CHỈ SỐ VÀ KHẢ NGHỊCH DRAZIN CỦA MA TRẬN KHỐI

Vũ Tiến Đức
Khoa Toán và Khoa khoa học tự nhiên
Email: ducvt@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 03/3/2022
Ngày PB đánh giá: 28/3/2022
Ngày duyệt đăng: 29/3/2022

TÓM TẮT:

Trong bài báo này đề cập đến một số kết quả về chỉ số và nghịch đảo Drazin của ma trận khối $A=\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}$. Mối quan hệ giữa chỉ số của A và chỉ số của BC cũng được làm rõ, đồng thời các ví dụ được đưa ra để minh họa cho các quan hệ đó.

Từ khóa: Chỉ số Drazin, khả nghịch Drazin, ma trận khối.

THE INDEX AND THE DRAZIN INVERSE OF A BLOCK MATRIX

ABSTACT:

In this paper , some results about the index and the Drazin inverse of a block matrix $A=\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}$. are given. Relationships between the index of A and the index of BC are determined, and examples are given to illustrate all such possible relationships.

Keyword: Drazin index, Drazin inverse, block matrices

1. GIỚI THIỆU

Cho A là ma trận vuông phức cấp n. Số nguyên không âm k nhỏ nhất thỏa mãn $\operatorname{Im} A^{k+1} = \operatorname{Im} A^k$, được gọi là *chỉ số* của ma trận A và ký hiệu là $\operatorname{ind} A$.

Cho ma trận vuông phức A cấp n với $\operatorname{ind} A = k$. Ma trận vuông phức X cấp n được gọi là *khả nghịch Drazin* của A nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau

$$AX = XA \tag{1}$$

$$XAX = X \tag{2}$$

$$A^{k+1}X = A^k \tag{3}$$

Ký hiệu khả nghịch Drazin của ma trận A là A^D. Khi $\operatorname{ind} A = 0$ hoặc $\operatorname{ind}(A) = 1$ thì A^D được gọi là *nghịch đảo nhóm* của A, và ký hiệu là $A^{\#}$.

Nếu A là ma trận lũy linh bậc k thì $\operatorname{ind} A = k$ và $A^D = O$; còn nếu A là ma trận khả nghịch thì $\operatorname{ind} A = 0$ và $A^D = A^{-1}$.

Vấn đề tìm kiếm các biểu diễn một cách chi tiết cho nghịch đảo Drazin của một ma trận khối tổng quát đã được Campbell và Meyer đặt ra ở [1]. Kể từ đó, các trường hợp đặc biệt của vấn đề này đã được nghiên cứu. Một số bài báo gần đây đề cập đến vấn đề biểu diễn nghịch đảo Drazin của các ma trận khối như vậy là [2], [3], [5], [6], tuy nhiên nhiều vấn đề chung vẫn còn bỏ ngỏ.

Trong bài báo này ta nghiên cứu khả nghịch Drazin ma trận khối:

$$A=\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}, \tag{4}$$

ở đây B là ma trận cỡ $p\times(n-p)$, còn C là ma trận cỡ $(n-p)\times p$.

2. CÁC KHỐI BIỂU DIỄN CỦA A^D

Định lí 2.1. *Xét ma trận A có dạng (4). Khi đó:*

$$A^D=\begin{bmatrix} O & (BC)^D B \\ C(BC)^D & O \end{bmatrix}.$$

Hơn nữa , nếu $\operatorname{ind}BC=q$ *thì* $\operatorname{ind}A\le 2q+1$

Chứng minh. Kí hiệu:

$$X=\begin{bmatrix} O & (BC)^D B \\ C(BC)^D & O \end{bmatrix}.$$

Ta có

$$AX=\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & (BC)^D B \\ C(BC)^D & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} BC(BC)^D & O \\ O & C(BC)^D B \end{bmatrix}.$$

$$XA=\begin{bmatrix} O & (BC)^D B \\ C(BC)^D & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (BC)^D BC & O \\ O & C(BC)^D B \end{bmatrix}.$$

Lại có $BC(BC)^D=(BC)^D BC$ nên $AX=XA$.

