

3. Kết luận

Tìm hiểu đặc trưng không khí trong thư Hồ Chí Minh, có thể thấy rằng, những đặc điểm ngữ cảnh khác nhau đã chi phối đến việc lựa chọn cách thức sử dụng các yếu tố ngôn ngữ với những thang độ đánh giá khác nhau đã góp phần phản ánh sâu sắc bức tranh xã hội Việt Nam qua từng thời kì. Các đặc trưng về không khí trong 116 diễn ngôn thư như các kiểu câu, từ ngữ xưng hô và các yếu tố tình thái không chỉ phản ánh đa dạng bức tranh lịch sử, xã hội của dân tộc mà còn diễn đạt và xác lập, duy trì các mối quan hệ xã hội cũng như mối quan hệ liên nhân giữa người tạo lập diễn ngôn và đối tượng tiếp nhận. Đồng thời các yếu tố ngôn ngữ được phân tích cũng góp phần thể hiện được quan điểm, thái độ tình cảm phù hợp với đối tượng giao tiếp, ngữ cảnh giao tiếp của nhà cách mạng, nhà văn hóa Hồ Chí Minh.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Diệp Quang Ban (2009), *Giao tiếp diễn ngôn và cấu tạo văn bản*, NXB Giáo dục, Hà Nội.
2. Đặng Xuân Kỳ (chủ biên) (2004), *Phương pháp và phong cách Hồ Chí Minh*, Nhà xuất bản Lý luận Chính trị.
3. *Hồ Chí Minh Bàn về Công tác giáo dục* (1972), NXB Sự thật, Hà Nội.

4. *Hồ Chí Minh toàn tập* (tái bản lần thứ 3, năm 2011), NXB Chính trị Quốc gia, 7 tập.

5. Nguyễn Hòa (2006), *Phân tích diễn ngôn - Một số vấn đề lí luận và phương pháp*, NXB Đại học Quốc gia Hà Nội.

6. Nguyễn Như Ý (1997) (chủ biên), *Hồ Chí Minh, tác gia, tác phẩm nghệ thuật ngôn từ*, Nhà xuất bản Giáo dục, Hà Nội.

7. Trần Đức Vương (2003), “Thư của chủ tịch Hồ Chí Minh gửi đồng bào và cán bộ Lai Châu”, *file:///C:/Users/Admin/Downloads/tai_lieu_tuyen_truyen_hoc_tap_bac_2.pdf*

8. Trần Ngọc Thêm (1980), “Một vài suy nghĩ về các phương thức tổ chức văn bản trong ngôn ngữ của Bác”, *Tạp chí Ngôn ngữ*, số 2.

9. Viện Ngôn ngữ học (2010), *Chủ tịch Hồ Chí Minh với cách nói và cách viết*, Nhà xuất bản Khoa học xã hội, Hà Nội.

10. Bách khoa toàn thư mở (2021), *Thư*, ngày cập nhật 11/5/2021, <https://vi.wikipedia.org/wiki/Th%C6%B0>

TU LIỆU NGHIÊN CỨU

11. Lữ Huy Nguyên (1997), *Tuyển tập văn chính luận Hồ Chí Minh*, NXB Giáo dục, Hà Nội.

12. Bạch ngọc sách, *Những bức thư của Chủ tịch Hồ Chí Minh*, <https://bachngocsach.com/reader/nhung-buc-thu-cua-chu-tich-ho-chi-minh/muc-luc>

DẠY HỌC HỌC PHẦN GIẢI TÍCH THEO ĐỊNH HƯỚNG PHÁT TRIỂN NĂNG LỰC NGHIÊN CỨU KHOA HỌC CHO SINH VIÊN TOÁN

Phạm Văn Trạo

Khoa Toán - Khoa học tự nhiên

Email: traopv@dhhp.edu.vn

Ngày nhận bài: 30/3/2021

Ngày PB đánh giá: 04/5/2021

Ngày duyệt đăng: 14/5/2021

TÓM TẮT: Năng lực nghiên cứu khoa học là một trong những năng lực quan trọng cần hình thành và phát triển cho SV nói chung và SV chuyên ngành toán nói riêng. Dạy học các học phần nói chung và học phần Giải tích nói riêng góp phần quan trọng vào mục tiêu phát triển năng lực nghiên cứu khoa học cho người học. Bài viết trình bày khái niệm về năng lực nghiên cứu khoa học của SV Toán; những biểu hiện về năng lực và việc phát triển năng lực này thông qua dạy học học phần Giải tích trong chương trình đào tạo ngành Toán ở các trường đại học. Thông qua một số ví dụ cụ thể ở học phần bước đầu mô tả quá trình giảng viên tổ chức dạy học theo định hướng phát triển năng lực nghiên cứu khoa học cho SV Toán, góp phần phát triển phẩm chất và năng lực cho SV.

