận β_α^{ij} và β_{kl}^β được xác định bởi cùng một bảng:

$$(\boldsymbol{\beta})=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Ma trận (β) cũng có thể được dùng để viết các hệ thức (5), (6):

$$\varepsilon_{ij}=\beta_{ij}^{\alpha}e_{\alpha},\quad e_{\alpha}=\beta_{\alpha}^{ij}\varepsilon_{ij}. \qquad (12)$$

Chúng ta hãy biểu diễn tensor đàn hồi của vật liệu trực hướng hình trụ (2) trong không gian sáu chiều. Sử dụng các hệ thức (10), (11), ta thu được các thành phần khác 0 của tensor $\mathbf{n}$:

$$n_{00}=\frac{1}{3}(2N_{rrrr}+2N_{rr\varphi\varphi}+4N_{rrzz}+N_{zzzz});$$

$$n_{11}=\frac{1}{3}(N_{rrrr}+N_{rr\varphi\varphi}-4N_{rrzz}+2N_{zzzz}); \qquad (13)$$

$$n_{10}=n_{01}=-\frac{\sqrt{2}}{3}(N_{rrrr}+N_{rr\varphi\varphi}-N_{rrzz}-N_{zzzz});$$

$$n_{22}=N_{rrrr}-N_{rr\varphi\varphi};\ n_{33}=N_{r\varphi r\varphi};\ n_{44}=n_{55}=N_{zrzr}.$$

Nếu chúng ta coi tensor $\mathbf{n}$ là ảnh của tensor đàn hồi vật liệu trong không gian sáu chiều, thì hệ thức tensor tuyến tính giữa ứng suất và biến dạng (1) có thể được viết trong không gian của tensor biến dạng $\boldsymbol{\varepsilon}_{\alpha}$:

$$\mathbf{t}=\mathbf{n.e}. \qquad (14)$$

4. Hệ thức phi tuyến đối với vật liệu trực hướng hình trụ

Khi xây dựng các hệ thức xác định phi tuyến đối với vật liệu trực hướng hình trụ, chúng tôi sẽ sử dụng giả thuyết chính là định đề về tính đẳng hướng được xây dựng bởi Ilyushin A.A [2], và được khái quát hóa trong [6,7,8] cho trường hợp vật liệu dị hướng.

Chúng ta hãy xem xét khái niệm về trạng thái đàn hồi riêng của vật liệu. Theo định nghĩa của Rykhlevsky Ya. [11], tensor riêng của toán tử $\mathbf{N}$ (trạng thái riêng) là tensor biến dạng ε_α, trong đó:

$$\mathbf{N}\cdot\cdot\boldsymbol{\omega}_\alpha = \lambda_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha, \quad \boldsymbol{\omega}_\alpha = (\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha\cdot\cdot\boldsymbol{\varepsilon}_\alpha)^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha.$$

Trong không gian sáu chiều, định nghĩa này có dạng:

$$\mathbf{n}.\boldsymbol{\omega}_\alpha = \lambda_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha. \qquad (15)$$

Trong trường hợp tổng quát, việc khai triển tensor $\mathbf{n}$ đối với cơ sở của nó được biểu diễn dưới dạng:

$$\mathbf{n} = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_\alpha \boldsymbol{\Omega}_\alpha. \qquad (16)$$

Trong đó n là số nghiệm khác nhau của phương trình đặc trưng, các tensor cơ sở $\boldsymbol{\Omega}_\alpha$ tương ứng với nghiệm đơn λ_α là $\boldsymbol{\Omega}_\alpha = \boldsymbol{\omega}_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha$, và tương ứng với nghiệm của bội số k là:

$$\boldsymbol{\Omega}_\alpha = \boldsymbol{\omega}_\alpha \boldsymbol{\omega}_\alpha + \boldsymbol{\omega}_{\alpha+1} \boldsymbol{\omega}_{\alpha+1} + \ldots + \boldsymbol{\omega}_{\alpha+k-1} \boldsymbol{\omega}_{\alpha+k-1}.$$

Đối với các loại vật liệu đẳng hướng và dị hướng, các trị riêng và vectơ riêng được xác định trong bài báo [6]. Kết quả thu được phù hợp với kết quả của các tác giả khác [9,10].

Trong các công trình [3], [6], hai dạng khái quát hóa một định đề cho vật liệu dị hướng ban đầu được xây dựng. Theo dạng giới hạn của định đề, hệ thức giữa ứng suất và biến dạng có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$\mathbf{t}_{(\alpha)} = \sum_{i=1}^{m} A^i_{(\alpha)} \mathbf{r}_i^{(\alpha)}, \qquad (17)$$

trong đó: $A^i_{(\alpha)}\left[s_{(\alpha)}(t), k^1_{(\alpha)}, k^2_{(\alpha)}, \ldots, k^{m-1}_{(\alpha)}\right]$ là các hàm của quá trình biến dạng $e_{(\alpha)}(t)$; m và $\mathbf{r}_i^{(\alpha)}$ là số chiều và cơ sở của không gian con riêng.