Mặt khác thì

$$XAX=\begin{bmatrix} O & (BC)^D B \\ C(BC)^D & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} O & (BC)^D B \\ C(BC)^D & O \end{bmatrix},$$

$$=\begin{bmatrix} O & (BC)^D B \\ C(BC)^D & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} BC(BC)^D & O \\ O & C(BC)^D B \end{bmatrix},$$

$$=\begin{bmatrix} O & (BC)^D BC(BC)^D B \\ C(BC)^D BC(BC)^D & O \end{bmatrix}.$$

Lại có $(BC)^D BC(BC)^D = (BC)^D$, suy ra

$$XAX = \begin{bmatrix} O & (BC)^D B \\ C(BC)^D & O \end{bmatrix} = X.$$

Vậy X là khả nghịch Drazin của ma trận A.

Đặt $\mathrm{ind}BC = q$, khi đó

$$A^2 = \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} BC & O \\ O & CB \end{bmatrix} \Rightarrow A^{2q+2} = \begin{bmatrix} (BC)^{q+1} & O \\ O & (CB)^{q+1} \end{bmatrix}.$$

Suy ra

$$A^{2q+2}X = \begin{bmatrix} (BC)^{q+1} & O \\ O & (CB)^{q+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} O & (BC)^D B \\ C(BC)^D & O \end{bmatrix},$$

$$= \begin{bmatrix} O & (BC)^{q+1}(BC)^D B \\ (CB)^{q+1} C(BC)^D & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & (BC)^q B \\ (CB)^{q+1} C(BC)^D & O \end{bmatrix}.$$

Vì $(CB)^{q+1} C = C(BC)(BC)...(BC) = C(BC)^{q+1}$ nên

$$A^{2q+2}X = \begin{bmatrix} O & (BC)^q B \\ C(BC)^{q+1}(BC)^D & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & (BC)^q B \\ C(BC)^q & O \end{bmatrix} = A^{2q+1}.$$

Ta có $\mathrm{Im}\, A^{2q+1} = \mathrm{Im}\, A^{2q+2} X \subset \mathrm{Im}\, A^{2q+2} \subset \mathrm{Im}\, A^{2q+1}$, do đó $\mathrm{Im}\, A^{2q+2} = \mathrm{Im}\, A^{2q+1}$.

Vậy $\mathrm{ind}A \le 2q+1$.□

Bổ đề 2.1. *Nếu T là ma trận vuông thì* $(T^2)^D = (T^D)^2$.

Chứng minh. Ta có:

$$(T^D)^2 T^2 = T^D (T^D T) T = (T^D T)(T^D T) = (TT^D)(TT^D) = T(T^D T)(T^D) = T^2 (T^D)^2$$

.

$$(T^D)^2 T^2 (T^D)^2 = (T^D T^D T)(T T^D T^D) = (T^D T T^D)(T^D T T^D) = T^D . T^D = (T^D)^2.$$

Vậy $(T^2)^D = (T^D)^2$.

Bổ đề 2.2. *Với P là ma trận cỡ $m \times n$ và Q là ma trận cỡ $n \times m$ thì*

$$(PQ)^D = P((QP)^2)^D Q.$$

Chứng minh. Đặt $X = P((QP)^2)^D Q$, ta có:

$$
\begin{aligned}
X(PQ)X &= P((QP)^2)^D Q(PQ)P((QP)^2)^D Q,\\
&= P((QP)^D)^2 Q(PQ)P((QP)^D)^2 Q,\\
&= P(QP)^D(QP)^D(QP)(QP)(QP)^D(QP)^D Q,\\
&= P(QP)^D(QP)(QP)^D(QP)^D(QP)(QP)^D Q.
\end{aligned}
$$

Vì $(QP)^D(QP)(QP)^D = (QP)^D$, suy ra $X(PQ)X = P(QP)^D(QP)^D Q = X$.

Mặt khác thì

$$
\begin{aligned}
(PQ)X &= (PQ)P((QP)^2)^D Q = P(QP)(QP)^D(QP)^D Q,\\
&= P(QP)^D(QP)(QP)^D Q = P(QP)^D Q.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X(PQ) &= P((QP)^2)^D Q(PQ) = P(QP)^D(QP)^D(QP)Q,\\
&= P(QP)^D(QP)(QP)^D Q = P(QP)^D Q.
\end{aligned}
$$

Suy ra $(PQ)X = X(PQ)$, do đó $(PQ)^D = P((QP)^2)^D Q$.

