

# VẤN ĐỀ DUY NHẤT CỦA HÀM PHÂN HÌNH ĐỐI VỚI CÁC CẶP ĐIỂM

Nguyễn Thị Thu Hằng

Khoa Toán

Email: hangntt82@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 18/3/2019

Ngày PB đánh giá: 24/4/2019

Ngày duyệt đăng: 26/4/2019

## TÓM TẮT

Năm 1926, R. Nevanlinna đã chứng minh được rằng nếu hai hàm phân hình khác hằng  $f$  và  $g$  trên mặt phẳng phức có cùng ảnh ngược của 5 giá trị phân biệt thì  $f = g$  (Định lý 5 điểm) và Định lý 4 điểm: nếu hai hàm phân hình có cùng ảnh ngược của 4 điểm phân biệt thì sẽ là một biểu diễn phân tuyến tính của nhau. Từ đó, vấn đề duy nhất về hàm phân hình được nhiều nhà toán học quan tâm nghiên cứu. Trong bài báo này, chúng tôi giới thiệu về các định lý cơ bản của lý thuyết Nevanlinna gồm Định lý cơ bản thứ nhất, Định lý cơ bản thứ hai. Từ đó, chúng tôi sử dụng để thiết lập và chứng minh cho định lý về sự xác định duy nhất của hàm phân hình khi có cùng ảnh ngược của 6 cặp điểm.

**Từ khóa:** lý thuyết Nevanlinna, vấn đề duy nhất cho hàm phân hình.

## UNIQUE PROBLEM FOR MEROMORPHIC FUNCTION SHARING PAIRS OF VALUES

### ABSTRACT

In 1926, R. Nevanlinna proved the well-known Five-point Theorem: "Let  $f$  and  $g$  be two meromorphic functions on  $\mathbb{C}$ . If  $f^{-1}(a_i) = g^{-1}(a_i)$  for five distinct points  $a_i$  ( $i = 1, \dots, 5$ ), then  $f = g$ ". Since then such the similar unique property of meromorphic functions has been studied extensively. In this paper, we introduced The first theorem and The Second theorem of Nevanlinna theory. Thus, we established the theorem of unique problem for meromorphic function sharing 6 pairs of values.

**Keywords:** Nevanlinna theory, uniqueness problem.

## 1. GIỚI THIỆU

Cho hai hàm phân hình  $f, g$  và cho  $a$  và  $b$  là hai giá trị phức bất kì. Ta nói rằng hai hàm phân hình  $f$  và  $g$  có cùng ảnh ngược đối với cặp giá trị  $(a, b)$  nếu thỏa mãn:  $f(z_0) = a$  khi

và chỉ khi  $f(z_0) = b$  với  $z_0 \in \mathbb{C}$ . Trong trường hợp khi  $z_0$  là nghiệm bậc  $p$  của phương trình  $f(z) = a$  và  $z_0$  là nghiệm bậc  $q$  của phương trình  $f(z) = b$ , khi đó ta nói  $f$  và  $g$  có cùng ảnh ngược đối với cặp điểm  $(a, b)$  tính cả bội nếu  $p = q$  với mọi điểm  $z_0$ . Khi ta không xét đến bội giống nhau thì ta nói  $f$  và  $g$  có cùng ảnh ngược đối với cặp điểm  $(a, b)$  không tính bội. Ta nói hai hàm phân hình  $f$  và  $g$  có cùng ảnh ngược của giá trị  $a$  nếu  $f$  và  $g$  có cùng ảnh ngược đối với cặp giá trị  $(a, a)$ .

Cho hai hàm phân hình  $f$  và  $g$  trên mặt phẳng phức. Ta nói  $g$  là một biểu diễn phân tuyến tính của  $f$  nếu tồn tại các giá trị phức  $a, b, c, d$  thỏa mãn  $ad - bc \neq 0$  sao cho  $g = \frac{af+b}{cf+d}$ .

