# PHÂN TÍCH TĨNH VỎ TRỤ FG-CNTRC CHỊU TẢI TRỌNG CƠ NHIỆT VỚI TÍNH CHẤT VẬT LIỆU PHỤ THUỘC VÀO NHIỆT ĐỘ

Dương Văn Quang<sup>1,\*</sup>, Trần Ngọc Đoàn<sup>1</sup>, Đoàn Trắc Luật<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Khoa Hàng không vũ trụ, Trường Đại học Kỹ thuật Lê Quý Đôn
<sup>2</sup>Khoa Cơ khí, Trường Đại học Kỹ thuật Lê Quý Đôn

#### Tóm tắt

Bài báo trình bày kết quả phân tích tĩnh vỏ trụ bằng vật liệu nanocomposite có cơ tính biến thiên gia cường bằng ống nano cacbon (Functionally graded carbon nanotube-reinforced composite - FG-CNTRC) chịu tải trọng cơ nhiệt. Nhiệt độ trong vỏ trụ được giả thiết phân bố theo độ dày và xác định từ phương trình truyền nhiệt. Hệ phương trình cân bằng được thiết lập dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (Higher-order shear deformation theory - HSDT) có tính đến ứng suất pháp tuyến. Các tính chất của vật liệu phụ thuộc vào nhiệt độ. Sử dụng phương pháp giải tích với chuỗi lượng giác đơn và phép biến đổi Laplace để giải hệ phương trình cân bằng với các điều kiện biên khác nhau. Mô hình tính toán, phương pháp giải và chương trình tính toán được kiểm chứng bằng cách so sánh với các kết quả đã được công bố. Thực hiện khảo sát ảnh hưởng của điều kiện biên và tải trọng nhiệt đến chuyển vị, ứng suất tại vị trí biên. Bên cạnh đó, khi nhiệt độ vỏ tăng lên thì trị số tuyệt đối lớn nhất của ứng suất dọc trục tăng, còn của ứng suất vòng giảm.

Từ khoá: FG-CNTRC; nhiệt đàn hồi; biến dạng cắt bậc cao; vỏ trụ; thông số phụ thuộc nhiệt độ.

### 1. Mở đầu

FG-CNTRC là loại vật liệu nanocomposite thế hệ mới với nhiều ưu điểm: độ bền cao, trọng lượng riêng nhỏ, khả năng dẫn điện, dẫn nhiệt vượt trội [1]. Do đó, FG-CNTRC có tiềm năng ứng dụng to lớn trong nhiều lĩnh vực như: hàng không vũ trụ, vi cơ điện tử, y sinh, thể thao, phương tiện giao thông... Mô hình vật liệu FG-CNTRC được Shen [2] đề xuất vào năm 2009 có ống nanocacbon (CNT) được phân bố tuyến tính theo tọa độ chiều dày trong pha nền đồng chất. Nhờ tiềm năng của FG-CNTRC, nên ứng xử cơ học kết cấu tấm, vỏ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt là vấn đề được nhiều nhà khoa học quan tâm nghiên cứu [3].

Nhiều nghiên cứu không xét đến gradient nhiệt trong đó nhiệt độ được coi là đồng nhất trong toàn bộ kết cấu. Shen và cộng sự đã khảo sát ứng xử uốn của tấm FG-CNTRC có biên tựa đơn [2], phân tích mất ổn định của vỏ trụ gia cường bằng CNT

<sup>\*</sup> Email: duongvanquang@lqdtu.edu.vn

DOI: 10.56651/lqdtu.jst.v19.n01.646

chịu tải dọc trục [4], khảo sát dao động phi tuyến của vỏ trụ FG-CNTRC [5] với nhiệt độ đồng nhất trong kết cấu. Zhu và cộng sự [6] đã tiến hành khảo sát trạng thái ứng xử tĩnh và dao dộng tự do của tấm FG-CNTRC. Sử dụng giả thuyết tương tự về trường nhiệt độ, Ninh và Bich [7] sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển để nghiên cứu dao động phi tuyến của vỏ trụ FG-CNTRC có lớp áp điện, bao quanh bởi nền đàn hồi. Van Tung và Trang [8] đã sử dụng lý thuyết vỏ cổ điển để khảo sát ổn định phi tuyến của panel trụ FG-CNTRC với nhiệt độ không đổi trong toàn bộ kết cấu. Sử dụng lý thuyết vỏ bậc nhất, Dong và cộng sự [9] đã khảo sát ổn định phi tuyến của vỏ FG-CNTRC có gân tăng cứng trong môi trường nhiệt bao quanh bởi nền đàn hồi với trường nhiệt độ không đổi. Giả thiết nhiệt độ kết cấu đồng nhất, Van Thanh và cộng sự [10] đã khảo sát đáp ứng phi tuyến và dao động của vỏ trụ FG-CNTRC trên nền đàn hồi dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất của Reddy.