Từ khóa: *Giải tích toán học, năng lực nghiên cứu khoa học, sinh viên toán.*

TEACHING THE ANALYTICS TO THE ORIENTATION OF DEVELOPING THE SCIENTIFIC RESEARCH COMPETENCE FOR MATHS STUDENTS

ABSTRACT: The scientific research competence is one of the important competences that needs to be formed and developed for the students in general and Maths students in particular. Teaching the modules in general and the analytics in particular (contributing) contributes significantly to the goal of developing the scientific research competence for the students. This paper presents the concepts of the scientific research competence of Maths students, the expressions of competences and the development of these competences through teaching the analytics in the Maths curriculum of the universities. (By) Through analysing some specific examples, this paper describes the teaching process to develop the scientific research competence of Maths students contributing to develop the qualifications and the competence for the students.

Keywords: *analytics; scientific research competence; Maths student.*

1. MỞ ĐẦU

Các trường đại học với chức năng là trung tâm nghiên cứu khoa học (NCKH), chuyển giao công nghệ không chỉ đơn thuần dừng lại ở việc truyền thụ tri thức khoa học cơ bản, khoa học chuyên ngành, rèn luyện kỹ năng nghề nghiệp cho SV, mà còn có nhiệm vụ quan trọng là tổ chức

NCKH cho SV ở những hình thức và mức độ phù hợp. Như vậy, trong quá trình học tập của SV thì việc trang bị và hoàn thiện năng lực NCKH bên cạnh những năng lực cơ bản khác là một yêu cầu rất cần thiết. Năng lực NCKH có vai trò rất quan trọng, giúp hình thành cho SV khả năng tự học, tự nghiên cứu, rèn kỹ năng phát hiện và

giải quyết vấn đề trong cuộc sống, góp phần hình thành và bồi dưỡng những phẩm chất cần thiết của người lao động mới... Năng lực NCKH của SV không chỉ được hình thành thông qua các bài tập lớn, tiểu luận, chuyên đề hay các đề tài khóa luận tốt nghiệp... mà còn có thể được hình thành và phát triển thông qua quá trình dạy học mỗi học phần trong quá trình đào tạo. Giải tích là môn học cơ sở, các kiến thức được hình thành là nền tảng của ngành đào tạo toán học. Vì vậy, việc dạy học học phần Giải tích trong chương trình đào tạo góp phần quan trọng trong việc phát triển năng lực NCKH cho SV chuyên ngành Toán.

2. NỘI DUNG

2.1. Phát triển năng lực nghiên cứu khoa học cho sinh viên toán

2.1.1. Năng lực nghiên cứu khoa học

Năng lực thường được hiểu theo nhiều nghĩa khác nhau, và mỗi cách hiểu có những thuật ngữ tương ứng. Năng lực (Competence) thường gọi là năng lực hành động, là khả năng thực hiện hiệu quả một nhiệm vụ nào đó, liên quan đến một lĩnh vực nhất định dựa trên cơ sở hiểu biết, kỹ năng, kỹ xảo và sự sẵn sàng hành động. Từ đó, có thể thấy năng lực là “những khả năng, kỹ xảo học được hay sẵn có của cá nhân nhằm giải quyết các tình huống xác định, cũng như sự sẵn sàng về mặt động cơ, xã hội... và khả năng vận dụng các cách giải quyết vấn đề một cách có trách nhiệm và hiệu quả

trong các tình huống linh hoạt bằng những phương tiện, biện pháp, cách thức phù hợp” [3].

Theo Vũ Cao Đàm: “NCKH là một hoạt động xã hội hướng vào việc khám phá những thuộc tính bản chất của sự vật hiện tượng trong thế giới khách quan nhằm phát triển nhận thức khoa học về thế giới; hoặc là sáng tạo phương pháp mới và phương tiện kỹ thuật mới để cải tạo thế giới” [1].

Theo [3], chúng tôi đồng tình và bổ sung, đề xuất thêm, *năng lực NCKH* là khả năng tìm tòi, sáng tạo ra những tri thức khoa học mới; hoặc khám phá bản chất và các quy luật vận động của tự nhiên, xã hội và tư duy.

Cấu trúc của năng lực NCKH của SV toán gồm 3 thành tố chủ yếu:

- *Kiến thức*: Kiến thức khoa học chuyên ngành toán (KTKHCNT); Kiến thức phương pháp NCKH về toán (nghiên cứu cơ bản, nghiên cứu ứng dụng,...).

- *Kỹ năng*: Kỹ năng xây dựng đề tài nghiên cứu; Kỹ năng thiết kế nghiên cứu; Kỹ năng thu thập, phân tích và sử dụng dữ liệu; Kỹ năng lập luận; Kỹ năng phê phán; Kỹ năng viết báo cáo và trình bày báo cáo khoa học chuyên ngành toán.