Năm 1926, R. Nevanlinna đã chứng minh được rằng nếu hai hàm phân hình khác hằng  $f$  và  $g$  trên mặt phẳng phức  $\mathbb{C}$  có cùng ảnh ngược của 5 giá trị phân biệt thì  $f = g$  (Định lý 5 điểm) và Định lý 4 điểm:

**Định lý 1:** Cho hai hàm phân hình khác hằng  $f$  và  $g$  trên mặt phẳng phức và bốn điểm phân biệt  $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ . Nếu  $\nu_{f-a_j} = \nu_{g-a_j}$  với  $j=1,2,3,4$  thì  $g$  là một biểu diễn phân tuyến tính của  $f$ .

Ở đây, tác giả xét đối với các cặp điểm chung, tiếp tục nghiên cứu vấn đề duy nhất của hàm phân hình, chúng tôi đưa ra một chứng minh cho định lý về vấn đề duy nhất cho hàm phân hình có cùng ảnh ngược không tính bội của 6 cặp giá trị phân biệt thì sẽ là một biểu diễn phân tuyến tính của nhau.

Chúng tôi lưu ý rằng, nếu thay giả thiết 6 cặp điểm thành 5 cặp điểm thì kết quả không còn đúng nữa (qua ví dụ 1 mục 4). Tuy nhiên, một số kết quả của các tác giả đã chỉ ra rằng nếu thay bằng giả thiết 5 điểm trong đó có một số điểm tính bội và một số điểm không tính bội thì định lý vẫn đúng.

## 2. MỘT SỐ KHÁI NIỆM, KÍ HIỆU, CÔNG THỨC VÀ KẾT QUẢ CƠ BẢN

### 2.1. Divisor

**Định nghĩa 1:** [6] Một divisor trên  $U$  với hệ số trong là một biểu thức có dạng hình thức:

$$\sum \lambda_v z_v \quad \left| \lambda_v \in \mathbb{Z}; \{z_v\} \text{ rời rạc trong } U. \right.$$

**Định nghĩa 2:** [6] Cho  $U$  là một miền trong. Một hàm  $f$  xác định trên  $U$  được gọi là hàm phân hình nếu với mỗi  $a$ , tồn tại lân cận mở  $V$  chứa  $a$ ,  $V \subset U$  liên thông và tồn tại các hàm chỉnh hình  $g, h$  trên  $V$ , sao cho  $f = \frac{g}{h}$  trên  $V$ .

Cho  $f$  là một hàm phân hình trên  $U$ . Khi đó với mỗi  $a$  ta có biểu diễn địa phương  $f(z) = (z-a)^m g(z)$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ ,  $g(a) \neq 0$ ,  $g(z)$  là một hàm chỉnh hình.

Nếu  $m > 0$  ta nói  $a$  là một không điểm bậc  $m$  (bội  $m$ ) của  $f$ .

Nếu  $m < 0$  ta nói  $a$  là một cực điểm bậc  $m$  của  $f$ .

**Định nghĩa 3:** [6] Cho  $f$  là hàm phân hình trên  $U, \{a_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  và  $\{b_\nu\}_{\nu=1}^\infty$  lần lượt là tập các không điểm và cực điểm của  $f$  trên  $U$ ,  $a_\nu$  là không điểm bậc của  $f$ ,  $b_\nu$  là cực điểm bậc (với) của  $f$ . Ta định nghĩa các divisor không điểm và các divisor cực điểm của  $f$  và divisor sinh bởi hàm  $f$  lần lượt như sau:

$$(f)_0 = \sum_{\lambda_\nu > 0} \lambda_\nu a_\nu; (f)_\infty = \sum_{\mu_\nu < 0} (-\mu_\nu) b_\nu; (f) = (f)_0 - (f)_\infty.$$

### 2.3. Các hàm Nevanlinna của hàm phân hình:

#### Hàm đếm:

Cho  $D = \sum \mu_\nu z_\nu$  là một divisor trên  $\mathbb{C}$ , với mỗi số tự nhiên  $k > 0$  hoặc  $k = +\infty$  ta định nghĩa hàm đếm của  $D$  được ngắt bởi  $k$ :

$$N^{[k]}(r, D) = \int_1^r \frac{n_k(t, D)}{t} dt, r > 1.$$

Ở đó:

$$n_k(t, D) = \sum_{|z_\nu| \leq t} \min\{k, \mu_\nu\}; n_{+\infty}(t, D) = \sum_{|z_\nu| \leq t} \mu_\nu = n(t, D).$$

Ta dùng các kí hiệu  $N(r, D)$  thay cho  $N^{+\infty}(r, D)$  là hàm đếm với bội không bị chặn.

