

NGHIÊN CỨU CÔNG THỨC ĐIỆN THẾ VÔ HƯỚNG ĐỂ TÍNH TOÁN SỰ PHÂN BỐ CỦA ĐIỆN THẾ VÀ DÒNG ĐIỆN TRONG VẬT DẪN BẰNG KỸ THUẬT PHẦN TỬ HỮU HẠN

STUDYING ELECTRIC SCALAR POTENTIAL FORMULATIONS FOR COMPUTING ELECTRIC POTENTIAL AND CURRENT DISTRIBUTION IN CONDUCTING MATERIALS BY A FINITE ELEMENT APPROACH

Đặng Quốc Vương¹, Nguyễn Đức Quang²

¹Trường Đại học Bách Khoa Hà Nội, ²Trường Đại học Điện lực

Ngày nhận bài: 11/07/2020, Ngày chấp nhận đăng: 24/08/2020, Phản biện: TS. Vũ Thị Thu Nga

Tóm tắt:

Tính toán và mô phỏng bài toán điện từ ngày càng có vai trò quan trọng đối với các nhà nghiên cứu, chế tạo và vận hành thiết bị điện - điện tử. Do đó, việc nghiên cứu, tính toán và phân tích bài toán điện từ nói chung và bài toán điện động nói riêng luôn là chủ đề mang tính thời sự. Nội dung bài báo này phát triển công thức điện thế vô hướng để phân tích, tính toán và mô phỏng sự phân bố của vectơ điện thế, vectơ dòng điện trong vật liệu dẫn từ và dẫn điện bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Sự phát triển của phương pháp được kiểm nghiệm và áp dụng vào bài toán thực tiễn.

Từ khóa:

công thức điện động, điện thế vô hướng, mật độ dòng điện, phương pháp phần tử hữu hạn.

Abstract:

Computing and simulating electromagnetic problems play an increasingly important role for researchers, manufacturers and operators of electrical-electronic equipments. Hence, studying, computing and analyzing electromagnetic problems in general and electrokinetic problems in particular are always a matter of concern and topicality for researchers and designers in Viet Nam as well as all over the world. This journal develops electrokinetic formulations to analyse, compute and simulate the distribution of electric scalar potentials and electric currents in conducting materials by a finite element approach. The development of the method is illustrated and validated on a practical problem.

Keywords:

electrokinetic formulations, electric scalar potential, electric current density, finite element approach.

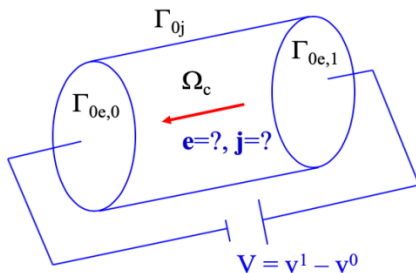
1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Ngày nay, trong quá thiết kế, chế tạo các thiết bị điện, việc tối ưu hoá chi phí luôn là một trong những vấn đề quan trọng và không thể thiếu đối với các nhà nghiên cứu, thiết kế và chế tạo trong và ngoài

nước. Cùng với sự phát triển của khoa học máy tính và các phương pháp nghiên cứu mới, việc áp dụng các công cụ mô phỏng số để giải bài toán điện từ nói chung và bài toán điện động nói riêng luôn được ưu tiên và quan tâm với độ chính xác cao,

đặc biệt khi gặp bài toán có cấu trúc hình học lớn và phức tạp.

Để giải được bài toán điện động nói trên, những năm gần đây, nhiều nhà nghiên cứu áp dụng các phương pháp số như: phần tử hữu hạn, phương pháp sai phân hữu hạn, phương pháp lai tích phân. Trong đó, phương pháp phần tử hữu hạn là một trong những phương pháp phổ biến nhất để tính toán, phân tích và mô phỏng các hiện tượng điện từ xảy ra trong các thiết bị điện - điện tử [1, 2]. Ưu điểm của phương pháp là giải được bài toán có cấu trúc hình học khác nhau, kích thước ma trận lớn với số bậc tự do có thể lên tới chục nghìn và kết quả cho độ chính xác cao.



