

TÍNH ĐẶT ĐÚNG CỦA BÀI TOÁN BIÊN CHO PHƯƠNG TRÌNH KHUẾCH TÁN KHÔNG CỔ ĐIỂN VỚI HỆ SỐ PHỤ THUỘC THỜI GIAN

Đỗ Thị Hoài,
Khoa Toán - KHTN
Nguyễn Thị Thanh Thanh,
Trường THCS Xuân Đỉnh
Lâm Thị Thoa
Trường đại học Hải Dương
Email: hoaidt@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 24/8/2022
Ngày PB đánh giá: 08/9/2022
Ngày duyệt đăng: 15/9/2022

TÓM TẮT: Trong bài báo này, chúng tôi trình bày kết quả về tính đặt đúng của bài toán biên Dirichlet cho phương trình khuếch tán không cổ điển với hệ số phụ thuộc thời gian. Cụ thể, sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin, chúng tôi chứng minh sự tồn tại của nghiệm yếu bài toán. Tính duy nhất của nghiệm yếu cũng như sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu cũng được chỉ ra. Các kết quả trong bài báo là cải tiến của một số kết quả trong Yong-feng Liu (*Applicable Analysis*, 2014).

Từ khóa: Phương trình khuếch tán không cổ điển; hệ số phụ thuộc thời gian; phương pháp xấp xỉ Galerkin; nghiệm yếu.

WELL-POSEDNESS OF BOUNDARY-VALUE PROBLEMS FOR THE NON-CLASSICAL DIFFUSION EQUATIONS WITH TIME-DEPENDENT COEFFICIENT

ABSTRACT: In this paper, we study the well-posedness of boundary-value problems for the non-classical diffusion equation with a time-dependent coefficient. More precisely, using the Galerkin approximation method, we prove the existence of weak solutions. The uniqueness and continuous dependence on the initial data of the solutions are also pointed out. The results in this paper will extend and improve some results in Yong-feng Liu (*Applicable Analysis*, 2015).

Keywords: Nonclassical diffusion equations; time-dependent coefficient; Galerkin approximation method; weak solution.

1. MỞ ĐẦU

Trong bài báo này, chúng tôi xét bài toán biên ban đầu đối với phương trình khuếch tán không cổ điển với hệ số phụ thuộc thời gian có dạng

$$\begin{cases} u_t - \varepsilon(t)\Delta u_t - \Delta u + f(u) = g, & x \in \Omega, t > \tau, \\ u|_{\partial\Omega} = 0, & t > \tau, \\ u(x, \tau) = u_\tau(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1)$$

trong đó Ω là miền bị chặn trong $\mathbb{R}^3$ với biên $\partial\Omega$ trơn, $\tau \in \mathbb{R}$.

Phương trình khuếch tán không cổ điển được xây dựng bởi E.C. Aifantis (1980) [1], nhằm mô tả các hiện tượng vật lý như dòng chảy không Newton, các hiện tượng trong cơ học chất rắn (xem [1]).

Từ khi ra đời cho đến nay, lớp phương trình này đã và đang được quan tâm nghiên cứu mở rộng trên nhiều khía cạnh khác nhau. Phương trình khuếch tán không cổ điển dạng (1) trong trường hợp ô-tô-nô (tức là, $\varepsilon(t) = \nu$ là hằng số, ngoại lực g không phụ thuộc vào biến thời gian) được nghiên cứu bởi C. Sun và M. Yang [8], Y. Xiao [12], ... Các kết quả đạt được là sự tồn tại, duy nhất nghiệm; sự tồn tại của tập hút toàn cục, tập hút mũ dưới những điều kiện khác nhau cho hàm phi tuyến và miền xét bài toán (bị chặn hoặc không bị chặn). Trong trường hợp không ô-tô-nô, $\varepsilon(t) = \nu$ là hằng số, ngoại lực g phụ thuộc vào biến thời gian, tính đặt đúng cũng như đáng điều kiện nghiệm của bài toán cũng đã được nghiên cứu (xem [2, 3, 9, 10]).