Một số nghiên cứu có xét đến ảnh hưởng của gradient nhiệt nhưng coi các tính chất vật liệu không phụ thuộc vào nhiệt độ (temperature-independent properties). Alibeigloo sử dụng lý thuyết đàn hồi ba chiều để khảo sát tấm chữ nhật FG-CNTRC có biên tựa đơn [11], tấm chữ nhật FG-CNTRC có lớp áp điện với các cạnh biên tựa đơn [12] và panel trụ FG-CNTRC có biên tựa đơn [13] chịu tải trọng cơ nhiệt. Hieu và Van Tung [14] sử dụng lý thuyết cổ điển khảo sát ổn định tĩnh vỏ trụ FG-CNTRC có các cạnh biên tựa đơn chịu tải trọng nhiệt.

Có rất ít công bố đồng thời xét đến gradient nhiệt và ảnh hưởng của nhiệt độ đến các tính chất vật liệu (temperature-dependent properties). Pourasghar và Chen [15] nghiên cứu ứng xử nhiệt-đàn hồi của vỏ trụ có CNT phân bố đều trên nền đàn hồi. Moradi-Dastiefdi và cộng sự [16] phân tích tĩnh vỏ nanocomposite gia cường bằng ống CNT đơn vách lượn sóng chịu tải trọng cơ nhiệt. Trong các nghiên cứu này, các tác giả chỉ xét đến điều kiện biên gối tựa. Với sự hiểu biết của các tác giả, hiện chưa có nghiên cứu nào khảo sát ảnh hưởng của điều kiện biên đối với vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt đồng thời xét đến tải gradient nhiệt và tính chất vật liệu phụ thuộc nhiệt độ.

Bên cạnh đó, việc phát triển lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSDT) để khảo sát kết cấu tấm vỏ dày cũng là hướng phát triển được quan tâm nghiên cứu. Tran và cộng sự [17], Chung và cộng sự [18] đã đề xuất sử dụng các lý thuyết tấm bốn ẩn cải tiến để phân tích tấm FG-CNTRC. Ngoài ra, HSDT có kể đến ứng suất pháp tuyến kiểu quasi-3D đã được sử dụng để nghiên cứu kết cấu FG-CNTRC [19, 20] thu được nhiều kết quả đáng chú ý. Bài báo này sử dụng HSDT có kể đến ứng suất pháp tuyến kiểu quasi-3D để nghiên cứu vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải cơ nhiệt với các điều kiện biên khác nhau. Các tính chất hiệu dụng phụ thuộc nhiệt độ của vật liệu FG-CNTRC được tính bằng quy luật hỗn hợp mở rộng (extended rule of mixture). Nhiệt độ được giả thiết biến thiên theo chiều dày và xác

định từ phương trình truyền nhiệt. Các khảo sát về ảnh hưởng của điều kiện biên và tải trọng nhiệt đến nhiệt độ, chuyển vị và ứng suất trong vỏ sau đó đã được thực hiện.

## 2. Mô hình tính toán và phương pháp giải

Xét vỏ trụ FG-CNTRC có chiều dài *L*, bán kính *R*, độ dày *h* như hình 1. Giả thiết mặt trung hòa và mặt trung bình của vỏ trùng nhau. Vật liệu cốt CNT giả định thẳng, đồng phương với trục dọc của vỏ. Vật liệu nền là đồng chất đẳng hướng. Vật liệu cốt CNT và nền liên kết bám dính tuyệt đối. Sử dụng hệ tọa độ cong trực giao  $O\xi \partial z$  đặt tại mặt trung bình của vỏ. Chuyển vị của một điểm trong vỏ theo các trục  $\xi$ ,  $\theta$  và z lần lượt được ký hiệu bởi u, v và w, trong đó:  $\xi = x/R$ . Vỏ chịu tải trọng ở mặt trong  $q^-$  và mặt ngoài  $q^+$ , tải trọng nhiệt  $q^T$ .