Bổ đề 2.3. *Với các ma trận B, C xác định ở (4), ta có:*

$$(BC)^D B = B(CB)^D \text{ và } (CB)^D C = C(BC)^D.$$

Chứng minh. Bởi Bổ đề 2.1 và Bổ 2.2, ta có:

$$
\begin{aligned}
(BC)^D B &= B((CB)^D)^2 CB = B(CB)^D(CB)^D CB,\\
&= B(CB)^D(CB)(CB)^D = B(CB)^D.
\end{aligned}
$$

Thay đổi vai trò của ma trận B, C cho nhau ta được: $(CB)^D C = C(BC)^D$. □

Hệ quả 2.1. *Với ma trận khối A xác định ở (4), ta có:*

$$A^D = \begin{bmatrix} O & B(CB)^D \\ (CB)^D C & O \end{bmatrix}.$$

Nhận xét. 1) Nếu A là ma trận khả nghịch thì B, C là ma trận khả nghịch. Khi đó công thức ở Hệ quả 2.1 thành:

$$A^D = \begin{bmatrix} O & C^{-1} \\ B^{-1} & O \end{bmatrix}.$$

2) Nếu BC là ma trận lũy linh thì $(BC)^D = O$, do đó $A^D = O$.

3) Nếu $C = B^*$ với $\operatorname{rank}(B) < p$, thế thì BB^* là ma trận suy biến và là ma trận Hermite suy ra $\operatorname{ind}BB^* = 1$. Khi đó thì A cũng là ma trận Hermite và $\operatorname{ind}A = 1$.

Trong trường hợp này thì $A^D = A^+$, với A^+ nghịch đảo Moore-Penrose của A:

$$A^D = \begin{bmatrix} O & (BB^*)^+ B \\ B^*(BB^*)^+ & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & B^{*+} \\ B^+ & O \end{bmatrix} = A^+ .$$

3. MỐI QUAN HỆ GIỮA CHỈ SỐ A VÀ CHỈ SỐ CỦA BC

Kết quả trong phần này mà chúng tôi nêu đối với chỉ số A theo BC và chỉ số BC có thể được nêu theo cách khác là CB và chỉ số .

Với ma trận A ở (4). Với $j = 0,1,2,...$

$$A^{2j} = \begin{bmatrix} (BC)^j & O \\ O & (CB)^j \end{bmatrix} \text{ và}$$

$$A^{2j+1} = \begin{bmatrix} O & (BC)^j B \\ C(BC)^j & O \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O & B(CB)^j \\ (CB)^j C & O \end{bmatrix} .CB$$

Như vậy thì

$$\mathrm{rank}A^{2j} = \mathrm{rank}(BC)^j + \mathrm{rank}(CB)^j \tag{5}$$

$$\begin{aligned} \mathrm{rank}A^{2j+1} &= \mathrm{rank}(BC)^j B + \mathrm{rank}C(BC)^j \\ &= \mathrm{rank}B(CB)^j + \mathrm{rank}(CB)^j C \end{aligned} \tag{6}$$

Đặt $\mathrm{ind}BC = q$, giả sử $q = 0$. Nếu $n = 2p$ thì B, C là các ma trận vuông cấp p khả nghịch, do đó $\mathrm{ind}A = 0$. Trong trường hợp này ta có $A^D = A^{-1}$.

Nếu $n \neq 2p$, khi đó $\mathrm{rank}BC = \mathrm{rank}B = \mathrm{rank}C = \mathrm{rank}CB$. Suy ra $\mathrm{rank}A = \mathrm{rank}A^2$, do đó $\mathrm{ind}A = 1$ và $A^D = A^{\#}$, với $A^{\#}$ là nghịch đảo nhóm của A.

Sau đây ta sẽ sử dụng bất đẳng thức về hạng ma trận (xem [4], trang 13) của Frobenius trong một số chứng minh ở phần này.

Bổ đề 2.4. (Bất đẳng thức Frobenius) *Với các ma trận U cỡ $m \times k$, V là $k \times n$ và W là $n \times p$ thì:*

$$\mathrm{rank}UV + \mathrm{rank}VW \leq \mathrm{rank}V + \mathrm{rank}UVW .$$

Định lí 2.2. *Cho ma trận A có dạng (4) và giả sử $\mathrm{ind}BC = q \geq 1$. Khi đó $\mathrm{ind}A = 2q-1, 2q$ hoặc $2q+1$.*

Chứng minh. Theo Định lí 2.1 ta có $\mathrm{ind}A \leq 2q+1$. Theo Bổ đề 2.4, ta có:

$$\mathrm{rank}(B(CB)^{q-1}) + \mathrm{rank}((CB)^{q-1}C) \leq \mathrm{rank}(CB)^{q-1} + \mathrm{rank}(BC)^q .$$