Hình 1. Mô hình bài toán điện động

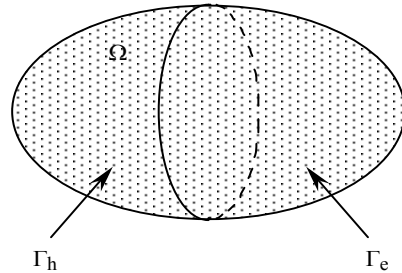
Trong bài báo này, phương pháp phần tử hữu hạn được phát triển với công thức điện thế vô hướng để tính toán sự phân bố vectơ điện thế và vectơ dòng điện trong vật liệu dẫn từ và dẫn điện (Ω_c) như ở hình 1. Sự phát triển của phương pháp sẽ được minh họa và kiểm chứng thông qua bài toán thực tế.

2. BÀI TOÁN ĐIỆN TỪ

2.1. Phương trình Maxwell

Mô hình bài toán điện động được xác định trong miền nghiên cứu Ω , với biên

$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_j$ trong không gian Eculidean $\mathcal{R}^3$ (hình 2).



Hình 2. Miền nghiên cứu Ω và biên $\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_e \cup \Gamma_j$

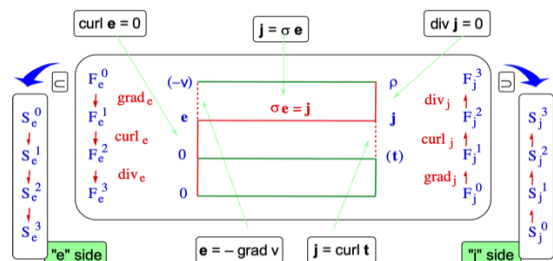
Hệ phương trình Maxwell cùng với các luật trạng thái và các điều kiện biên được viết trong không gian ba chiều Eculidean $\mathcal{R}^3$ [3]-[9] là:

$$\text{curl } \mathbf{e} = 0, \quad \text{div } \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{e}. \quad (1a-b-c)$$

- Các điều kiện biên:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|_{\Gamma_j} = 0, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{e}|_{\Gamma_e} = 0, \quad (2a-b)$$

trong đó e là cường độ điện trường (V/m), σ là độ dẫn điện (S/m); j là mật độ dòng điện được xác định trong miền dẫn từ Ω_c ($\Omega_c \subset \Omega$) và n là vectơ pháp tuyến đơn vị có hướng từ trong ra ngoài của miền Ω .



Hình 3. Sơ đồ Tonti của bài toán điện động [4]

Nghiệm của phương trình Maxwell tìm được khi phương trình (1a) và (1b) được giải kết hợp trạng thái vật liệu (1c) và hai điều kiện biên kể đến thành phần tiếp tuyến và thành phần pháp tuyến được cho

trong (2 a) và (2 b).

Đối với bài toán điện động, các trường $\mathbf{e}, \mathbf{j}$ sẽ được xác định và kiểm chứng rằng buộc thỏa mãn sơ đồ Tonti [4] (hình 3). Điều đó có nghĩa rằng $\mathbf{e} \in \mathbf{F}_e(\text{curl}; \Omega)$ (cạnh bên trái), $\mathbf{j} \in \mathbf{F}_j(\text{div}; \Omega)$ (cạnh bên phải). Trong đó $\mathbf{F}_e(\text{curl}; \Omega)$ và $\mathbf{F}_j(\text{div}; \Omega)$ là các không gian hàm chứa các điều kiện biên và các trường tồn tại trên các biên Γ_j và Γ_e của miền nghiên cứu Ω . Do đó, phương trình rời rạc của bài toán điện động sẽ được xác định theo sườn bên trái và bên phải của sơ đồ Tonti (hình 3).