- *Thái độ*: Nhiệt tình, say mê khoa học; Nhạy bén với sự kiện xảy ra; Khách quan, trung thực, nghiêm túc; Kiên trì, cẩn thận khi làm việc; Sáng tạo; Có tinh thần hợp tác khoa học; Hoài nghi khoa học, dũng cảm bảo vệ chân lý khoa học.

2.1.1. Biểu hiện năng lực nghiên cứu khoa học của sinh viên toán

Theo Vũ Cao Đàm [1] và Nguyễn Giác Trí [3], một SV có thành tố kiến thức khoa học chuyên ngành toán (KTKHCNT) trong năng lực NCKH thì trước hết SV đó sẽ:

- 1) Có kiến thức sâu, rộng về toán học;
- 2) Có kĩ năng thu thập, sắp xếp, lựa chọn thông tin cần thiết về toán học.
- 3) Có kĩ năng lập luận và biến đổi toán học;
- 4) Biết tìm tòi, phát hiện và giải quyết các vấn đề toán học đặt ra và tổ chức thực hiện;
- 5) Biết kết nối các kiến thức môn học với các kiến thức có liên quan của môn học khác;
- 6) Biết sử dụng ngôn ngữ toán học để trình bày rõ ràng, đầy đủ các kết quả nghiên cứu khoa học đã đạt được.

Dạy học các học phần khác nhau ở chuyên ngành toán đều có thể phát triển được năng lực NCKH cho SV toán. Đặc biệt, học phần Giải tích với đặc điểm trừu tượng cao độ và nền tảng của toán học cao cấp có vai trò rất quan trọng trong quá trình phát triển năng lực NCKH góp phần phát triển phẩm chất và năng lực cho SV.

Trong khuôn khổ bài báo, chúng tôi xin trình bày một số ví dụ khi dạy học học phần Giải tích bước đầu mô tả quá trình giảng viên tổ chức dạy học theo định hướng phát triển kiến thức khoa học

chuyên ngành góp phần phát triển năng lực NCKH cho SV.

2.2. Một số ví dụ trong dạy học học phần Giải tích nhằm phát triển kiến thức khoa học chuyên ngành góp phần phát triển năng lực NCKH cho sinh viên Toán

2.2.1. Phát triển lý thuyết đã học

Ví dụ 1. Về phép cộng hữu hạn, cộng vô hạn

Ở chương trình toán học phổ thông đã

xét tổng hữu hạn $S_n = \sum_{i=1}^n a_i$

Với a_i là cấp số cộng; với a_i là cấp số nhân. Khi đó chúng ta đã thu được các kết quả bổ ích.

Vấn đề đặt ra:

- Đối với tổng vô hạn thì sao?
- Các a_i là các số nào đó; là các hàm nào đó thì sao ?

* Với a_i là các số, ta có chuỗi số:

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \text{ tất nhiên tổng vô hạn } S \text{ có}$$

quan hệ với tổng hữu hạn S_n .

Nếu ta đặt $r_n = S - S_n$ thì rõ ràng $r_n \rightarrow 0$ khi $n \rightarrow \infty$. Hay nói khác đi, tổng vô hạn “chỉ hơn” tổng hữu hạn một lượng không đáng kể?

Vấn đề đặt ra: Tính chất của phép cộng vô hạn; và các số a_n sẽ cần những điều kiện gì để có được một tổng vô hạn v.v.

Chương sau có Lý thuyết về chuỗi số.

* Với a_i là các hàm số, với tổng vô hạn ta có chuỗi hàm: $S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$

Vấn đề đặt ra:

+ Khi nào có tổng?

+ Tổng là một hàm thế nào?

+ Có thể mở rộng được nữa hay không?

Chương sau có Lý thuyết về chuỗi hàm số.

* (Mở rộng) Với a_i là các quá trình ngẫu nhiên ta có chuỗi: $\xi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(x)$

Có nhiều kết quả quan trọng trong chuyên ngành Lý thuyết quá trình ngẫu nhiên.

Đây là sự phát triển logic về lý thuyết, một phát triển KTKHCNT cho SV.

2.2.2. Khai thác, phát triển các định lý

2.2.2.1. Khai thác giả thuyết, kết luận của định lý

Có những định lý có thể khai thác, mở rộng giúp SV có thêm kiến thức môn học góp phần phát triển KTKHCNT

Ví dụ 2. Trong bài “Hàm số liên tục” có định lý sau:

Định lý 1: Một hàm số liên tục trên $[a, b]$ thì liên tục đều trên đoạn đó.