Cho  $f$  là một hàm phân hình khác đồng nhất 0 trên  $\mathbb{C}$  hàm đếm  $a$ -điểm của  $f$  được định nghĩa bởi:

$$\begin{aligned} N(f, a, r) &:= N\left(r, \left(\frac{1}{f-a}\right)_0\right) - N\left(r, \left(\frac{1}{f-a}\right)_\infty\right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=r} \log \left| \frac{1}{f(\zeta)-a} \right| d\theta - \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=1} \log \left| \frac{1}{f(\zeta)-a} \right| d\theta. \end{aligned}$$

Cho  $f$  là một hàm phân hình khác đồng nhất 0 trên  $\mathbb{C}$  hàm xấp xỉ của  $f$  được định nghĩa bởi:

$$m(r, f) := \frac{1}{2\pi} \int_{|\zeta|=r} \log^+ |f(\zeta)| d\zeta.$$

:

Trong đó,  $\log^+ x = \max\{\log x, 0\}$ .

Hàm xấp xỉ của  $f$  ứng với điểm  $a \in \mathbb{C}$  được định nghĩa là:  $m\left(r, \frac{1}{f-a}\right)$ .

#### Hàm đặc trưng:

Cho  $f$  là một hàm phân hình khác đồng nhất 0 trên  $\mathbb{C}$ , hàm đặc trưng Nevanlinna của  $f$  được định nghĩa bởi:

$$T(f, r) = T_f(r) := N(r, (f)_\infty) + m(r, f).$$

### 2.4. Một số định lý cơ bản của Nevanlinna

**Định lý 2:** [1] Định lý cơ bản thứ nhất. (F.M.T)

Cho  $f$  là hàm phân hình khác hằng trên  $|z| < R$  ( $0 < R < \infty$ ), điểm  $a \in \mathbb{C}$  bất kỳ. Khi đó:

$$T\left(r, \frac{1}{f-a}\right) = T(r, f) + O(1).$$

**Định lý 3: [3] Bất đẳng thức Nevanlinna:**

Giả sử  $f$  là một hàm phân hình khác hằng trên  $\mathbb{C}$  và điểm  $a \in \mathbb{C}$ . Khi đó:

$$a) N(r, (f-a)_0) \leq T(r, f) + O(1).$$

$$b) N(r, (f)_\infty) \leq T(r, f) + O(1).$$

$$c) N(r, f) \leq T(r, f) + O(1).$$

**Định lý 4: [5] Định lý cơ bản thứ hai: (S.M.T)**

Cho  $f$  là hàm phân hình khác hằng,  $a_k$  ( $k=1, \dots, q$ ) là các điểm phức phân biệt ( $q \geq 3$ ).

Khi đó:

$$\|(q-2)T(r, f) \leq \sum_{j=1}^q N^{[1]}(r, (f-a_j)_0) + O(T(r, f)).$$

Ta thấy rằng, với  $q$  ( $q \geq 3$ ) là số tùy ý, mà vế phải trong bất đẳng thức của *Định lý cơ bản thứ hai* không phụ thuộc  $q$  nên từ đó có thể thấy rằng, các đại lượng  $m(r, f)$  nói chung rất nhỏ.

**Hệ quả (Định lý Picard) [6]**

Nếu hàm phân hình xác định trên  $\mathbb{C}$  mà không nhận ba giá trị phân biệt trên  $\mathbb{C}$  thì là hàm hằng. Đặc biệt, nếu hàm chỉnh hình xác định trên  $\mathbb{C}$  mà không nhận hai giá trị phân biệt trên  $\mathbb{C}$  thì là hàm hằng.