Phương trình khuếch tán không cổ điển với hệ số phụ thuộc thời gian có dạng như (1) cũng đã được đưa ra nghiên cứu bởi F. Rivero (2013) [7], Y-F. Liu và D. Tao (2015) [6], và gần đây là kết quả của J. Wang và Q. Ma (2021) [11]. Cụ thể, trong [7] F. Rivero quan tâm đến cấu trúc của tập hút lùi cho mô hình. Trong [6], Y-F. Liu và D. Tao nghiên cứu đáng điều kiện nghiệm của bài toán (1) trong trường hợp ngoại lực $g \in L^2(\Omega)$, hàm phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng kiểu Sobolev dạng $|f''(u)| \leq C(1 + |u|)$, $C \geq 0$. Có thể thấy rằng, số mũ tăng trưởng tối đa của $f(u)$ chỉ bằng 3, chưa phải số mũ tới hạn của tăng trưởng kiểu Sobolev. Ngoài những kết quả trên, gần đây J. Wang [11] cũng đưa ra kết quả về sự tồn tại nghiệm và tồn tại tập hút phụ thuộc thời gian cho bài toán (1) trong trường hợp hàm phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng kiểu đa thức.

Nhìn chung, các kết quả nghiên cứu về phương trình khuếch tán không cổ điển là khá đa dạng. Trong bài báo này, chúng tôi đi cải tiến một số kết quả của Y-F. Liu và D. Tao [6]. Cụ thể, chúng tôi sẽ nghiên cứu bài toán (1) khi hàm phi tuyến thỏa mãn điều kiện tăng trưởng kiểu Sobolev với số mũ tới hạn (bằng 5) và ngoại lực g chỉ nằm trong không gian tô-pô yếu $H^{-1}(\Omega)$.

Để nghiên cứu tính đặt đúng của bài toán, chúng tôi đặt điều kiện cho hệ số phụ thuộc thời gian $\varepsilon(t)$, hàm phi tuyến $f(u)$ và ngoại lực g như sau:

(H1) Giả sử $\varepsilon(t) : \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$, $\varepsilon(t) \in C^1(\mathbb{R})$ là các hàm giảm, bị chặn và thỏa mãn

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \varepsilon(t) = 0. \quad (2)$$

Đặc biệt, tồn tại $L > 0$ sao cho $\sup_{t \in \mathbb{R}} \{|\varepsilon(t)| + |\varepsilon'(t)|\} \leq L$.

(H2) Hàm $f \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ thỏa mãn điều kiện tăng trưởng và tiêu hao kiểu Sobolev

$$f(u)u \geq -\mu u^2 - C, \quad (3)$$

$$f'_u(u) \geq -\ell, \quad (4)$$

$$|f(u)| \leq C(1 + |u|^\rho), \quad (5)$$

$$\liminf_{|u| \rightarrow \infty} \frac{F(u)}{u^2} \geq 0 \quad (6)$$

với $0 < \rho \leq 5$, $0 < 2\mu < \lambda_1, \lambda_1$ là giá trị riêng đầu tiên của toán tử $-\Delta$ trong miền Ω với điều kiện biên Dirichlet và $F(u) = \int_0^u f(s) ds$ là nguyên hàm của f .

(H3) Ngoại lực $g \in H^{-1}(\Omega)$.

2. SỰ TỒN TẠI CỦA NGHIỆM

Ta xét bài toán (1) trên không gian pha $\mathcal{H}_t$ - là không gian phụ thuộc thời gian, với chuẩn

$$\|u\|_{\mathcal{H}_t}^2 = \|u\|^2 + \varepsilon(t)\|u\|_1^2.$$

Định nghĩa 2.1. Hàm $u = u(x, t)$ xác định trong $\Omega \times [\tau, T]$ được gọi là nghiệm yếu của bài toán (1) trên $[\tau, T]$ nếu $u \in C([\tau, T], \mathcal{H}_t)$ và $u(\tau) = u_\tau \in \mathbb{B}_{\mathcal{H}_t}(R_0) \subset \mathcal{H}_\tau$.