Đây là định lý có cấu trúc đơn giản với giả thiết: Hàm số liên tục trên đoạn; kết luận hàm số liên tục đều trên đoạn đó.

Vấn đề đặt ra: Giả sử cho hàm $f(x)$ liên tục trên (a, b) , liệu có kết luận được hàm $f(x)$ liên tục đều trên khoảng đó được hay không? Có cần thêm điều kiện gì nữa?

Về logic chắc chắn là không liên tục đều rồi. Vì nếu liên tục đều thì [2] đã có ngay định lý.

Chẳng hạn, ví dụ: Hàm $f(x) = \frac{1}{x}$ liên tục trên $(0, 1)$ nhưng không liên tục đều trên $(0, 1)$.

Giảng viên có thể giúp SV bổ sung, thay đổi giả thiết để được kết luận của định lý.

Định lý 2 : Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên (a, b) và tồn tại $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$ hữu hạn thì $f(x)$ liên tục đều trên (a, b) .

Chứng minh: (Ý chính). Từ giả thiết $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A < +\infty$;

$\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = B < +\infty$

$$\text{Đặt } F(x) = \begin{cases} A & \text{khi } x = a \\ f(x) & \text{khi } a < x < b \\ B & \text{khi } x = b \end{cases}$$

Suy ra hàm $F(x)$ liên tục trên $[a, b]$. Theo định lý 1) hàm $F(x)$ liên tục đều trên $[a, b]$, do đó hàm $f(x)$ liên tục đều trên (a, b) .

Vì hàm đơn điệu và bị chặn trên khoảng sẽ có giới hạn phải và giới hạn trái, nên ta có:

Định lý 3: Nếu hàm $f(x)$ liên tục, đơn điệu và bị chặn trên (a, b) thì liên tục đều trên khoảng đó.

Chứng minh: (Ý chính)

Giả sử hàm $f(x)$ đơn điệu tăng, bị chặn trên và bị chặn dưới trên (a, b) . Từ giả thiết suy ra tồn tại hữu hạn

$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x)$. Theo định lý 2)

ta suy ra điều phải chứng minh.

2.2.2.2. Hướng dẫn sinh viên chứng minh định lý bằng nhiều cách

Ở [2], có một số định lý có thể có cách chứng minh khác. Trong quá trình dạy học, giảng viên có thể hướng dẫn cho SV tìm tòi, khám phá những khía cạnh khoa học của các kiến thức mặc dù đã được trình bày trong giáo trình.

Ví dụ 3:

Định lý 4: Nếu hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì nó đạt cận trên và cận dưới đúng. Tức là tồn tại hai số $x_1, x_2 \in [a,b]$ sao cho:

$$f(x_1) = \max_{[a,b]} f(x) \quad , \quad f(x_2) = \min_{[a,b]} f(x)$$

Chứng minh:

Cách 1: (Xem chứng minh [2. Tr. 57])

Cách 2: (Dựa vào định lý trước đó)
Hàm $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ thì bị chặn trên $[a,b]$. Từ đó suy ra $f(x)$ có cận trên đúng. Gọi : $M = \sup_{[a,b]} f(x)$

Như vậy $f(x) \leq M \quad \forall x \in [a,b]$. Bây giờ ta giả thiết $f(x) < M \quad \forall x \in [a,b]$. Vì giả thiết $f(x) < M \quad \forall x \in [a,b]$ nên $M - f(x) > 0 \quad \forall x \in [a,b]$. Do $f(x)$ liên tục trên $[a,b]$ nên suy ra hàm $\frac{1}{M - f(x)}$ cũng liên tục trên $[a,b]$. Từ đó suy ra hàm số này cũng bị chặn, tức là tồn tại một số $C > 0$ sao cho $\frac{1}{M - f(x)} \leq C \quad \forall x \in [a,b]$

$$\text{hay} \quad f(x) \leq M - \frac{1}{C} \quad \forall x \in [a,b] .$$

Điều này trái với định nghĩa cận trên đúng. Vậy phải có ít nhất một điểm $x_1 \in [a,b]$ sao cho $f(x_1) = M = \max_{[a,b]} f(x)$.

Tương tự, ta chứng minh được có ít nhất một điểm $x_2 \in [a,b]$ sao cho:

$$f(x_2) = \min_{[a,b]} f(x) .$$

2.2.3. Hướng dẫn sinh viên xây dựng và thực hiện các chuyên đề hay đề tài nghiên cứu khoa học

Từ các bài tập hay lý thuyết của một chương hay nhiều chương có thể định hướng, gợi mở cho SV tạo dựng “bài tập lớn”, các chuyên đề hay đề tài nghiên cứu khoa học để mở rộng, đào sâu và phát triển và củng cố kiến thức.