Hình 1. Thông số vỏ trụ FG-CNTRC và các trường hợp phân bố CNT.

#### 2.1. Thông số vật liệu

Xét năm trường hợp phân bố tỉ lệ thể tích CNT theo chiều dày: UD, FG-Λ, FG-V, FG-X, FG-O như hình 1. Theo quy luật hỗn hợp mở rộng, các thông số hiệu dụng của FG-CNTRC được xác định theo nhiệt độ như sau [15, 21]:

$$E_{11} = \eta_{1} V_{CNT} E_{11}^{CNT} (T) + V_{m} E_{m} (T), \quad \frac{\eta_{2}}{E_{22}} = \frac{V_{CNT}}{E_{22}^{CNT} (T)} + \frac{V_{m}}{E_{m} (T)},$$

$$\frac{\eta_{3}}{G_{12}} = \frac{V_{CNT}}{G_{12}^{CNT} (T)} + \frac{V_{m}}{G_{m} (T)}, \quad \upsilon_{12} = V_{CNT}^{*} \upsilon_{12}^{CNT} + V_{m} \upsilon_{m},$$

$$\alpha_{11} = \frac{V_{CNT} E_{11}^{CNT} (T) \alpha_{11}^{CNT} (T) + V_{m} E_{m} (T) \alpha_{m} (T)}{V_{CNT} E_{11}^{CNT} (T) + V_{m} E_{m} (T)},$$
(1)

$$\alpha_{22} = (1 + \upsilon_{12}^{CNT}) V_{CNT} \alpha_{22}^{CNT} (T) + (1 + \upsilon_m) V_m \alpha_m (T) - \upsilon_{12} \alpha_{11} (T),$$
  
$$k_{11} = V_{CNT} k_{11}^{CNT} + V_m k_m, \quad \frac{1}{k_{22}} = \frac{V_{CNT}}{k_{22}^{CNT}} + \frac{V_m}{k_m},$$

trong đó:  $\eta_i (i = 1, 2, 3)$  - tham số hiệu dụng của CNT;  $E_{ii}^{CNT}$ ,  $G_{12}^{CNT}$ ,  $\upsilon_{12}^{CNT}$ ,  $\kappa_{ii}^{CNT}$ ,  $k_{ii}^{CNT}$ lần lượt là mô đun đàn hồi, mô đun cắt, hệ số Poisson, hệ số nở nhiệt và hệ số dẫn nhiệt dọc theo các phương dọc (i = 1), phương ngang (i = 2) của CNT;  $E_m$ ,  $G_m$ ,  $\upsilon_m$ ,  $\alpha_m$ ,  $k_m$  - mô đun Young, mô đun cắt, hệ số Poisson, hệ số giãn nở nhiệt và hệ số dẫn nhiệt của vật liệu nền;  $V_{CNT}$  và  $V_m$  - tỉ lệ thể tích của CNT và nền. Quan hệ giữa tỉ lệ thể tích CNT và vật liệu nền như sau:

$$V_{CNT} + V_m = 1 \tag{2}$$

Phân bố tỉ lệ thể tích CNT trong 5 trường hợp được tính như sau:

$$V_{CNT} = V_{CNT}^* \text{ cho mô hình UD}$$
(3a)

$$V_{CNT} = 2(1/2 - z/h)V_{CNT}^* \text{ cho mô hình FG-}\Lambda$$
(3b)

$$V_{CNT} = 2(1/2 + z/h)V_{CNT}^* \text{ cho mô hình FG-V}$$
(3c)

$$V_{CNT} = 2(1 - 2|z|/h)V_{CNT}^* \text{ cho mô hình FG-O}$$
(3d)

$$V_{CNT} = (4|z|/h) V_{CNT}^* \text{ cho mô hình FG-X}$$
(3e)

Các thông số hiệu dụng khác của vật liệu được tính như sau:

$$E_{22} = E_{33}, G_{12} = G_{13} = G_{23}, \nu_{12} = \nu_{13}, \nu_{31} = \nu_{21}, \nu_{32} = \nu_{23} = \nu_{21}, \nu_{21} = \nu_{12}E_{22}/E_{11}, \alpha_{33} = \alpha_{22}, k_{33} = k_{22}$$
(4)