Vì $\mathrm{ind}BC = q$ nên $\mathrm{rank}(BC)^q < \mathrm{rank}(BC)^{q-1}$, suy ra

$$\mathrm{rank}(B(CB)^{q-1}) + \mathrm{rank}((CB)^{q-1}C) < \mathrm{rank}(CB)^{q-1} + \mathrm{rank}(BC)^{q-1} \tag{7}$$

Từ (5) , (6) và (7), suy ra $\operatorname{rank}A^{2q-2} < \operatorname{rank}A^{2q-1}$, do đó $\operatorname{ind}A = 2q-1, 2q$ hoặc $2q+1$. □

Ở các định lí dưới đây, ta sẽ đưa ra các điều kiện cần và đủ cho mỗi giá trị của chỉ số của ma trận A được xác định ở Định lí 2.1.

Định lí 2.3. *Cho ma trận A có dạng (4) và giả sử $\operatorname{ind}BC = q \geq 1$. Khi đó $\operatorname{ind}(A) = 2q-1$ nếu và chỉ nếu ít nhất một trong hai điều kiện sau được thỏa mãn:*

i) $\operatorname{rank}(BC)^q = \operatorname{rank}(BC)^{q-1}B$ và $\operatorname{rank}(CB)^q = \operatorname{rank}(CB)^{q-1}C$.

ii) $\operatorname{rank}(BC)^q = \operatorname{rank}(CB)^{q-1}C$ và $\operatorname{rank}(CB)^q = \operatorname{rank}(BC)^{q-1}B$.

Chứng minh. Từ (5) và (6) ta có, $\operatorname{rank}A^{2q} = \operatorname{rank}A^{2q-1}$ nếu và chỉ nếu

$$\operatorname{rank}(CB)^{q-1} + \operatorname{rank}(BC)^q = \operatorname{rank}B(CB)^{q-1} + \operatorname{rank}(CB)^{q-1}C \tag{8}$$

Ta chứng minh (8) thỏa mãn nếu và chỉ nếu một trong hai điều kiện i) hoặc ii) được thỏa mãn.

Rõ ràng nếu i) hoặc ii) thỏa mãn thì (8) được thỏa mãn.

Ngược lại, nếu (8) thỏa mãn thì i) và ii) thỏa mãn. Thật vậy, ta có:

$$\begin{cases}\operatorname{rank}(BC)^q \leq \operatorname{rank}(BC)^{q-1}B \\ \operatorname{rank}(CB)^q \leq \operatorname{rank}(CB)^{q-1}C\end{cases} \text{ và } \begin{cases}\operatorname{rank}(BC)^q \leq \operatorname{rank}(CB)^{q-1}C \\ \operatorname{rank}(CB)^q \leq \operatorname{rank}(BC)^{q-1}B\end{cases}$$

Rõ ràng nếu i) hoặc ii) không thỏa mãn thì (8) không xảy ra. Do đó ta có điều phải chứng minh.

Bổ đề 2.5. *Nếu $\operatorname{ind}BC = q$ thì*

$$\operatorname{rank}(BC)^{q+1} = \operatorname{rank}(BC)^q = \operatorname{rank}(BC)^q B = \operatorname{rank}C(BC)^q = \operatorname{rank}(CB)^{q+1}.$$

Chứng minh. Đặt $\operatorname{rank}(BC)^q = s$. Ta có:

$$\begin{cases}s = \operatorname{rank}(BC)^q = \operatorname{rank}(BC)^{q+1} \leq \operatorname{rank}(BC)^q B \leq \operatorname{rank}(BC)^q = s \\ s = \operatorname{rank}(BC)^q = \operatorname{rank}(BC)^{q+1} \leq \operatorname{rank}C(BC)^q \leq \operatorname{rank}(BC)^q = s\end{cases}$$

Do đó

$$\operatorname{rank}(BC)^{q+1} = \operatorname{rank}(BC)^q = \operatorname{rank}(BC)^q B = \operatorname{rank}C(BC)^q = s.$$

Mặt khác theo Bổ đề 2.4, ta có:

$$2s = \operatorname{rank}C(BC)^q + \operatorname{rank}(BC)^q B \leq \operatorname{rank}(BC)^{q+1} + \operatorname{rank}(CB)^{q+1}.$$

Theo (5), ta có:

$$\operatorname{rank}(BC)^{q+1} + \operatorname{rank}(CB)^{q+1} = \operatorname{rank}A^{2q+2} \leq \operatorname{rank}A^{2q+1}.$$

Theo (6), ta có:

$$\text{rank}A^{2q+1} = \text{rank}(BC)^q B + \text{rank}C(CB)^q = 2s .$$

Suy ra $\text{rank}(BC)^{q+1} + \text{rank}(CB)^{q+1} = 2s \Leftrightarrow \text{rank}(CB)^{q+1} = s$. □

Định lí 2.4. *Cho ma trận* A *có dạng khối* (4) *và giả sử* $\text{ind}BC = q \geq 1$.