Chẳng hạn, Chương II: *Phép tính vi phân của hàm số một biến* [2, tr.83] có đề cập đến các ứng dụng của đạo hàm: khảo sát hàm số (chiều biến thiên, cực trị, tiệm cận,...). Dựa vào lý thuyết và các bài tập, giảng viên có thể giúp SV mở rộng, phát triển thành các chuyên đề hay đề tài nghiên cứu khoa học về một số ứng dụng của đạo hàm.

Ví dụ 4. Hướng dẫn SV xây dựng chuyên đề “Một số ứng dụng của đạo hàm”

Nội dung một chuyên đề thường có 2 phần: phần tóm tắt lý thuyết và phần khai thác lý thuyết áp dụng vào các bài toán cụ thể. Giảng viên có thể hướng dẫn SV thực hiện từng bước để các em nắm được cách thức thực hiện một chuyên đề như thế nào:

Bước 1: Giảng viên hướng dẫn về bối cảnh của chuyên đề, giúp các em tìm kiếm tài liệu, định hướng nghiên cứu;

Bước 2: Có thể phân việc cụ thể cho SV như yêu cầu các em về tìm hiểu những ứng dụng của đạo hàm, mỗi ứng dụng hãy lấy các ví dụ minh họa và hẹn ngày nộp sản phẩm;

Bước 3: Xem sản phẩm nội dung các em làm được, nếu còn sai sót hay thiếu, chẳng hạn các em còn chưa khai thác hết các ứng dụng về đạo hàm, giảng viên có thể tiếp tục định hướng bổ sung.

Bước 4: Sau khi SV đã thu thập đủ nội dung cần thiết, giảng viên hướng dẫn các em chấp nối các sản phẩm đã tìm kiếm và khai thác được trình bày thành một chuyên đề.

Bước 5: Giảng viên cùng SV rà soát lại các sai sót để được chuyên đề hoàn chỉnh.

Có thể trình bày chuyên đề theo cấu trúc sau:

A- Tóm tắt lý thuyết về đạo hàm

B- Một số bài tập ứng dụng đạo hàm

1. Tính giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số

Trong [2] đã có khái niệm về cực trị hàm số, cách tìm cực trị của hàm số trên một khoảng. *Vấn đề đặt ra*: Tìm giá trị lớn (nhỏ) nhất của hàm số $f(x)$ trên đoạn $[a,b]$.

Cách tìm:

- Tìm cực trị của hàm số trên (a,b) ;

- Tính $f(a), f(b)$;

- So sánh $f(a), f(b)$ các giá trị cực trị của $f(x)$ trên (a,b) từ đó suy ra giá trị lớn

nhất, nhỏ nhất của $f(x)$ trên $[a,b]$.

Bài toán 1: Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số

$$f(x) = x^3 - 3x + 5 \text{ trên } [0,2].$$

Hướng dẫn giải: $f(x)$ liên tục trên $[0,2]$. $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1)$.

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1; x = -1.$$

$$x = 1 \in (0;2).$$

$$f(0) = 5; f(1) = 3; f(2) = 7.$$

vậy:

$$\min_{x \in [0;2]} f(x) = f(1) = 3, \max_{x \in [0;2]} f(x) = f(2) = 7$$

Bài toán 2: Tìm giá trị lớn nhất và nhỏ nhất của hàm số: $y = \sqrt{5-4x}$ trên đoạn $[-1,1]$.

Hướng dẫn giải: TXĐ: $x \leq \frac{5}{4}$.

Suy ra hàm số xác định $\forall x \in [-1;1]$.

Hàm $f(x)$ liên tục trên đoạn $[-1;1]$.

Ta có

$$f'(x) = \frac{-2}{\sqrt{5-4x}} < 0 \quad \forall x \in [-1;1].$$

Do đó

$$\min_{x \in [-1;1]} f(x) = f(1) = 1, \max_{x \in [-1;1]} f(x) = f(-1) = 3$$

2. Chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức

a) Hàm số có đạo hàm bằng 0

GV gợi ý cho SV; Trong [2] đã có: Hàm số có đạo hàm dương thì đơn điệu tăng, có đạo hàm âm thì đơn điệu giảm. Như vậy hàm số có đạo hàm bằng 0 thì sao? Và rõ ràng: Nếu một hàm số không đổi trong khoảng (a, b) thì đạo hàm luôn triệt tiêu trong khoảng đó. Đảo lại ta có định lý sau:

Nếu hàm số $y=f(x)$ có đạo hàm trong khoảng (a, b) và $f'(x)=0$, với mọi $\forall x \in (a, b)$ thì hàm số $y=f(x)$ không đổi trong khoảng (a, b) .

Dựa vào định lý đơn giản này, ta có thể áp dụng để chứng minh đẳng thức.