Hơn nữa $(u_t, v) + \varepsilon(t)(\nabla u_t, \nabla v) + (\nabla u, \nabla v) + (f(u), v) = \langle g, v \rangle_{H^{-1}, H_0^1}$, với hầu khắp $t \in [\tau, T]$ và với mọi hàm thử $v \in H_0^1(\Omega)$.

Định lý 2.1. Giả sử các giả thiết (H1)–(H3) thỏa mãn. Với bất kì $\tau \in \mathbb{R}, T > \tau$ và $u_\tau \in \mathbb{B}_{\mathcal{H}_\tau}(R_0) \subset \mathcal{H}_\tau$ cho trước, bài toán (1) có nghiệm yếu $u \in C(\tau, T; \mathcal{H}_t)$.

Chứng minh. Bằng phương pháp xấp xỉ Faedo-Galerkin [4, 5, 25], ta chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (1). Giả sử $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ là dãy các vector riêng của toán tử

$A = -\Delta$ với điều kiện biên Dirichlet trong $H_0^1(\Omega)$. Khi đó, $\{\omega_k\}_{k=1}^\infty$ là cơ sở trực giao của $L^2(\Omega)$ và cũng là cơ sở trực giao trong $H_0^1(\Omega)$. Các giá trị riêng tương ứng được biểu diễn bởi $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_j \leq \dots, \lambda_j \rightarrow \infty$ với $A\omega_k = \lambda_k \omega_k, \forall k \in \mathbb{N}$. Ta chứng minh sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (1) qua các bước sau:

Bước 1: Xây dựng công thức nghiệm xấp xỉ. Cho số nguyên m , ta kí hiệu P_m là phép chiếu trên không gian con sinh bởi $\{\omega_1, \dots, \omega_m\}$ trong $H_0^1(\Omega)$. Với mọi m cố định, ta tìm hàm $u^m(t) = P_m u = \sum_{k=1}^m a_m^k(t) \omega_k$, trong đó a_m^k thỏa mãn

$$\begin{cases} (u_t^m, \omega_k) + (\varepsilon(t) A u_t^m, \omega_k) + (A u^m, \omega_k) + (f(u^m), \omega_k) = (g, \omega_k) \\ u_m^k(\tau) = (u_\tau, \omega_k) \end{cases} \quad (7)$$

Theo Định lý Peano, ta nhận được sự tồn tại nghiệm liên tục $u^m(t)$ của bài toán (7) trên đoạn $[\tau, T]$.

Bước 2: Đánh giá tiên nghiệm. Nhân phương trình đầu của bài toán (7) với a_m^k và lấy tổng từ 1 đến k , ta được

$$\frac{d}{dt} \left(\|u^m\|^2 + \varepsilon(t) \|u^m\|_1^2 \right) + (2 - \varepsilon'(t)) \|u^m\|_1^2 + 2(f(u^m), u^m) = 2(g, u^m). \quad (8)$$

Từ giả thiết (3), áp dụng bất đẳng thức Young và bất đẳng thức Hölder ta được:

$$\int_\Omega f(u^m) u^m dx \geq -\mu \|u^m\|^2 - C|\Omega|, \quad (9)$$

$$\text{Và } (g, u^m) \leq \|g\|_{L^1}^2 + \frac{1}{4} \|u^m\|_1^2. \quad (10)$$

Thay các đánh giá (9) và (10) vào (8), ta được

$$\frac{d}{dt} \left(\|u^m\|^2 + \varepsilon(t) \|u^m\|_1^2 \right) + \left(\frac{3}{2} - \varepsilon'(t) \right) \|u^m\|_1^2 - 2\mu \|u^m\|^2 \leq 2\|g\|_{L^1}^2 + 2C|\Omega|.$$