## 2.2. Thiết lập hệ phương trình cân bằng và điều kiện biên

Trường chuyển vị của vỏ theo HSDT có kể đến ứng suất pháp tuyến được khai triển dưới dạng chuỗi như sau [19, 22]:

$$u(\xi,\theta,z) = u_{0}(\xi,\theta) + u_{1}(\xi,\theta)z + u_{2}(\xi,\theta)\frac{z^{2}}{2!} + u_{3}(\xi,\theta)\frac{z^{3}}{3!},$$
  

$$v(\xi,\theta,z) = v_{0}(\xi,\theta) + v_{1}(\xi,\theta)z + v_{2}(\xi,\theta)\frac{z^{2}}{2!} + v_{3}(\xi,\theta)\frac{z^{3}}{3!},$$
  

$$w(\xi,\theta,z) = w_{0}(\xi,\theta) + w_{1}(\xi,\theta)z + w_{2}(\xi,\theta)\frac{z^{2}}{2!},$$
  
(5)

Chuyển vị pháp tuyến *w* trong trường hợp này không phải là hằng số mà là đa thức bậc hai của hàm tọa độ theo chiều dày. Do đó, sẽ xuất hiện thành phần ứng suất 46

pháp tuyến theo độ dày vỏ. Mối quan hệ chuyển vị - biến dạng được xác định như sau:

$$\varepsilon_{\xi} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{R+z} \left( \frac{\partial v}{\partial \theta} + w \right), \quad \gamma_{\xi\theta} = \frac{1}{R} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial u}{\partial \theta},$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{1}{R+z} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{R+z}, \quad \gamma_{\xi z} = \frac{1}{R} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \varepsilon_{z} = \frac{\partial w}{\partial z}.$$
(6)

Mối quan hệ ứng suất - biến dạng khi xét ảnh hưởng của nhiệt độ đến tính chất vật liệu được xác định như sau [15]:

$$\begin{cases} \sigma_{\xi} \\ \sigma_{\theta} \\ \sigma_{z} \\ \tau_{\xi \theta} \\ \tau_{\xi z} \\ \tau_{\xi \theta} \end{cases} = \begin{bmatrix} C_{11}(T,z) & C_{12}(T,z) & C_{13}(T,z) & 0 & 0 & 0 \\ C_{21}(T,z) & C_{22}(T,z) & C_{23}(T,z) & 0 & 0 & 0 \\ C_{31}(T,z) & C_{32}(T,z) & C_{33}(T,z) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44}(T,z) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55}(T,z) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66}(T,z) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_{\xi} \\ \varepsilon_{\theta} \\ \varepsilon_{z} \\ \gamma_{z\theta} \\ \gamma_{\xi z} \\ \gamma_{\xi \theta} \end{bmatrix} \Delta T,$$
 (7)

trong đó:  $\Delta T = T - T_{ref}$  và  $T_{ref}$  là nhiệt độ chuẩn khi không có biến dạng nhiệt. Các hằng số độ cứng  $C_{ij}$  khi xét đến ảnh hưởng của nhiệt độ được xác định ở phụ lục.  $\beta_{\xi}$ ,  $\beta_{\theta}$ ,  $\beta_{z}$  là các ứng suất liên quan đến hệ số giãn nở nhiệt  $\alpha_{ii}$  được tính như sau [15]:

$$\begin{cases}
\beta_{\xi} \\
\beta_{\theta} \\
\beta_{z}
\end{cases} = \begin{pmatrix}
C_{11}(T, z)\alpha_{11} + C_{12}(T, z)\alpha_{22} + C_{13}(T, z)\alpha_{33} \\
C_{21}(T, z)\alpha_{11} + C_{22}(T, z)\alpha_{22} + C_{23}(T, z)\alpha_{33} \\
C_{31}(T, z)\alpha_{11} + C_{32}(T, z)\alpha_{22} + C_{33}(T, z)\alpha_{33}
\end{cases}$$
(8)