Bài toán: Chứng minh $A(x) = C$ hằng số với $x \in D$

Phương pháp chung: Ta thực hiện theo các bước sau:

Bước 1 : Tính $A'(x)$, rồi khẳng định $A'(x) = 0$, với $x \in D$.

Bước 2 : Chọn $x_0 \in D \Rightarrow A(x_0) = C$

Bài toán 3: Chứng minh rằng với mọi x ta đều có:

$$\begin{aligned} & \cos^2(x-a) + \sin^2(x-b) - \\ & 2\cos(x-a)\sin(x-b)\sin(a-b) \\ & = \cos^2(a-b) \end{aligned}$$

Hướng dẫn giải:

Xét hàm số:

$$\begin{aligned} y &= \cos^2(x-a) + \sin^2(x-b) - \\ & 2\cos(x-a)\sin(x-b)\sin(a-b) \end{aligned}$$

Ta có:

$$\begin{aligned} y' &= -2\sin(x-a)\cos(x-a) + 2\sin(x-b)\cos(x-b) \\ &+ 2\sin(a-b)[\sin(x-a)\sin(x-b) - \cos(x-a)\cos(x-b)] \\ &= -\sin 2(x-a) + \sin 2(x-b) - 2\sin(a-b)\cos(2x-a-b) \\ &= 2\cos(2x-a-b)\sin(a-b) - 2\sin(a-b)\cos(2x-a-b) = 0. \end{aligned}$$

Vậy hàm số không đổi. Ngoài ra ta còn

$$\text{có } y = y(b) = \cos^2(a-b).$$

$$\text{Vậy } y = \cos^2(a-b)$$

Chú ý: Ta có thể phát biểu bài toán trên dưới dạng: "Chứng minh rằng:

$$\begin{aligned} A &= \cos^2(x-a) + \sin^2(x-b) - \\ & 2\cos(x-a)\sin(x-b)\sin(a-b) \end{aligned}$$

độc lập với x ".

b) Sử dụng tính đơn điệu của hàm số

GV gợi ý cho SV có thể sử dụng tính đơn điệu của hàm số để chứng minh bất đẳng thức.

Dạng 1) Trong một số bài toán, ta sử dụng đạo hàm để xét tính đơn điệu của hàm số ta có:

- $f'(x)$ đồng biến trên $[a, b]$ thì $f(x) > f(a)$ với mọi $x > a$.
- $f'(x)$ nghịch biến trên $[a, b]$ thì $f(x) < f(b)$ với mọi $x < b$.

Bài toán 4:

Chứng minh rằng với mọi $x > 0$ ta có:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x.$$

Hướng dẫn giải:

Chứng minh: $\sin x < x \quad \forall x > 0$.

Đặt $f(x) = x - \sin x$ với $x \in [0; +\infty)$.

$$f'(x) = 1 - \cos x > 0 \quad \forall x > 0.$$

Hàm số đồng biến với $x \in [0; +\infty)$.

Suy ra $f(x) > f(0)$ với $x > 0$.

Hay $\sin x < x \quad \forall x > 0$

$$\text{Chứng minh } x - \frac{x^3}{6} < \sin x \quad \forall x > 0$$

làm tương tự với đạo hàm bậc 2.

Bài toán 5: Chứng minh rằng với mọi x thuộc đoạn $[0, 1]$ ta luôn có:

$$1 - x \leq e^{-x} \leq 1 - x + \frac{x^2}{2}$$

Dạng 2) Để chứng minh bất đẳng thức $f(x) > g(x)$ ta thực hiện như sau:

+ Xét hàm số $h(x) = f(x) - g(x)$.
 + Tìm miền xác định của $h(x)$.
 + Tính đạo hàm cấp một, giải phương trình $h'(x) = 0$. Tìm nghiệm.

+ Lập bảng biến thiên. Từ bảng biến thiên suy ra bất đẳng thức cần chứng minh.

Các trường hợp:

+ Chứng minh $f(x) \geq A$ (nghĩa là chứng minh $\min f(x) \geq A$), ở đây A là hằng số.

+ Chứng minh $f(x) \leq A$ (nghĩa là chứng minh $\max f(x) \leq A$), ở đây A là hằng số.

+ Nếu phương trình $h'(x) = 0$ không giải được thì ta tính đạo hàm cấp hai, cấp ba đến khi nào xét dấu được thì ta dừng.