**Định lý năm điểm của Nevanlinna: [6]**

Cho  $f$  và  $g$  là hai hàm phân hình trên  $\mathbb{C}$  khác hằng và là năm điểm phân biệt  $a_1, \dots, a_5 \in \mathbb{C}$ .

Giả sử  $\nu_{f-a_i} = \nu_{g-a_i} \forall i=1, \dots, 5$ . Khi đó  $f \equiv g$ .

### 3. Kết quả chính

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu kết quả chính của bài báo, đó là xét một trường hợp của bài toán duy nhất đối với trường hợp ánh xạ phân hình có cùng ảnh ngược đối với 6 cặp giá trị.

**3.1. Định lý 5:** Cho  $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  là các hàm phân hình khác hằng. Cho  $a_1, a_2, \dots, a_q$  là các giá trị trong sao cho  $a_i < a_j, b_i < b_j$  với mọi  $i < j$ . Giả sử  $f^{-1}(a_i) = g^{-1}(b_i)$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, q$ . Nếu  $q \geq 6$  thì  $f$  là một biểu diễn phân tuyến tính của  $g$ .

Để chứng minh định lý trên, ta cần một số bổ đề:

### 3.2. Một số bổ đề

**Bổ đề 1:** Cho  $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$  là các hàm phân hình khác hằng. Cho  $a_1, a_2, a_3$  là các giá trị trong sao cho  $a_i < a_j, b_i < b_j$  với mọi  $i < j$ . Giả sử  $f^{-1}(a_i) = g^{-1}(b_i)$  với mọi  $i = 1, 2, 3$ .

Khi đó, nếu  $f$  không là biến đổi phân tuyến tính của  $g$  thì:

$$T(r, f) + T(r, g) \geq \sum_{i=1}^3 N(r, \min\{v_{f-a_i}, v_{g-b_i}\}).$$

**Chứng minh:**

Trước tiên, ta đặt:

$$H = (f - a_1)(g - b_2) \frac{(a_3 - a_2)}{(a_3 - a_1)} - (f - a_2)(g - b_1) \frac{(b_3 - b_2)}{(b_3 - b_1)}.$$

Vì  $f$  không là biến đổi phân tuyến tính của  $g$  nên  $H \neq 0$ . Khi đó, ta thấy rằng nếu  $z$  là không điểm của  $f - a_i$  với bội  $m$  và là không điểm của  $g - b_i$  với bội  $n$  thì nó là không điểm của  $H$  với bội lớn hơn hoặc bằng  $\min\{m, n\}$ .

Do đó, ta có:

$$T(r, f) + T(r, g) \geq T(r, H) + O(1).$$

Áp dụng định lý cơ bản thứ nhất ta có:

$$\begin{aligned} T(r, f) + T(r, g) &\geq T(r, H) + O(1) \\ &\geq N(r, v_H) + O(1) \\ &\geq \sum_{i=1}^3 N(r, \min\{v_{f-a_i}, v_{g-b_i}\}) + O(1). \square \end{aligned}$$

**Bổ đề 2:** Cho  $f, g: \mathbb{C} \rightarrow \bar{\mathbb{C}}$  là các hàm phân hình khác hằng. Cho  $a_1, a_2, \dots, a_5$  là các giá trị trong sao cho  $a_i < a_j, b_i < b_j$  với mọi  $i < j$ . Giả sử  $f^{-1}(a_i) = g^{-1}(b_i)$  với mọi  $i = 1, 2, \dots, 5$ . Nếu  $f$  không là biến đổi phân tuyến tính của  $g$  thì một trong hai điều sau là đúng:

$$i) T(r, f) = 2T(r, g) + O(T(r, f)) \text{ hoặc } T(r, g) = 2T(r, f) + O(T(r, g))$$

$$ii) -(T(r, f) + T(r, g)) \geq \sum N(r, \min\{v_{f-a_i}, v_{g-b_i}\}) + O(T(r, f) + T(r, g)).$$

**Chứng minh:**

Giả sử khẳng định  $i)$  không xảy ra.