Sử dụng nguyên lý công ảo, ta thiết lập được hệ phương trình cân bằng như sau [23]:

$$\delta u_{0} : \frac{\partial N_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}}{\partial \theta} = 0, \qquad \delta v_{0} : \frac{\partial N_{\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial N_{\xi\theta}}{\partial \xi} + Q_{\theta} = 0,$$

$$\delta w_{0} : \frac{\partial Q_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_{\theta}}{\partial \theta} - N_{\theta} - Rp_{0} = 0, \qquad \delta u_{1} : \frac{\partial M_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}}{\partial \theta} - RQ_{\xi} = 0,$$

$$\delta v_{1} : \frac{\partial M_{\xi\theta}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta}}{\partial \theta} - RQ_{\theta} = 0, \qquad \delta w_{1} : \frac{\partial S_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial S_{\theta}}{\partial \theta} - M_{\theta} - RQ_{z} - Rp_{1} = 0,$$

$$\delta u_{2} : \frac{\partial N_{\xi}^{*}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta\xi}^{*}}{\partial \theta} - RS_{\xi} = 0, \qquad \delta v_{2} : \frac{\partial N_{\xi\theta}^{*}}{\partial \xi} + \frac{\partial N_{\theta}^{*}}{\partial \theta} - RS_{\theta} - Q_{\theta}^{*} = 0,$$

$$\delta w_{2} : \frac{\partial Q_{\xi}^{*}}{\partial \xi} + \frac{\partial Q_{\theta}^{*}}{\partial \theta} - N_{\theta}^{*} - RS_{z} - Rp_{2} = 0, \qquad \delta u_{3} : \frac{\partial M_{\xi}^{*}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta\xi}^{*}}{\partial \theta} - RQ_{\xi}^{*} = 0,$$

$$\delta v_{3} : \frac{\partial M_{\xi\theta}^{*}}{\partial \xi} + \frac{\partial M_{\theta}^{*}}{\partial \theta} - RQ_{\theta}^{*} - 2S_{\theta}^{*} = 0.$$
(9)

Các nội lực bao gồm hai thành phần do biến dạng đàn hồi và do biến dạng nhiệt:

$$\begin{pmatrix} N_{\xi}, M_{\xi}, N_{\xi}^{*}, M_{\xi}^{*} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \left( C_{11}\varepsilon_{\xi} + C_{12}\varepsilon_{\theta} + C_{13}\varepsilon_{z} \right) \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \left( 1, z, z^{2}/2, z^{3}/6 \right) dz - \left( N_{\xi}^{T}, M_{\xi}^{T}, N_{\xi}^{T*}, M_{\xi}^{T*} \right) \\ \begin{pmatrix} N_{\theta}, M_{\theta}, N_{\theta}^{*}, M_{\theta}^{*} \end{pmatrix} = \int_{-h/2}^{+h/2} \left( C_{21}\varepsilon_{\xi} + C_{22}\varepsilon_{\theta} + C_{23}\varepsilon_{z} \right) \left( 1, z, z^{2}/2, z^{3}/6 \right) dz - \left( N_{\theta}^{T}, M_{\theta}^{T}, N_{\theta}^{T*}, M_{\theta}^{T*} \right), \\ \left( Q_{z}, S_{z} \right) = \int_{-h/2}^{+h/2} \left( C_{31}\varepsilon_{\xi} + C_{32}\varepsilon_{\theta} + C_{33}\varepsilon_{z} \right) \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \left( 1, z, z^{2}/2, z^{3}/6 \right) dz - \left( N_{\theta}^{T}, M_{\theta}^{T}, N_{\theta}^{T*}, M_{\theta}^{T*} \right), \\ \left( N_{\theta\xi}, M_{\theta\xi}, N_{\theta\xi}^{*}, M_{\theta\xi}^{*} \right) = \int_{-h/2}^{+h/2} C_{44}\gamma_{\xi\theta} \left( 1, z, z^{2}/2, z^{3}/6 \right) dz, \\ \left( N_{\xi\theta}, M_{\xi\theta}, N_{\xi\theta}^{*}, M_{\theta\xi}^{*} \right) = \int_{-h/2}^{+h/2} C_{44}\gamma_{\xi\theta} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \left( 1, z, z^{2}/2, z^{3}/6 \right) dz, \\ \left( Q_{\xi}, S_{\xi}, Q_{\xi}^{*} \right) = \int_{-h/2}^{+h/2} C_{55}\gamma_{\xiz} \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \left( 1, z, z^{2}/2 \right) dz, \\ \left( Q_{\theta}, S_{\theta}, Q_{\theta}^{*}, S_{\theta}^{*} \right) = \int_{-h/2}^{+h/2} C_{66}\gamma_{\theta z} \left( 1, z, z^{2}/2, z^{3}/6 \right) dz$$