Bài toán 6: Chứng minh bất đẳng thức:

$$\arctan x - \ln(1+x^2) \geq \ln 2 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Hướng dẫn giải:

Bất đẳng thức cần chứng minh tương đương với:

$$\arctan x - \ln(1+x^2) \geq \frac{\pi}{4} - \ln 2 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Xét hàm số:

$$f(x) = \arctan x - \ln(1+x^2) \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{1-2x}{1+x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$

Lập bảng biến thiên và từ đó suy ra:

$$f(x) \geq \frac{\pi}{4} - \ln 2 \quad \forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]. \text{ Hay}$$

$$\arctan x - \ln(1+x^2) \geq \frac{\pi}{4} - \ln 2$$

$$\forall x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$$

Đó là điều phải chứng minh.

c) Sử dụng định lý Rolle, định lý Lagrange

Định lý Rolle và định lý Lagrange là hai định lý cơ bản của đạo hàm và có nhiều ứng dụng thiết thực. Khi dạy, GV có thể giúp SV sử dụng định lý Rolle, định lý Lagrange để chứng minh đẳng thức, bất đẳng thức.

Định lý Rolle: Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trong (a, b) , $f(a) = f(b)$. Khi đó tồn tại ít nhất 1 điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Định lý Lagrange: Giả sử hàm $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trong (a, b) . Khi đó tồn tại ít nhất 1 điểm $c \in (a, b)$ sao cho $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Nhận xét: Định lý Rolle chỉ là trường hợp riêng của định lý Lagrange trong trường hợp $f(a) = f(b)$.

Bài toán 7: Chứng minh rằng với 2 số thực a, b bất kỳ ta luôn có:

$$|\arctan b - \arctan a| \leq |b - a|$$

Hướng dẫn giải:

- Nếu $a = b$ thì đẳng thức xảy ra.

- Nếu $a \neq b$, do vai trò của a và b như nhau, nên ta giả sử $a < b$.

- Xét hàm $f(x) = \arctan x$, rõ ràng $f(x)$ liên tục trên $[a, b]$, và ta có:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad \forall x \in [a, b]$$

Theo định lý Lagrange, tồn tại

$c \in (a, b)$ sao cho

$$f(b) - f(a) = f'(c) (b - a)$$

Suy ra

$$|\arctan b - \arctan a| = \left| \frac{1}{1+c^2} \right| |b-a| \leq |b-a|.$$

Đó là điều phải chứng minh.

Bài toán 8: [2, tr.139]. Giả sử hàm $f(x)$ khả vi trên $[0,1]$,

$$f'(0) = 1, f'(1) = 0.$$

Chứng minh rằng có $c \in (0,1)$

để $f'(c) = c$. *Hướng dẫn giải:*

$$\text{Xét hàm } g(x) = f(x) - \frac{x^2}{2}.$$

$$\text{Khi đó } g'(x) = f'(x) - x.$$

$$\text{Đặc biệt } g'(0) = 1, g'(1) = -1.$$

Vậy hàm $g(x)$ không đạt cực đại trên $[0,1]$ tại các điểm đầu mút của $[0,1]$. Do đó nó đạt cực đại tại $c \in (0,1)$.

$$\text{Vậy } g'(c) = 0, \text{ suy ra } f'(c) = c.$$

3) *Giải phương trình, bất phương trình*

Có nhiều phương pháp giải phương trình, bất phương trình. Khi học về đạo hàm, GV có thể giúp SV sử dụng đạo hàm để giải phương trình, bất phương trình.

a) *Sử dụng tính đơn điệu của hàm số*

Định lý: Nếu $y = f(x)$ là một hàm liên tục và đồng biến, $g(x)$ liên tục nghịch biến trên (α, β) . Khi đó ba phương trình $f(x) = a$ hoặc $g(x) = b$ hoặc $f(x) = g(x)$ có nhiều nhất là một nghiệm.

Chứng minh: Ta chứng minh cho phương trình $f(x) = a$.

Giả sử có $x_0 \in (\alpha, \beta)$ thỏa mãn:

$$f(x) = a.$$

- Nếu $x > x_0$ thì $f(x) > f(x_0) = a$ phương trình không có nghiệm khi $x > x_0$.

- Nếu $x < x_0$ thì $f(x) < f(x_0) = a$ phương trình không có nghiệm khi $x < x_0$.

Vậy phương trình $f(x) = a$ có nhiều nhất là một nghiệm $x = x_0$.

Việc chứng minh cho hai phương trình còn lại là tương tự.

Bài toán 9: Giải phương trình:

$$\sqrt{x} + \sqrt{x-5} + \sqrt{x+7} + \sqrt{x+16} = 14$$

Hướng dẫn giải: Tập xác định: $x \geq 5$.

Đặt

$$f(x) = \sqrt{x} + \sqrt{x-5} + \sqrt{x+7} + \sqrt{x+16}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-5}} + \frac{1}{2\sqrt{x+7}} + \frac{1}{2\sqrt{x+16}} > 0$$

, với mọi $x > 5$.

Hàm $f(x)$ đồng biến với $x \in [5, +\infty)$.