2.2. Phương trình rời rạc

Từ hệ phương trình Maxwell (1a-b) và luật trạng thái (1c) ở mục 2.1, phương trình rời rạc được thiết lập dựa trên cơ sở của công thức Green [3]. Thực vậy, áp dụng công thức Green với mô hình grad-div trong miền nghiên cứu Ω cho trường $\mathbf{j}$ và hàm thử vô hướng v' , ta có [4]:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{j} \cdot \text{grad } v') d\Omega + \int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{j} \cdot v') d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) v' d\Gamma, \forall v' \in \mathbf{F}_e^0(\Omega), \quad (4)$$

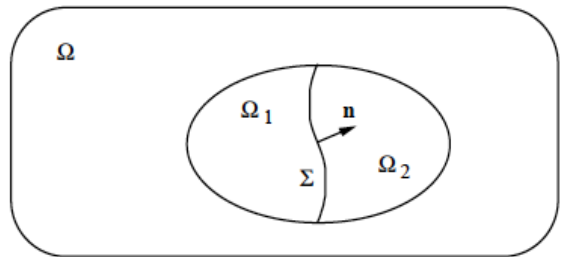
trong đó, $\mathbf{F}_e^0(\Omega)$ là không gian hàm của hàm dạng và hàm thử gian hàm v' . Thành phần pháp tuyến của mật độ dòng điện $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}$ trong (4) được xác định theo điều kiện biên (2a). Thành phần tích phân thứ hai của phương trình (4) được cho trong (1b), do đó phương trình (4) được viết lại như sau [4]:

$$\int_{\Omega} (\mathbf{j} \cdot \text{grad } v') d\Omega = 0, \quad \forall v' \in \mathbf{F}_e^0(\Omega). \quad (5)$$

Từ phương trình (5), tiếp tục áp dụng công thức Green với grad-div, ta có:

$$\int_{\Omega} (\text{div } \mathbf{j} \cdot v') d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) v' d\Gamma = 0, \quad \forall v' \in \mathbf{F}_e^0(\Omega). \quad (6)$$

Phương trình (6) thỏa mãn tất cả các hàm thử thuộc không gian hàm $\mathbf{F}_e^0(\Omega)$. Trường hợp khi kể đến điều kiện chuyển tiếp xuất hiện của các bề mặt trong miền nghiên cứu Ω , khi đó miền Ω bao gồm hai miền nhỏ Ω_1 và Ω_2 và được ngăn cách bởi giao diện Σ (hình 4).



Hình 4. Giao diện bề mặt giữa hai miền nhỏ Ω_1 và Ω_2

Một cách tương tự, áp dụng công thức Green cho các trường $\mathbf{j}$ và v' cho miền Ω_1 và Ω_2 , ta có:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} (\mathbf{j} \cdot \text{grad } v') d\Omega_1 \cup \Omega_2 &= \int_{\Sigma} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2) v' d\Sigma \\ &+ \int_{\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) v' d\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2), \end{aligned} \quad \forall v' \in \mathbf{F}_e^0(\Omega), \quad (7)$$

trong đó $\mathbf{j}_1$ and $\mathbf{j}_2$ mô tả sự có mặt của trường $\mathbf{j}$ trên cả hai biên của giao diện Σ . Hàm thử v' lúc này được xác định trong miền $\Omega_1 \cup \Omega_2$ và bằng không trên biên $\partial(\Omega_1 \cup \Omega_2)$. Thành phần pháp tuyến của

các trường $\mathbf{j}_1$ and $\mathbf{j}_2$ trên giao Σ cũng được xác định bằng không, đó là: $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}_1 - \mathbf{j}_2)\mathbf{v}' = 0$.