Thành phần nội lực do nhiệt độ được tính như sau:

$$\left(N_{\xi}^{T}, M_{\xi}^{T}, N_{\xi}^{T*}, N_{\xi}^{T*}, M_{\xi}^{T*}\right) = \int_{-h/2}^{+h/2} \left(C_{11}\alpha_{11} + C_{12}\alpha_{22} + C_{13}\alpha_{33}\right) \Delta T \left(1 + \frac{z}{R}\right) \left(1, z, z^{2}/2, z^{3}/6\right) dz,$$

$$\left(N_{\theta}^{T}, M_{\theta}^{T}, N_{\theta}^{T*}, M_{\theta}^{T*}\right) = \int_{-h/2}^{+h/2} \left(C_{21}\alpha_{11} + C_{22}\alpha_{22} + C_{23}\alpha_{33}\right) \Delta T \left(1, z, z^{2}/2, z^{3}/6\right) dz,$$

$$\left(Q_{z}^{T}, S_{z}^{T}\right) = \int_{-h/2}^{+h/2} \left(C_{31}\alpha_{11} + C_{32}\alpha_{11} + C_{33}\alpha_{11}\right) \Delta T \left(1 + \frac{z}{R}\right) \left(1, z\right) dz.$$

$$(11)$$

Giả thiết nhiệt độ phân bố theo chiều dày vỏ trụ, không có nguồn nhiệt biên trong vỏ thì phân bố nhiệt độ của vỏ được xác định như sau [13]:

$$\frac{1}{R+z}\frac{\partial}{\partial z}\left(k_{33}r\frac{\partial T}{\partial z}\right) = 0$$
(12)

Điều kiện biên nhiệt độ:  $T = T_{in}$  tại z = -h/2 và  $T = T_{out}$  tại z = h/2 (13)

Thực hiện giải phương trình (12) và sử dụng điều kiện biên nhiệt (13), ta xác định được hàm biến thiên nhiệt độ như sau:

$$T(z) = \frac{A_1}{k_{33U}} \ln(R+z) + A_2 \text{ cho mô hình UD}$$
(14a)

$$T(z) = A_3 \cdot G_{1\Lambda} \cdot \ln(R+z) + A_3 \cdot G_{2\Lambda} \cdot z + A_4 \text{ cho mô hình FG-} \Lambda$$
(14b)

$$T(z) = A_5 \cdot G_{1V} \cdot \ln(R+z) + A_5 \cdot G_{2V} \cdot z + A_6 \text{ cho mô hình FG-V}$$
(14c)

$$T(z) = \begin{cases} A_7.G_{10}.\ln(R+z) + A_7.G_{20}.z + A_8 (-h/2 \le z < 0) \\ A_7.G_{30}.\ln(R+z) + A_7.G_{40}.z + A_9 (0 \le z \le h/2) \end{cases}$$
 cho mô hình FG-O (14d)

$$T(z) = \begin{cases} A_{10}.G_{1X}.\ln(R+z) + A_{10}.G_{2X}.z + A_{11} (-h/2 \le z < 0) \\ A_{10}.G_{3X}.\ln(R+z) + A_{10}.G_{4X}.z + A_{12} (0 \le z \le h/2) \end{cases}$$
cho mô hình FG-X (14e)

trong đó, các hằng số  $A_i, G_i$  được xác định như ở phần phụ lục.