Mặt khác ta thấy $f(9) = 14$. Vậy phương trình đã cho có một nghiệm $x = 9$.

Bài toán 10: Giải bất phương trình:

$$\sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} - \sqrt{4-x} > 3$$

Hướng dẫn giải:

$$\text{TXĐ: } D = [2, 4].$$

Xét hàm số:

$$f(x) = \sqrt{x+6} + \sqrt{x-2} - \sqrt{4-x}$$

với $x \in D$.

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+6}} + \frac{1}{2\sqrt{x-2}} + \frac{1}{2\sqrt{4-x}} > 0$$

$$\forall x \in (2; 4).$$

Suy ra hàm số đồng biến trên D. Lại có $f(3) = 3$, do đó bất phương trình có nghiệm x thì $x \in (3, +\infty)$. Vậy tập nghiệm là: $T = [2; 4] \cap (3, +\infty) = (3; 4]$.

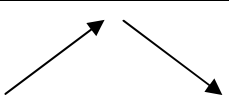
b) Sử dụng định lý Rolle, định lý Lagrange

Từ định lý Rolle ta có:

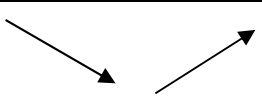
Nếu hàm $f(x)$ có $f'(x) = 0$ có nghiệm duy nhất thì phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Thật vậy, $f'(x_0) = 0$ có nghiệm là x_0 thì có hai khả năng $f'(x_0)$ đổi dấu khi qua x_0 hoặc $f'(x_0)$ không đổi dấu khi qua x_0 .

Khả năng 1:

x	x_0
$f'(x)$	+ 0 -
$f(x)$	

Khả năng 2:

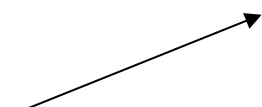
x	x_0
$f'(x)$	- 0 -
$f(x)$	

Với khả năng 1 xảy ra thì phương trình $f(x) = 0$ có tối đa hai nghiệm. Với khả

năng 2 xảy ra thì phương trình $f(x) = 0$ luôn có một nghiệm.

Kết luận chung: $f'(x_0) = 0$ có nghiệm duy nhất thì $f(x) = 0$ có nhiều nhất là hai nghiệm.

Bài toán 11: Giải phương trình:

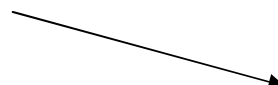
x	x_0
$f'(x)$	- 0 +
$f(x)$	

$$2^x + 3^x = 3x + 2. \quad (*)$$

Hướng dẫn giải:

Phương trình

$$(*) \Leftrightarrow 2^x + 3^x - 3x - 2 = 0, \text{ Ta có:}$$

x	x_0
$f'(x)$	+ 0 +
$f(x)$	

$$f'(x) = 2^x \ln 2 + 3^x \ln 3 - 3,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -3, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +\infty,$$

$$f''(x) = 2^x (\ln 2)^2 + 3^x (\ln 3)^2 > 0, \quad \forall x$$

Nên phương trình $f'(x) = 0$ có đúng một nghiệm. Suy ra phương trình $f(x) = 0$ có nhiều nhất 2 nghiệm, mà $f(0) = f(1) = 0$, nên $x = 0$; $x = 1$ là hai nghiệm của phương trình. Vậy phương trình $(*)$ có hai nghiệm $x = 0$; $x = 1$.

* Có thể còn tiếp tục các ứng dụng khác của đạo hàm...

3. KẾT LUẬN

Trong quá trình dạy học, bằng việc khai thác, phát triển lý thuyết cũng như các bài tập ngay trong một học phần hay các học phần với nhau; giảng viên có thể giúp SV củng cố, bổ sung, mở rộng kiến thức khoa học chuyên ngành, rèn luyện kỹ năng phát hiện và thực hiện đề tài góp phần phát triển năng lực NCKH; đáp ứng yêu cầu đổi mới toàn diện giáo dục đại học hiện nay.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Vũ Cao Đàm (2019), *Giáo trình phương pháp luận nghiên cứu khoa học*, Nxb Giáo dục Việt Nam.
2. Nguyễn Văn Khuê (chủ biên), Phạm Ngọc Thao, Lê Mậu Hải, Nguyễn Đình Sang (2017), *Toán cao cấp, tập 1 (Giải tích một biến)*, Nxb Giáo dục.
3. Nguyễn Giác Trí, Huỳnh Quốc Tuấn, Lê Thị Loan, Phạm Ánh Tuyết (2018), “Một số vấn đề về nâng cao năng lực nghiên cứu khoa học của sinh viên khoa Kinh tế và Quản trị kinh doanh, trường đại học Đồng Tháp”, *Tạp chí Giáo dục*, Số đặc biệt Kỳ 1 tháng 5/2018, tr.121-125.