Khi đó $\text{ind}A = 2q$ *nếu và chỉ nếu* $\text{ind}(CB) = q$ *và*

$$\text{rank}(BC)^q < \text{rank}(BC)^{q-1}B \text{ hoặc } \text{rank}(CB)^q < \text{rank}C(BC)^{q-1}.$$

Chứng minh. Giả sử $\text{ind}A = 2q$, đặt $s = \text{rank}(BC)^q$. *Khi đó:*

$$\text{rank}A^{2q} = \text{rank}A^{2q+1} = 2s < \text{rank}A^{2q-1}.$$

Lại có $\text{rank}A^{2q} = \text{rank}(BC)^q + \text{rank}(CB)^q$, suy ra $\text{rank}(CB)^q = s$.

Theo (6) thì

$$\text{rank}A^{2q-1} = \text{rank}(B(CB))^{q-1} + \text{rank}((CB)^{q-1}C) \leq \text{rank}(CB)^{q-1} + \text{rank}(BC)^q$$

Do đó $\text{rank}A^{2q-1} \leq \text{rank}(CB)^{q-1} + s$, suy ra

$$2s < \text{rank}A^{2q-1} \leq \text{rank}(CB)^{q-1} + s \Leftrightarrow \text{rank}(CB)^{q-1} > s .$$

Vì $\text{rank}(CB)^{q+1} = s$ nên $\text{ind}(CB) = q$.

Nếu $\text{rank}(BC)^q = \text{rank}(BC)^{q-1}B$ và $\text{rank}(CB)^q < \text{rank}C(BC)^{q-1}$ thì theo Định lí 2.3 ta có $\text{ind}A = 2q-1$, mâu thuẫn với giả thiết. Do đó

$$\text{rank}(BC)^q < \text{rank}(BC)^{q-1}B \text{ hoặc } \text{rank}(CB)^q < \text{rank}C(BC)^{q-1}.$$

Ngược lại, giả sử $\text{ind}CB = q$ và

$$\text{rank}(BC)^q < \text{rank}(BC)^{q-1}B \text{ hoặc } \text{rank}(CB)^q < \text{rank}C(BC)^{q-1}.$$

Vì $\text{ind}CB = q$ nên $\text{rank}(CB)^q = \text{rank}(CB)^{q+1} = s$ theo Bổ đề 2.5.

Từ Định lí 2.3 ta có $\text{ind}A \neq 2q-1$. Nếu $\text{ind}A = 2q+1$ thì

$$\text{rank}A^{2q+1} < \text{rank}A^{2q} \Leftrightarrow \text{rank}(BC)^q B + \text{rank}C(BC)^q < \text{rank}(BC)^q + \text{rank}(CB)^q$$

Từ Bổ đề 2.5 suy ra $s < \text{rank}(CB)^q$, mâu thuẫn. Kết hợp với Định lí 2.2 ta có

$\text{ind}A = 2q$. □

Định lí 2.5. *Cho ma trận* A *có dạng khối* (4) *và giả sử* $\text{ind}BC = q \geq 1$. *Khi đó* $\text{ind}A = 2q+1$ *nếu và chỉ nếu* $\text{rank}(CB)^q > \text{rank}(CB)^q C$.

Chứng minh. Đặt $\text{rank}(BC)^q = s$ và giả sử rằng $\text{ind}A = 2q+1$. Ta có:

$$\text{rank}A^{2q+1} = \text{rank}A^{2q+2} = 2s < \text{rank}A^{2q} .$$

Theo (5) thì

$$\text{rank}A^{2q} = \text{rank}(BC)^q + \text{rank}(CB)^q \Rightarrow \text{rank}(CB)^q > s .$$

Bởi Bổ đề 2.5, ta có:

$$\text{rank}C(BC)^q = \text{rank}(CB)^{q+1} = s \Leftrightarrow \text{rank}(CB)^q C = \text{rank}(CB)^{q+1} = s.$$

Do đó $\text{rank}(CB)^q > \text{rank}(CB)^q C$.