Áp dụng bất đẳng thức Poincaré, ta được

$$\frac{d}{dt} \left(\|u^m\|^2 + \varepsilon(t) \|u^m\|_1^2 \right) + \left(\frac{1}{4} - \varepsilon'(t) \right) \|u^m\|_1^2 + (\lambda_1 - 2\mu) \|u^m\|^2 + \frac{1}{4} \|u^m\|_1^2 \leq 2\|g\|_{L^1}^2 + 2C|\Omega|, \quad (11)$$

Từ giả thiết (H1), với $t \in \mathbb{R}$, ta có $\left(\frac{1}{4} - \varepsilon'(t) \right) \|u^m\|_1^2 \geq \frac{1}{4} \|u^m\|_1^2 \geq \frac{\varepsilon(t)}{4L} \|u^m\|_1^2$.

Chọn $\sigma = \min \left\{ \frac{1}{4L}, \lambda_1 - 2\mu \right\}$ với $L, (\lambda_1 - 2\mu) > 0$, khi đó ta được

$$\frac{d}{dt} \left(\|u^m\|^2 + \varepsilon(t) \|u^m\|_1^2 \right) + \sigma \left(\|u^m\|^2 + \varepsilon(t) \|u^m\|_1^2 \right) + \frac{1}{4} \|u^m\|_1^2 \leq 2 \|g\|_{-1}^2 + 2C|\Omega|. \quad (12)$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có

$$\|u^m\|^2 + \varepsilon(t) \|u^m\|_1^2 \leq e^{-\sigma(t-\tau)} \left(\|u^m(\tau)\|^2 + \varepsilon(\tau) \|u^m(\tau)\|_1^2 \right) + \frac{2}{\sigma} \left(\|g\|_{-1}^2 + C|\Omega| \right). \quad (13)$$

Mặt khác, lấy tích phân từ τ đến t cả hai vế của (12), ta thu được

$$\int_{\tau}^t \|u^m(s)\|_1^2 ds \leq \|u^m(\tau)\|^2 + \varepsilon(\tau) \|u^m(\tau)\|_1^2 + C(t-\tau) \left(\|g\|_{-1}^2 + 1 \right). \quad (14)$$

Từ (13) và (14), ta suy ra

$$\{u^m\}_m^\infty \text{ bị chặn trong } L^\infty(\tau, T; \mathcal{H}_t) \cap L^2(\tau, T; H_0^1(\Omega)). \quad (15)$$

Tiếp theo, ta đánh giá cho hàm phi tuyến. Từ (5) suy ra $|f(u^m)|^q \leq C^q (1 + |u^m|^{\rho q})$.

Lấy tích phân trên miền Ω , ta được $\|f(u^m)\|_{L^q}^q \leq C^q |\Omega| + C^q \|u^m\|_{L^{\rho q}}^{\rho q}$

Do phép nhúng $H_0^1(\Omega) \subset L^{\rho q}(\Omega)$, $2 < \rho q \leq 6$ là liên tục nên $\|f(u^m)\|_{L^q}^q \leq C + \|u^m\|_{L^{\rho q}}^{\rho q}$

Mặt khác, do u^m bị chặn trong $L^\infty(\tau, T; H_0^1(\Omega))$ nên

$$\{f(u^m)\}_{m=1}^\infty \text{ bị chặn trong } L^q(\tau, T; L^q(\Omega)). \quad (16)$$

Để chứng minh $\partial_t u^m$ bị chặn, ta nhân phương trình (7) với $\partial_t a_m^k$, sau đó lấy tổng từ 1 đến k ta được

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \|u^m\|_1^2 + \int_{\Omega} F(u^m) dx - \int_{\Omega} g u^m dx \right) + \|u_t^m\|^2 + \varepsilon(t) \|u_t^m\|_1^2 = 0. \quad (17)$$

$$\text{Đặt } E(t) := \frac{1}{2} \|u^m\|_1^2 + \int_{\Omega} F(u^m) dx - \int_{\Omega} g u^m dx.$$

Từ điều kiện (6) suy ra, với bất kì $\delta > 0$, tồn tại một số dương C_δ sao cho

$$\int_{\Omega} F(u^m) dx + \delta \|u^m\|^2 + C_\delta \geq 0 \quad \forall u^m \in H_0^1(\Omega).$$