Bằng cách kết hợp giữa phương trình (5) và luật trạng thái được ở phương trình (1c), với đại lượng điện thế vô hướng $v \in F_e^0(\Omega)$, phương trình (5) được viết lại như sau:

$$\int_{\Omega} (\sigma \text{grad } v \cdot \text{grad } v') d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}) v' d\Gamma = 0, \forall v' \in F_e^0(\Omega). \quad (8)$$

Điện thế v trong phương trình (8) là đại lượng chưa biết và cần phải xác định với điều kiện biên, đó là: $v|_{\Gamma_e} = \text{constant}$. Thông thường, điều kiện biên xuất hiện thông qua đại lượng tích phân trong phương trình rời rạc (4), (7) và có kể đến (2a) được gọi là điều kiện biên “Neuman condition”, trong khi đó điều kiện biên được mô tả và xác định trong không gian hàm $F_e^0(\Omega)$ như $v|_{\Gamma_e} = \text{constant}$ được gọi là điều kiện “Dirichlet condition”. Đây cũng được xem là điều kiện của bài toán được đặt vào để giải phương trình (8). Do đó, đại lượng tích phân thứ hai của phương trình (8) được phân tích như sau: $\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}|_{\Gamma_j} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_s|_{\Gamma_j}$, trong đó $\mathbf{j}_s$ có thể được xem như là một đại lượng được đặt vào thông qua biên của miền nghiên cứu Ω . Phương trình (8) được viết lại như sau [4]:

$$\int_{\Omega} (\sigma \text{grad } v \cdot \text{grad } v') d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_s) v' d\Gamma = 0, \forall v' \in F_e^0(\Omega). \quad (9)$$

2.3. Rời rạc hoá của trường h

Điện thế vô hướng trong phương trình

(9) được rời rạc hoá theo các phần tử nút, với không gian hàm được xác định trong lưới của miền nghiên cứu Ω , đó là:

$$v = \sum_{n \in N} v_n s_n, v \in S_e^0(\Omega), \quad (10)$$

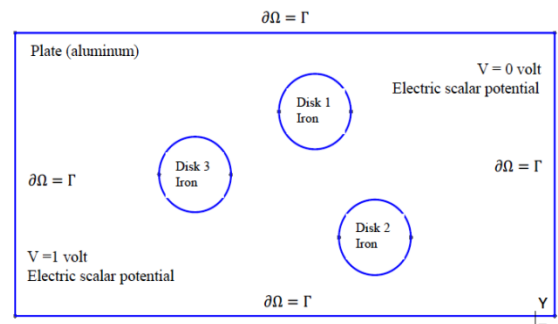
trong đó N là tập hợp các nút của miền Ω , s_n là hàm nội suy nút được kết hợp với nút n và v_n là giá trị của v tại nút n .

Thay phương trình (10) vào phương trình (9), phương trình (9) được viết lại như sau:

$$\int_{\Omega} \left(\sigma \text{grad } \sum_{n \in N} v_n s_n \cdot \text{grad } v' \right) d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{j}_s) v' d\Gamma = 0, \forall v' \in F_e^0(\Omega). \quad (11)$$

3. BÀI TOÁN ÁP DỤNG

Xét một bài toán điện động có cấu trúc hình học 2-D được cho như hình 5. Mô hình gồm một tấm kim loại được làm bằng vật liệu nhôm có độ dẫn điện $\sigma_{al} = 2.54 \times 10^7 \text{ S/m}$ và 3 đĩa (disk 1, disk 2, disk 3) bằng vật liệu sắt từ $\sigma_{iron} = 1 \times 10^6 \text{ S/m}$. Điện thế đặt vào cạnh bên trái của tấm chắn 1 vôn và cạnh bên phải là 1 vôn.

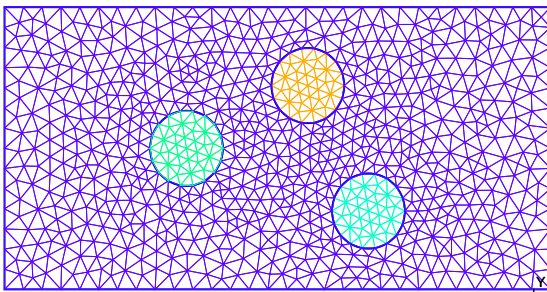


Hình 5. Mô hình hình học 2D với tấm phẳng và đĩa từ

Bài toán được giải với hai kịch bản khác nhau:

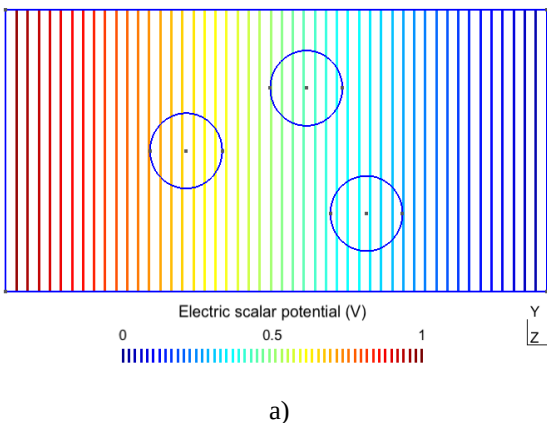
- Khi tấm phẳng và các đĩa kim loại có cùng đặc tính vật liệu là nhôm;
- Khi tấm phẳng là vật liệu nhôm và các đĩa kim loại là vật liệu sắt từ.

Mô hình chia lưới 2-D với các phần tử lưới tam giác được mô tả trong hình 6.

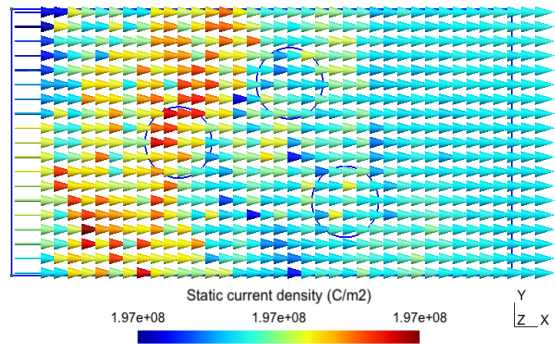


Hình 6. Mô hình chia lưới 2D

Trường hợp thứ nhất: Khi cùng đặc tính vật liệu, sự phân bố của vector điện thế vô hướng và dòng điện tĩnh trong tấm phẳng và đĩa kim loại được mô tả trong hình 7. Nhận thấy rằng khi đặc tính vật liệu giống nhau, phân bố của điện thế vô hướng (hình 7a) và dòng điện tĩnh (hình 7b) là các trường được phân bố đều và có giá trị giống nhau tại mọi điểm từ trái qua phải và từ trên xuống dưới.

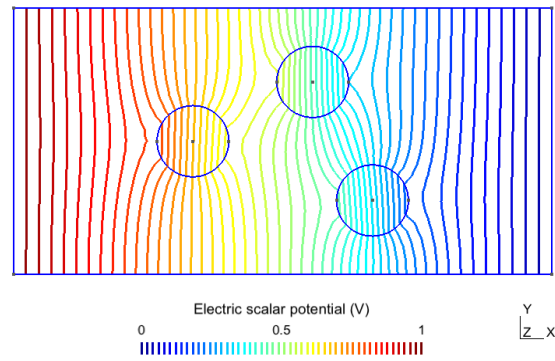


a)

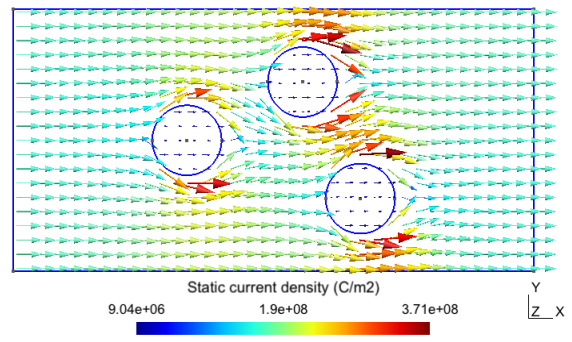


b)

Hình 7. Sự phân bố của điện thế vô hướng (a) và dòng điện (b) khi tấm phẳng và đĩa kim loại có cùng đặc tính vật liệu $\sigma_{al} = 2.54 \times 10^7 \text{ S/m}$



a)