Ngược lại, nếu $\text{rank}(CB)^q > \text{rank}(CB)^q C = \text{rank}C(BC)^q$, ta có:

$$\text{rank}(BC)^q + \text{rank}(CB)^q > \text{rank}(BC)^q B + \text{rank}C(CB)^q \Leftrightarrow \text{rank}A^{2q} > \text{rank}A^{2q+1}$$

.

Do đó $\text{ind}A = 2q+1$. □

Hệ quả 2.2. *Cho ma trận* A *có dạng khối* (4) *và giả sử* $\text{ind}BC = q \geq 1$. *Khi đó* $\text{ind}A = 2q+1$ *nếu và chỉ nếu* $\text{ind}CB = 2q+1$.

Chứng minh. Giả sử $\text{ind}A = 2q+1$. Theo Định lí 2.5 thì

$$\text{rank}(CB)^q > \text{rank}(CB)^q C \geq \text{rank}(CB)^{q+1}.$$

Suy ra $\text{ind}CB \geq q+1$. Ta có

$$\text{rank}A^{2q+2} = \text{rank}A^{2q+4} \Leftrightarrow \text{rank}(BC)^{q+1} + \text{rank}(CB)^{q+1} = \text{rank}(BC)^{q+2} + \text{rank}(CB)^{q+2}$$

Vì $\text{rank}(BC)^{q+1} = \text{rank}(BC)^{q+2}$ nên $\text{rank}(CB)^{q+1} = \text{rank}(CB)^{q+2}$.

Do đó $\text{ind}CB = q+1$.

Ngược lại, giả sử $\text{ind}CB = q+1$, suy ra $\text{rank}(CB)^q > \text{rank}(CB)^{q+1}$, do đó

$$\text{rank}A^{2q} > \text{rank}A^{2q+2}.$$

Sử dụng (5), (6) và Bổ đề 2.5 ta có $\text{rank}A^{2q+1} = \text{rank}A^{2q+2}$.

Do đó $\text{ind}A = 2q+1$. □

Ví dụ 1. Xét ma trận A viết dưới dạng khối:

$$A = \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix},$$

với

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Khi đó

$$BC = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; (BC)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; (BC)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ta có $\text{rank}BC = 2; \text{rank}(BC)^2 = \text{rank}(BC)^3 = 1$ nên $\text{ind}BC = 2 = s$.

Lại có $\text{rank}A = 4; \text{rank}A^2 = 3; \text{rank}A^3 = \text{rank}A^4 = 2$ nên $\text{ind}A = 3 = 2s - 1$.

Dễ kiểm tra được rằng điều kiện i) và ii) ở Định lí 2.3 được thỏa mãn.

Ví dụ 2. Xét ma trận A được cho dưới dạng khối:

$$A = \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix},$$

với

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Khi đó

$$BC = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}; (BC)^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$CB = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; CBC = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ta có $\text{rank}BC = \text{rank}(BC)^2 = 2$ và $\text{ind}BC = 1 = s$.

Chú ý rằng $\text{rank}CB = 3 > \text{rank}CBC = 2$ và $\text{ind}CB = 2$. Khi đó theo Hệ quả 2.2 thì $\text{ind}A = 2s + 1 = 3$.

4. KẾT LUẬN

Trong bài báo này, ta đi nghiên cứu chỉ số và khả nghịch Drazin của ma trận khối đặc biệt $A = \begin{bmatrix} O & B \\ C & O \end{bmatrix}$. Ta đã đưa ra được công thức tìm khả nghịch Drazin cũng như mối quan hệ giữa chỉ số của ma trận khối với các khối ma trận thành phần. Một số ví dụ cũng được đưa ra để minh họa cho các định lí được trình bày trong bài báo.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. S. L. Campbell and C. D. Meyer (1991), *Generalized Inverses of Linear Transformations.* Pitman, London, 1979; Dover Publications, Inc., New York.
2. N. Castro-Gonzales and E. Dopazo (2005), *Representations of the Drazin inverse for a class of block matrices*. Linear Algebra and its Applications.
3. J. Chen, Z. Xu, and Y. Wei (2009), *Representations for the Drazin inverse of the sum* $P + Q + R + S$ *and its applications.* Linear Algebra and its Applications.
4. R. Hartwig, X. Li, and Y. Wei (2005), *Representations for the Drazin inverse of a 2 × 2 block matrix.* SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications, 2005.
5. R.A. Horn and C.R. Johnson (1985), *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, New York.
6. X. Li and Y. Wei (2007), *A note on the representations for the Drazin inverse of 2 × 2 block matrices.* Linear Algebra and its Applications.