Theo các hạn chế của định đề đẳng hướng ở dạng (17), mối quan hệ giữa ứng suất và biến dạng chỉ nên chứa các bất biến tuyến tính và bậc hai đặc trưng cho các loại vật liệu khác nhau [3, 6]. Để xác định hệ thức (17) đối với vật liệu trực hướng hình trụ, chúng tôi xác định trạng thái đàn hồi của nó. Như đã nêu ở trên, tensor đàn hồi của vật liệu trực hướng hình trụ trong không gian ba chiều có dạng (2). Theo quan hệ (13), trong không gian sáu chiều với vectơ cơ sở $\mathbf{i}_\alpha$, ma trận các thành phần của tensor này có dạng:

$$(n)=\begin{pmatrix} n_{00} & n_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{01} & n_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{33} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{44} \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Viết phương trình đặc trưng của tensor $\mathbf{n}$:

$$\begin{vmatrix} n_{00}-\lambda & n_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ n_{01} & n_{11}-\lambda & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_{22}-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n_{33}-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & n_{44}-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & n_{44}-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

Các giá trị riêng của tensor $\mathbf{n}$ trong trường hợp này bằng:

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}(n_{00}+n_{11}\pm\sqrt{(n_{00}-n_{11})^2+4n_{01}^2}),\ \lambda_3=n_{22},\ \lambda_4=n_{33},\ \lambda_5=n_{44}. \tag{19}$$

và các vectơ riêng được xác định bởi:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\omega}_1=\mathbf{i}_0\cos\varphi+\mathbf{i}_1\sin\varphi,\ \boldsymbol{\omega}_2 \\ &=-\mathbf{i}_0\sin\varphi+\mathbf{i}_1\cos\varphi,\ \boldsymbol{\omega}_3=\mathbf{i}_2, \\ &\boldsymbol{\omega}_4=\mathbf{i}_3,\ \boldsymbol{\omega}_5=\mathbf{i}_4,\ \boldsymbol{\omega}_6=\mathbf{i}_5. \end{aligned} \tag{20}$$

trong đó góc φ được biểu thị qua các thành phần $n_{\alpha\beta}$:

$$\tan\varphi=\frac{2n_{01}}{n_{00}-n_{11}\pm\sqrt{(n_{00}-n_{11})^2+4n_{01}^2}}. \tag{21}$$

Kết hợp với (13), các biểu thức tính giá trị riêng của tensor đàn hồi của vật liệu trực hướng hình trụ có dạng:

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2}(N_{rrrr} + N_{zzzz} + N_{rr\varphi\varphi} \pm \sqrt{(N_{rrrr} - N_{zzzz} + N_{rr\varphi\varphi})^2 + 8N_{rrzz}^2}),$$
$$\lambda_3 = N_{rrrr} - N_{rr\varphi\varphi}, \quad \lambda_4 = N_{r\varphi r\varphi}, \lambda_5 = \lambda_6 = N_{rzrz}. \tag{22}$$

Theo đó, hệ thức (21) được chuyển về dạng:

$$\tan\varphi = \frac{-2\sqrt{2}(N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} - N_{rrzz} - N_{zzzz})}{(N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} + 8N_{rrzz} - N_{zzzz}) + \sqrt{D}} \tag{23}$$

trong đó

$$D = (N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} + 8N_{rrzz} - N_{zzzz})$$
$$+8(N_{rrrr} + N_{rr\varphi\varphi} - N_{rrzz} - N_{zzzz})$$

Theo các kết quả thu được, Định luật Húc trong không gian sáu chiều có thể được viết là:

$$\mathbf{t} = \lambda_1(\mathbf{e}.\boldsymbol{\omega}_1)\boldsymbol{\omega}_1 + \lambda_2(\mathbf{e}.\boldsymbol{\omega}_2)\boldsymbol{\omega}_2$$
$$+\lambda_3 e_2\mathbf{i}_2 + \lambda_4 e_3\mathbf{i}_3 + \lambda_3\mathbf{e}.(\mathbf{i}_4\mathbf{i}_4 + \mathbf{i}_5\mathbf{i}_5).$$

Do đó, vật liệu trực hướng hình trụ, có năm không gian con riêng: bốn không gian con một chiều với các cơ sở $\begin{matrix}\boldsymbol{\Omega}_1 = \boldsymbol{\omega}_1\boldsymbol{\omega}_1, \boldsymbol{\Omega}_2 = \boldsymbol{\omega}_2\boldsymbol{\omega}_2, \\ \boldsymbol{\Omega}_3 = \mathbf{i}_2\mathbf{i}_2, \boldsymbol{\Omega}_4 = \mathbf{i}_3\mathbf{i}_3\end{matrix}$ và một không gian con riêng hai chiều với cơ sở $\boldsymbol{\Omega}_5 = \mathbf{i}_4\mathbf{i}_4 + \mathbf{i}_5\mathbf{i}_5$. Theo đó, ta có thể xác định hai bất biến tuyến tính và ba biến dạng bậc hai.