Chú ý rằng $\|u^m\|_1^2 \geq \lambda_1 \|u^m\|^2$ và giả sử $\delta = \frac{\lambda_1}{4}$, ta được

$$\int_{\Omega} F(u^m) dx + \frac{1}{4} \|u^m\|_1^2 + C_\delta \geq 0 \quad \forall u^m \in H_0^1(\Omega).$$

Khi đó, ta thu được đánh giá cho $E(t)$ như sau

$$E(t) \geq \frac{1}{8} \|u^m\|_1^2 - 2 \|g\|_{-1}^2 - C_\delta, \quad (18)$$

$$\text{trong đó } \int_{\Omega} g u^m dx \leq \|g\|_{-1} \|u^m\|_1 \leq 2 \|g\|_{-1}^2 + \frac{1}{8} \|u^m\|_1^2.$$

Mặt khác, từ điều kiện (5) ta có $|f(u^m)| \leq C(1 + |u^m|^\rho)$, khi đó

$$\int_{\Omega} F(u^m) dx \leq C \int_{\Omega} (1 + |u^m|^{\rho+1}) dx \leq C |\Omega| + C \|u^m\|_1^{\rho+1} \quad (19)$$

Áp dụng các bất đẳng thức Hölder và Young, ta được

$$-\int_{\Omega} g u^m \leq \int_{\Omega} |g| |u^m| dx \leq C \|g\|_{\mathbb{H}} + \frac{1}{2} \|u^m\|_1^2. \quad (20)$$

Từ định nghĩa của $E(t)$ và các đánh giá (19), (20) ta được

$$E(t) \leq \|u^m\|_1^2 + C \|u^m\|_1^{\rho+1} + C \|g\|_{\mathbb{H}} + C |\Omega|. \quad (21)$$

Lấy tích phân từ τ đến T của (17), ta được

$$E(T) + \int_{\tau}^T (\|u_t^m\|^2 + \varepsilon(t) \|u_t^m\|_1^2) dt = E(\tau). \quad (22)$$

Từ (15), (18), (21) và (22) ta có

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8} \|u^m\|_1^2 - 2 \|g\|_{-1}^2 - C_\delta + \int_{\tau}^T (\|u_t^m\|^2 + \varepsilon(t) \|u_t^m\|_1^2) dt \\ & \leq C (\|u^m(\tau)\|_1^2 + \|u^m(\tau)\|_1^{\rho+1} + \|g\|_{-1}^2 + 1). \end{aligned} \quad (23)$$

Do (15) nên từ (23) ta suy ra

$$\int_{\tau}^T (\|u_t^m\|^2 + \varepsilon(t) \|u_t^m\|_1^2) dt \leq C (\|g\|_{-1}^2 + 1).$$

$$\text{Vậy } \{u_t^m\} \text{ là bị chặn trong không gian } L^2(\tau, T; \mathcal{H}_t). \quad (24)$$

Bước 3. Chuyển qua giới hạn. Từ (15), (16), và (24) ta suy ra rằng, tồn tại các hàm $u \in L^\infty(\tau, T; \mathcal{H}_t) \cap L^2(\tau, T; H_0^1(\Omega))$, $\chi \in L^q(\tau, T; L^q(\Omega))$, $u_t \in L^2(\tau, T; \mathcal{H}_t)$ với $T > t$ và một dãy con của $\{u^m\}_{m=1}^\infty$ (vẫn kí hiệu là $\{u^m\}_{m=1}^\infty$) sao cho khi $m \rightarrow \infty$, ta có

$$u^m \rightarrow u \quad \text{hội tụ * - yếu trong } L^\infty(\tau, T; \mathcal{H}_t),$$

$$u^m \rightarrow u \quad \text{hội tụ yếu trong } L^2(\tau, T; H_0^1(\Omega)), \quad (25)$$

$$f(u^m) \rightarrow \chi \quad \text{hội tụ yếu trong } L^q(\tau, T; L^q(\Omega)),$$

$$u_t^m \rightarrow u_t \quad \text{hội tụ yếu trong } L^2(\tau, T; \mathcal{H}_t).$$