Khi đó: tồn tại các số  $c_1, c_2, \dots, c_6$  trong đó ít nhất một số khác sao cho hàm  $F(f, g) = c_1fg^2 + c_2fg + c_3g^2 + c_4g + c_5f + c_6$  thỏa mãn:

$$F(a_i, b_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, 5.$$

Khi đó, ta có:

$$T(r, F) \leq T(r, f) + 2T(r, g) + O(1).$$

Nếu  $F \equiv 0$  thì  $(c_1g^2 + c_2g + c_3)f = -(c_3g^2 + c_4g + c_5) \cdot$

Ta thấy,  $c_1g^2 + c_2g + c_3 \neq 0$  vì:

+) Nếu  $c_1 = c_2 = c_5 = 0$  thì  $c_3 = c_4 = c_6 = 0$ . Điều này mâu thuẫn.

+) Nếu  $c_1 g^2 + c_2 g + c_5 = 0$  thì  $g = \lambda_1; g = \lambda_2$  (vô lý).

Vậy  $f = \frac{-(c_3 g^2 + c_4 g + c_6)}{c_1 g^2 + c_2 g + c_5}$ . Mặt khác, vì  $f$  không biến đổi phân tuyến tính của  $g$  nên về phải là

bất khả quy. Do đó,  $T(r, f) = 2T(r, g) + O(1)$ , vô lý. Do vậy dẫn tới  $F \neq 0$ .

Do đó ta có  $\nu_F \leq \sum_{i=1}^5 \min\{\nu_{f-a_i}; \nu_{f-b_i}\}$ . Từ đó dẫn tới:

Tương tự, ta có:

Cộng tổng hai vế ta có:

$$\frac{3}{2}(T(r, g) + T(r, f)) \geq N(r, \sum_{i=1}^5 \min\{\nu_{f-a_i}; \nu_{f-b_i}\}) + O(1).$$

Kết thúc chứng minh bổ đề 2.

### Chứng minh định lý:

Giả sử  $f$  không là biến đổi phân tuyến tính của  $g$ . Theo bổ đề 2, ta có hai trường hợp sau:

**Trường hợp 1:**  $T(r, f) = 2T(r, g) + O(1)$  hoặc  $T(r, g) = 2T(r, f) + O(1)$ .

Khi đó, áp dụng bổ đề 1 ta có:

$$\frac{3}{2}T(r, f) \geq \sum_{j=1}^3 N^{[1]}(r, \nu_{f-a_j}) + O(1).$$

Lấy tổng 2 vế theo tất cả các bộ  $1 \leq i_1 < i_2 < i_3 \leq 6$  ta được:

$$3T(r, f) \geq \sum_{i=1}^6 N^{[1]}(r, \nu_{f-a_i}) + O(1).$$

Mặt khác, áp dụng định lý cơ bản thứ 2 cho 6 điểm  $\{a_1; a_2; \dots; a_6\}$  ta có:

$$\sum_{i=1}^6 N^{[1]}(r, \nu_{f-a_i}) \geq (6-2)T(r, f) + O(T(r, f)).$$

Do đó,  $T(r, f) = 0$  nên  $f$  là hàm số hằng, điều này mâu thuẫn.

### Trường hợp 2:

$$\frac{3}{2}(T(r, f) + T(r, g)) \geq \sum_{i=1}^5 N(r, \min\{\nu_{f-a_i}; \nu_{g-b_i}\}) + O(T(r, f) + T(r, g)).$$

Khi đó, ta lấy tổng theo các bộ  $\{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_5 \leq 6\}$ , ta có

$$\frac{3}{2}(T(r, f) + T(r, g)) \geq \frac{5}{6} \sum_{j=1}^6 N^{[1]}(r, \nu_{f-a_j}) + O(1).$$

Mặt khác, áp dụng định lý cơ bản thứ hai ta có:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}(T(r, f)+T(r, g)) &\geq \frac{5}{6} \sum_{j=1}^6 N^{[1]}(r, v_{f-a_j})+O(1) \\ &\geq \frac{20}{6} T(f, r)+O(T(f, r)).\end{aligned}$$

Tương tự, do vai trò của  $f$  và  $g$  như nhau nên ta có:

$$\frac{3}{2}(T(r, f)+T(r, g)) \geq \frac{20}{6} T(g, r)+O(T(g, r)).$$

Do đó:  $3(T(r, f)+T(r, g)) \geq \frac{20}{6}(T(r, f)+T(r, g))+O(T(r, f))+O(T(r, g))$ .