Các bất biến tuyến tính của các tensor biến dạng và ứng suất được định nghĩa trong [3,6] đối với vật liệu đẳng hướng hình trụ:

$e_0 = \mathbf{e}.\mathbf{i}_0,\ e_1 = \mathbf{e}.\mathbf{i}_1$. (24)

Và các bất biến bậc hai đối với vật này được xác định bởi công thức:

$$s_{(3)}^2 = e_2^2,\ s_{(4)}^2 = e_3^2,\ s_{(5)}^2 = e_4^2 + e_5^2. \tag{25}$$

Trong các tác phẩm [3, 4], một phiên bản của hệ thức xác định phi tuyến đã được đề xuất đối với vật liệu dị hướng và thỏa mãn dạng tổng quát hóa của định đề A. A. Ilyushin. Đối với vật liệu trực hướng hình trụ, theo các bất biến tuyến tính (24) và bậc hai (25) đã tìm được, hệ thức xác định phi tuyến có thể được viết như sau:

$$t=\sum_{\alpha,\beta=0}^{1}\left(n^{\alpha\beta}+\frac{\partial n^{\alpha\beta}}{\partial e_\alpha}e_\alpha\right)e_\beta\mathbf{i}_\alpha+\sum_{\gamma=3}^{5}2\left(G^\gamma+\frac{\partial G^\gamma}{\partial s_{(\gamma)}^2}s_{(\gamma)}^2\right)\mathbf{e}_{(\gamma)}. \qquad (26)$$

5. Kết luận

Nếu coi $n^{\alpha\beta}$ và G^γ trong hệ thức (26) là các hằng số thì hệ thức này là hệ thức xác định tuyến tính và nó trùng khớp với định luật Húc. Ở đây chúng ta sẽ coi $n^{\alpha\beta}$ chỉ phụ thuộc vào các bất biến tuyến tính của tensor biến dạng và các hàm G^γ chỉ phụ thuộc vào các bất biến bậc hai trong các không gian con tương ứng. Khi tính đến giả định này, hệ thức (26) thỏa mãn dạng khái quát hóa của định đề Ilyushin A.A và nó sẽ trở thành hệ thức phi tuyến tính.

Với giả định $n^{\alpha\beta}$ là đa thức bậc nhất đối với e_α, e_β và G^γ là đa thức bậc nhất đối với $s_{(\gamma)}$ thì hệ thức (26) trở thành hệ thức phi tuyến bậc hai.

Nếu giả định $n^{\alpha\beta}$ là đa thức bậc hai đối với e_α, e_β và G^γ là đa thức bậc hai đối với $s_{(\gamma)}$ thì hệ thức (26) trở thành hệ thức phi tuyến bậc ba.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Chernykh K.F. (1988), *Giới thiệu về độ đàn hồi dị hướng*. M. Nauka.

2. Ilyushin A. A. (1963) *Độ dẻo-cơ sở lý thuyết toán học tổng quát*. Nhà xuất bản Viện Hàn lâm Khoa học Liên Xô.

3. Khristich D.V. (2013) Xác định vật liệu dị hướng và mô hình hóa các quá trình biến dạng hữu hạn của vật thể giảm đàn hồi, Tin tức của Đại học bang Tula. Khoa học tự nhiên. *Tập 3. Phần 2. Trang 210-220.*

4. Khristich D.V. (2014), Các biến thể của mối liên hệ phi tuyến giữa ứng suất và biến dạng trong vật liệu dị hướng, Tin tức của Đại học bang Tula. Khoa học tự nhiên. *Tập 1. Phần 1. Trang 216-224.*

5. Lekhnitsky S.G.(1977), *Lý thuyết về tính đàn hồi của vật dị hướng*. M.Nauka.

6. Markin A. A., Sokolova M. Yu. (2013), *Cơ nhiệt của biến dạng đàn hồi*. M. FIZMATLIT.

7. Markin A. A., Sokolova M. Yu. (2007), Quan hệ phi tuyến của độ đàn hồi dị hướng và một định đề cụ thể về đẳng hướng, *Toán ứng dụng và Cơ học*. T. 71. Số phát hành 4. Trang 587-594.

8. Markin A. A., Sokolova M. Yu., Khristich D. V.,. Ilyushin A.A. (2011), Định đề về vật liệu dị hướng và một biến thể của quan hệ cấu thành, *Izvestia RAS, Cơ học của chất rắn*, Số 1. Trang 38-45.

9. Ostrosablin N.I. (1986), Về cấu trúc tensor của mô đun đàn hồi và phân loại vật liệu dị hướng, *Cơ học ứng dụng và vật lý kỹ thuật.* Số 4. Trang 127-135.

10. Rykhlevsky Ya. (1984), Về định luật Hooke, *Toán ứng dụng và cơ học,* Số 3. Trang 420-435.