Bên cạnh đó, kết hợp (15) với (24) và sử dụng Bổ đề Aubin-Lions, suy ra tồn tại một dãy con của $\{u^m\}_{m=1}^\infty$ (vẫn kí hiệu là $\{u^m\}_{m=1}^\infty$) sao cho $u^m \rightarrow u$ trong $L^2(\tau, T; L^2(\Omega))$.

$$\text{Khi đó, } u^m \rightarrow u \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega \times [\tau, T]. \quad (26)$$

Tiếp theo, ta chứng minh $\chi = f(u)$. Thật vậy, dựa vào (26) và tính liên tục của f ta có

$$f(u^m) \rightarrow f(u) \text{ hầu khắp nơi trong } \Omega \times [\tau, T].$$

Cuối cùng, ta chứng minh cho $u^m \rightarrow u$ hội tụ đều trong $C([\tau, T], \mathcal{H}_t)$. Xét phương trình

$$u_t^m - u_t^n - \varepsilon(t) \Delta(u_t^m - u_t^n) - \Delta(u^m - u^n) + f(u^m) - f(u^n) = 0. \quad (27)$$

Nhân phương trình (27) với $(u^m - u^n)$ và lấy tích phân trên Ω , ta thu được

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\|u^m - u^n\|^2 + \varepsilon(t) \|u^m - u^n\|_1^2 \right) + (2 - \varepsilon'(t)) \|u^m - u^n\|_1^2 \\ & = -2 \int_{\Omega} (f(u^m) - f(u^n))(u^m - u^n) dx. \end{aligned}$$

Từ giả thiết (4) và tính đơn điệu của $\varepsilon(t)$ có

$$\frac{d}{dt} \left(\|u^m - u^n\|^2 + \varepsilon(t) \|u^m - u^n\|_1^2 \right) \leq 2l \left(\|u^m - u^n\|^2 + \varepsilon(t) \|u^m - u^n\|_1^2 \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta được $\|u^m - u^n\|_{\mathcal{H}_t}^2 \leq e^{2l(t-\tau)} \|u^m(\tau) - u^n(\tau)\|_{\mathcal{H}_t}^2$.

Mà $\{u^m\}_{m=1}^\infty$ là dãy Cauchy trong $C([\tau, T], \mathcal{H}_t)$. Do đó, vì tính duy nhất của giới hạn, ta có

$$u^m \rightarrow u \text{ hội tụ đều trong } C([\tau, T], \mathcal{H}_t), \text{ với mọi } T > \tau.$$

$$\text{Như vậy, } u \in C([\tau, T], \mathcal{H}_t). \quad (28)$$

Đồng thời, khi $m \rightarrow \infty, u^m(\tau) \rightarrow u_\tau$ trong $\mathcal{H}_\tau$. Từ đó, dễ dàng chứng minh được $u(\tau) = u_\tau$.

Vậy từ đây, ta thu được sự tồn tại nghiệm yếu của bài toán (1).

3. TÍNH DUY NHẤT NGHIỆM YẾU VÀ SỰ PHỤ THUỘC LIÊN TỤC CỦA NGHIỆM VÀO ĐIỀU KIỆN BAN ĐẦU

Định lý 3.1. Giả sử các giả thiết như trong Định lý 2.1 thỏa mãn, khi đó nghiệm yếu của bài toán (1) là duy nhất. Hơn nữa, nghiệm yếu này phụ thuộc liên tục vào điều kiện ban đầu.

Chứng minh. Giả sử u^1, u^2 là hai nghiệm của (1) với điều kiện ban đầu tương ứng là u_τ^1, u_τ^2 . Đặt $\bar{u}(t) = u^1(t) - u^2(t)$ thì $\bar{u}(t)$ thỏa mãn phương trình sau $\bar{u}_t - \varepsilon(t)\Delta\bar{u} - \Delta\bar{u} + f(u^1) - f(u^2) = 0$, (29) với dữ kiện ban đầu $\bar{u}(x, \tau) = \bar{u}_\tau = u_\tau^1 - u_\tau^2$.