Từ đó, ta có:  $T(r, f)+T(r, g)=O(1)$ .

Do vậy  $f$  là biến đổi phân tuyến tính của  $g$  (điều phải chứng minh).

#### 4. VÍ DỤ:

Trong mục này, chúng tôi giới thiệu ví dụ về hai hàm phân hình có cùng ảnh ngược của các cặp giá trị.

**Ví dụ 1:** Cho hai hàm phân hình:  $f = \frac{e^z + 1}{(e^z - 1)^2}$ ;  $g = \frac{(e^z + 1)^2}{8(e^z - 1)}$ .

Khi đó ta thấy rằng  $f$  và  $g$  có cùng ảnh ngược đối với 5 cặp giá trị  $(0; 0); (1; 1); (1; 1); (-1/8; -1/8); (-1/2; 1/4)$ . Tuy nhiên ta thấy  $f$  không là một biểu diễn phân tuyến tính của  $g$ , do đó định lý 5 không còn đúng khi thay giả thiết 6 cặp điểm thành 5 cặp điểm.

Nhưng ở đây ta thấy rằng  $f$  và  $g$  có cùng ảnh ngược không tính bội các cặp  $(0; 0); (1; 1); (1; 1); (-1/8; -1/8)$  và cùng ảnh ngược bội hai của cặp giá trị  $(-1/2; 1/4)$ . Như vậy ví dụ này cho ta thấy được nếu thay bằng một giả thiết tốt hơn nữa đối với 5 cặp điểm là trong đó có 1 cặp điểm có tính bội thì định lý vẫn không đúng.

#### 5. KẾT LUẬN:

Bài báo đã chứng minh được định lý về vấn đề duy nhất của hàm phân hình có cùng ảnh ngược của 6 cặp điểm, đồng thời chỉ ra ví dụ thấy rằng định lý không còn thỏa mãn khi giảm số cặp điểm xuống còn 5. Hướng nghiên cứu tiếp theo là xem xét các điều kiện về việc tính bội của các cặp điểm để hai hàm phân hình có cùng ảnh ngược của 5 cặp điểm có thể biểu diễn phân tuyến tính qua nhau.

## TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. H. Fujimoto (1974), *On meromorphic maps into the complex projective space*, J.Math. Soc. Japan., 26, 272-288.
2. H. Fujimoto (1975), *The uniqueness problem of meromorphic maps into the complex projective space*, Nagoya Math. J. 58, 1-23.
3. H. Fujimoto (1998), *Uniqueness problem with truncated multiplicities in value distribution theory*, Nagoya Math. J. 152, 131-152.
4. N. T. T. Hang, N. H. Kien, N. and T. V. Tan (2011), *An improvement of the Nevanlinna-Gundersen theorem*, J. Math. Anal. Appl. 376, 656-674.
5. J. Noguchi and T. Ochiai (1990), *Introduction to Geometric Function Theory in Several Complex Variables*, Trans. Math. Monogr. 80, Amer. Math. Soc., Providence, Rhode Island.
6. J. Noguchi and J. Winkelman, *Nevanlinna Theory in Several Complex Variables and Diophantine Approximation*, Textbook.
7. S. D. Quang and L.N.Quynh (2016), *Two meromorphic mappings having the same inverse images of moving hyperplanes*, Complex Var. Elliptic Equat, 61.
8. N.V Thin and N.T.T Hang (2017), *A modification of the Nevanlinna–Cartan theory for holomorphic curve*, Complex Variables and Elliptic Equations, 62, No. 4, 438–449.