Đối với vỏ trụ kín, điều kiện biên ngàm (C) được xác định như sau:

$$u_0 = u_1 = u_2 = u_3 = 0$$
,  $v_0 = v_1 = v_2 = v_3 = 0$ ,  $w_0 = w_1 = w_2 = 0$  (15a)  
Điều kiện biên gối tựa (S):

$$N_{\xi} = M_{\xi} = N_{\xi}^{*} = M_{\xi}^{*} = 0, \quad v_{0} = v_{1} = v_{2} = v_{3} = 0, \quad w_{0} = w_{1} = w_{2} = 0$$
 (15b)

Điều kiện biên tự do (F):

$$N_{\xi} = M_{\xi} = N_{\xi}^{*} = M_{\xi}^{*} = 0, \ N_{\xi\theta} = M_{\xi\theta} = N_{\xi\theta}^{*} = M_{\xi\theta}^{*} = 0, \ Q_{\xi} = S_{\xi} = Q_{\xi}^{*} = 0$$
(15c)

### 2.3. Phương pháp giải

Thay biểu thức chuyển vị (5) vào các biểu thức từ (7) - (9) ta sẽ thu được hệ gồm 11 phương trình vi phân tương ứng với 11 ẩn chuyển vị. Trong bài báo này, sử dụng phương pháp giải tích với phân tích chuyển vị, tải trọng theo chuỗi lượng giác đơn và phép biến đổi Laplace để giải hệ phương trình cân bằng cho vỏ trụ kín chịu tải trọng hướng kính và tuần hoàn theo tọa độ vòng  $\theta$ . Để chuyển hệ phương trình vi phân đạo hàm riêng về hệ phương trình vi phân thường, ta thực hiện phân tích chuyển vị, tải trọng theo chuỗi lượng giác đơn như sau:

$$u_{i}(\xi,\theta) = U_{i0}(\xi) + \sum_{m} U_{im}(\xi) \sin m\theta, \ v_{i}(\xi,\theta) = V_{i0}(\xi) - \sum_{m} V_{im}(\xi) \cos m\theta,$$
$$w_{j}(\xi,\theta) = W_{j0}(\xi) + \sum_{m} W_{jm}(\xi) \sin m\theta, \ q^{\pm}(\xi,\theta) = Q_{0}^{\pm}(\xi) + \sum_{m} Q_{m}^{\pm}(\xi) \sin m\theta, \ (16)$$
$$\Delta T = T_{0}(\xi) + \sum_{m} T_{m}(\xi) \sin m\theta, \ i = 0, 1, 2, 3; \ j = 0, 1, 2.$$

Thay (16) vào hệ phương trình (9), thực hiện biến đổi Laplace với biến  $\xi$  kết hợp với điều kiện biên (15), ta thu được hệ phương trình đại số đối với các hàm ảnh. Giải hệ phương trình đại số này, sau đó thực hiện biến đổi Laplace ngược ta thu được biểu thức chuyển vị. Chi tiết phương pháp được trình bày trong [19, 23]. Do khuôn khổ của bài báo có hạn nên nhóm tác giả không trình bày chi tiết ở đây.

Từ biểu thức nghiệm chuyển vị thu được các thành phần ứng suất  $\sigma_{\xi}$ ,  $\sigma_{\theta}$ ,  $\tau_{\xi\theta}$ được xác định theo (7). Để thỏa mãn điều kiện cân bằng của phân tố vỏ đồng thời thỏa mãn điều kiện biên ở mặt trên và mặt dưới của vỏ, các thành phần ứng suất còn lại được xác định bằng cách tích phân phương trình cân bằng dựa trên lý thuyết đàn hồi 3 chiều như sau [19, 23]:

$$\tau_{\xi z} = -\frac{1}{R+z} \int_{-h/2}^{z} \left[ \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{\partial \sigma_{\xi}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\xi \theta}}{\partial \theta} \right] dz; \ \tau_{\theta z} = -\frac{R}{(R+z)^2} \int_{-h/2}^{z} \left[ \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{\partial \sigma_{\theta}}{\partial \theta} + \left( 1 + \frac{z}{R} \right)^2 \frac{\partial \tau_{\xi \theta}}{\partial \xi} \right] dz,$$
$$\sigma_{z} = -\frac{1}{R+z} \int_{-h/2}^{z} \left[ \left( 1 + \frac{z}{R} \right) \frac{\partial \tau_{\xi z}}{\partial \xi} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} - \sigma_{\theta} \right] dz + \frac{R-h/2}{R+h/2} q^{-}.$$
(17)

# 3. Kết quả tính toán và nhận xét

#### 3.1. Kiểm chứng mô hình và phương pháp giải

Để kiểm chứng, so sánh kết quả tính toán cho vỏ trụ FGM trong môi trường nhiệt với biên ngàm hai đầu với kết quả của Gharooni và cộng sự [24] được tính toán bằng phương pháp phần tử hữu hạn. Trong chương trình tính, ta thay các công thức xác định thông số vật liệu (1) và hàm phân bố nhiệt độ (14) của vật liệu FG-CNTRC bằng thông số vật liệu và hàm phân bố nhiệt độ của vật liệu FGM theo công trình [24].