Nhân phương trình (29) với $\bar{u}$ và lấy tích phân trên Ω , ta thu được

$$\frac{d}{dt} \left(\|\bar{u}\|^2 + \varepsilon(t) \|\bar{u}\|_1^2 \right) + (2 - \varepsilon'(t)) \|\bar{u}\|_1^2 = -2 \int_{\Omega} (f(u^1) - f(u^2)) (u^1 - u^2) dx.$$

Từ giả thiết $f'_u(u) \geq -\ell$ và tính đơn điệu của $\varepsilon(t)$ có

$$\frac{d}{dt} \left(\|\bar{u}\|^2 + \varepsilon(t) \|\bar{u}\|_1^2 \right) \leq 2\ell \left(\|\bar{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \varepsilon(t) \|\bar{u}\|_1^2 \right).$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có

$$\|u^1 - u^2\|_{\mathcal{H}_\tau}^2 \leq e^{2\ell(t-\tau)} \|u_\tau^1 - u_\tau^2\|_{\mathcal{H}_\tau}^2. \quad (30)$$

Từ (30) ta thu được tính duy nhất nghiệm và sự phụ thuộc liên tục của nghiệm vào điều kiện ban đầu.

4. KẾT LUẬN

Bài báo này đã nghiên cứu, cải tiến, mở rộng các điều kiện áp đặt lên các thành phần của phương trình khuếch tán không cổ điển với hệ số phụ thuộc thời gian. Từ đó giúp ta nghiên cứu được một lớp phương trình khuếch tán không cổ điển rộng hơn. Bằng phương pháp xấp xỉ Galerkin và cải tiến các kỹ thuật đánh giá, chúng tôi đã chứng minh được bài toán tồn tại, duy nhất nghiệm yếu.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. E.C. Aifantis (1980), "On the problem of diffusion in solids", *Acta Mech*, 37, 265-296.
2. C.T. Anh and T.Q. Bao (2010), "Pullback attractors for a class of nonautonomous nonclassical diffusion equations", *Nonlinear Anal*, 73, 399-412.

3. C.T. Anh and T.Q. Bao (2012), ‘Dynamics of non-autonomous nonclassical diffusion equations on $\mathbb{R}^N$ ’, *Comm. Pure Appl. Anal.*, 11, 1231-1252.
4. C.T. Anh and N.D. Toan (2012), “Pullback attractors for nonclassical diffusion equations in non-cylindrical domains”, *Int. J. Math. Math. Sci.*, Article ID 875913, 30 p.
5. S. Cheng (2015), “Random attractor for the nonclassical diffusion equation with fading memory”, *J. Partial Differ. Equ.* 28, no. 3, 253-268.
6. Y-F. Liu, D. Tao (2015), “Time-dependent global attractor for the nonclassical diffusion equations”, *Appl. Anal.* 94, no. 7, 1439-1449.
7. F. Rivero (2013), “Time dependent perturbation in a non-autonomous non-classical parabolic equation”, *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 18, 209-221.
8. C. Sun and M. Yang (2009), “Dynamics of the nonclassical diffusion equations”, *Asymp. Anal.* 59, 51-81.
9. T.W. Ting (1963), “Certain non-steady flows of second-order fluids”, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 14, 1-26.41.
10. S. Wang, D. Li and C. Zhong (2006), “On the dynamic of a class of nonclassical parabolic equations”, *J. Math. Anal. Appl.* 317, 565-582.
11. J. Wang and Q. Ma (2021), “Asymptotic dynamic of the nonclassical diffusion equation with time-dependent coefficient”, *J. Appl. Anal. Comput.* 11, no. 1, 445-463.
12. Y. Xiao (2002), “Attractors for a nonclassical diffusion equation”, *Acta Math. Appl. Sin. Engl. Ser.* 18, 273-276.