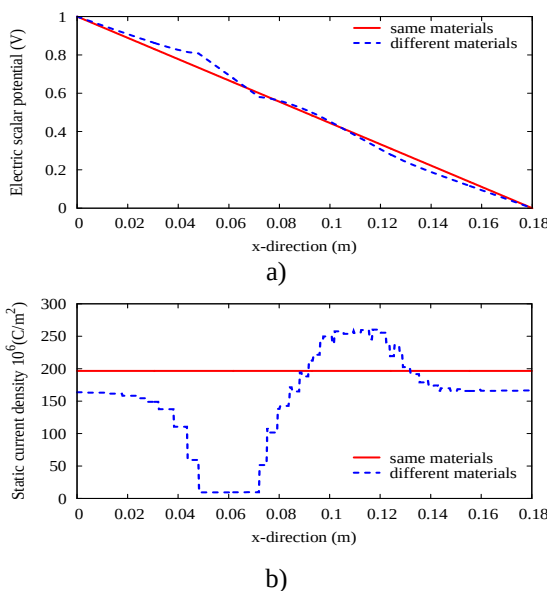


b)

Hình 8. Sự phân bố của điện thế vô hướng (a) và dòng điện (b) khi tấm phẳng và đĩa kim loại có đặc tính vật liệu khác nhau: $\sigma_{al} = 2.54 \times 10^7 \text{ S/m}$; $\sigma_{iron} = 1 \times 10^6 \text{ S/m}$

Trường hợp thứ 2: khi đặc tính vật liệu khác nhau, sự phân bố của vector điện thế vô hướng và dòng điện tĩnh trong tấm phẳng và đĩa kim loại được mô tả trong

hình 8. Ở vùng có độ dẫn điện nhỏ (như ở trong các đĩa kim loại), điện thế (hình 8a) tập trung ít hơn so với vùng thuộc tấm phẳng (bên ngoài đĩa kim loại). Tương tự đối với sự phân bố của dòng điện tĩnh (hình 8b), dòng điện hầu như tập trung ở vùng có độ dẫn điện cao (tấm phẳng) và phân bố thấp ở vùng trong của các đĩa kim loại.



Hình 9. Sự phân bố của điện thế vô hướng (a) và của dòng điện tĩnh (b) dọc theo tấm chắn từ trái qua phải với hai trường hợp khác nhau của đặc tính vật liệu

Đặc biệt ở gần khu vực xung quanh đĩa kim loại, giá trị của dòng điện sẽ thay đổi mạnh và có xu hướng tập trung ở vùng có độ dẫn điện cao, vì bên trong đĩa kim loại

giá trị của mật độ dòng điện thấp hơn so với mật độ dòng điện của tấm phẳng.

Giá trị của điện thế vô hướng và dòng điện tĩnh dọc theo tấm phẳng và đĩa kim loại từ trái qua phải với hai trường hợp khác nhau của đặc tính vật liệu được biểu diễn trong hình 9. Giá trị điện của điện thế vô hướng (hình 9a) sẽ giảm dần từ trái qua phải cho cả hai trường hợp cùng và khác đặc tính vật liệu. Trong khi đó, sự phân bố của dòng điện tĩnh không đối đối với trường hợp cùng đặc tính vật liệu và thay đổi khi đặc tính vật liệu khác nhau.

4. KẾT LUẬN

Bài báo đã phát triển thành công công thức từ thế vô hướng với phương pháp phần tử hữu hạn để phân tích, mô phỏng, và tính toán sự phân bố điện thế vô hướng, dòng điện tĩnh trong vật liệu dẫn từ với hai trường hợp khác nhau (cùng và khác đặc tính). Sự phát triển của phương pháp đã được áp dụng và minh họa vào bài toán thực tế bao gồm tấm phẳng và đĩa từ như mô tả ở hình 5. Các kết quả đạt được từ mô phỏng lý thuyết là cơ sở để giúp cho các nhà nghiên cứu và chế tạo có bức tranh về sự phân bố của điện thế vô hướng và dòng điện tĩnh khi nghiên cứu về bài toán điện động với cấu trúc hình học có đặc tính vật liệu giống và khác nhau.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] S. Koruglu, P. Sergeant, R.V. Sabarieqo, Vuong. Q. Dang, M. De Wulf "Influence of contact resistance on shielding efficiency of shielding gutters for high-voltage cables," IET Electric Power Applications, Vol.5, No.9, (2011), pp. 715-720.
- [2] G. Meurier "The finite element method for electromagnetic modeling", Willey, 2008.

- [3] Dang Quoc Vuong and Nguyen Duc Quang, "Coupling of Local and Global Quantities by A Subproblem Finite Element Method – Application to Thin Region Models," ISSN 1859-2171 – Advances in Science, Technology and Engineering Systems Journal (ASTESJ), Vol 4, no.2, 40-44 (2019).
- [4] R.V. Sabariego, "The Fast Multipole Method for Electromagnetic Field Computation in Numerical and Physical Hybrid System," Ph. D thesis, 2006, University of Liege, Belgium.
- [5] Vuong Q. Dang, R.V. Sabariego, L. Krähenbühl, C. Geuzaine, "Subproblem Approach for Modeling Multiply Connected Thin Regions with an h-Conformal Magnetodynamic Finite Element Formulation," in EPJ AP (Vol. 63, No.1 (2013)).
- [6] P. Dular, R.V. Sabariego, M.V. Ferreira de Luz, P. Kuo-Peng and L. Krahenbuhl " Perturbation Finite Element Method for Magnetic Circuits", IET Sci. Meas. Technol., 2008, Vol. 2, No.6, pp.440-446.
- [7] P. Dular, Vuong Q. Dang, R.V. Sabariego, L. Krähenbühl and C. Geuzaine, "Correction of thin shell finite element magnetic models via a subproblem method," IEEE Trans. Magn., Vol. 47, No. 5, pp. 158 –1161, 2011.
- [8] Patrick Dular, Ruth V. Sabariego, Mauricio V. Ferreira de Luz, Patrick Kuo-Peng and Laurent Krahenbuhl "Perturbation Finite Element Method for Magnetic Model Refinement of – Air Gaps and Leakage Fluxes, Vol 45, No.3, 1400-1404, 2009.
- [9] Vuong Dang Quoc and Christophe Geuzaine "Using edge elements for modeling of 3-D Magnetodynamic Problem via a Subproblem Method", Sci. Tech. Dev. J. ; 23(1) :439-445

Giới thiệu tác giả:



Tác giả Đặng Quốc Vương nhận bằng Tiến sĩ chuyên ngành kỹ thuật điện năm 2013 tại Đại học Liege, vương quốc Bỉ. Hiện tại tác giả là Giám đốc Trung tâm TCEE, giảng viên Viện Điện, Trường Đại học Bách khoa Hà Nội.

Lĩnh vực nghiên cứu: mô hình hóa hệ thống điện từ sử dụng mô hình các bài toán nhỏ - ứng dụng tới các thiết bị điện từ có cấu trúc mỏng (vỏ máy biến áp, tủ điện cao trung thế, màn chắn điện từ, lá thép kỹ thuật điện...); ứng dụng phương pháp số (phương pháp phần tử hữu hạn, phương pháp sai phân hữu hạn và phương pháp phần tử biên) tính toán ảnh hưởng của điện từ trường đến thiết bị điều khiển trong hệ thống điện; ứng dụng "subproblem method" tính toán thiết kế tối ưu hóa vật liệu trong thiết bị điện.



Tác giả Nguyễn Đức Quang nhận bằng Tiến sĩ chuyên ngành kỹ thuật điện 2013 tại Đại học Ecole Nationale Supérieure d'Arts et Métiers ParisTech, Pháp. Hiện nay tác giả đang là giảng viên Khoa Kỹ thuật điện, Trường Đại học Điện lực.

Lĩnh vực nghiên cứu: mô hình hóa hệ thống điện từ, ứng dụng các phương pháp số (phương pháp phần tử hữu hạn và phương pháp tích phân hữu hạn) trong nghiên cứu máy điện và hệ thống điện, tác động của điện từ trường tương hỗ và tiết kiệm năng lượng trong thiết bị điện.