Hình 2. So sánh kết quả chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên của vỏ FGM.

Thông số hình học của vỏ: Độ dài L = 0,8 m, bán kính trong  $r_{in} = 0,04$  m, độ dày h = 0,02 m; thông số vật liệu ở mặt trong:  $\mu_{in} = 0,3$ ,  $E_{in} = 200$  GPa,  $\alpha_{in} = 12 \times 10^{-6} / {}^{\circ}$ C,  $k_{in} = 20$  W/m.K; nhiệt độ mặt trong và mặt ngoài:  $T_{in} = 125{}^{\circ}$ C,  $T_{out} = 25{}^{\circ}$ C; nhiệt độ 50

tham chiếu  $T_{ref} = 25^{\circ}$ C, áp suất bên trong  $P_{in} = 80$  MPa. Mô đun đàn hồi *E*, hệ số nở nhiệt  $\alpha$ , hệ số truyền nhiệt *k* được xác định như sau:

$$E(z) = E_{in} \left( (R+z)/r_{in} \right)^{n}; \alpha(z) = \alpha_{in} \left( (R+z)/r_{in} \right)^{n}; k(z) = k_{in} \left( (R+z)/r_{in} \right)^{n}$$

$$T(r) = \frac{\left(r_{in}r_{out}\right)^{n}}{\left(r_{in}^{n} - r_{out}^{n}\right)} \left[ \left(\frac{T_{out} - T_{in}}{r^{n}}\right) - \left(\frac{T_{out}}{r_{in}^{n}}\right) \right] + \left(\frac{T_{in}}{r_{out}^{n}}\right)$$
(18)

Hình 2 thể hiện kết quả so sánh của chuyển vị không thứ nguyên  $\overline{w} = w/r_{in} \times 1000$ và ứng suất vòng không thứ nguyên  $\overline{\sigma}_{\theta} = \sigma_{\theta}/P_{in}$  của vỏ FGM với kết quả của Gharooni và cộng sự [24] cho thấy mô hình và phương pháp giải đảm bảo độ chính xác.

#### 3.2. Ảnh hưởng của điều kiện biên

Xét vỏ trụ có kiểu phân bố FG-A chịu áp suất phân bố đều ở mặt trong  $Q_0 = 10^7$  Pa, tải nhiệt ở mặt trong của vỏ  $T_{in} = 500$  K, nhiệt độ mặt ngoài của vỏ bằng với nhiệt độ môi trường  $T_{out} = 300$  K. Thông số hình học của vỏ: R = 0.5 m; L/R = 4; R/h = 10. Xét các trường hợp biên khác nhau: C-C, C-S, C-F, S-S.

Vật liệu gia cường là (10,10) SWCNTs và nền PMMA. Các giá trị hiệu dụng của CNT:  $V_{CNT}^* = 0,17; \eta_1 = 0,142; \eta_2 = 1,626; \eta_3 = 0,7\eta_2$ . Mô đun đàn hồi và hệ số nở nhiệt của vật liệu nền PMMA theo nhiệt độ như sau [4]:

$$E_m = (3,52 - 34 \cdot 10^{-4}T) \text{ GPa}, \alpha_m = 45(1 + 0,0005(T - T_{ref})) \cdot 10^{-6}/K$$
(19)

trong đó,  $T_{\text{ref}} = 300 \text{ K}$ . Hệ số Poisson  $v_m = 0,34$ , hệ số dẫn nhiệt  $k_m = 5 \text{ W/mK}$ .

Thông số của (10,10) SWCNTs xác định bởi hàm đa thức của nhiệt độ [16]:  $E_{11}^{CNT} = 6.3998 \times 10^{12} - 4.3384 \times 10^9 T + 7.4300 \times 10^6 T^2 - 4.4583 \times 10^3 T^3$   $E_{22}^{CNT} = 8.0216 \times 10^{12} - 5.4204 \times 10^9 T + 9.2750 \times 10^6 T^2 - 5.5625 \times 10^3 T^3$   $G_{12}^{CNT} = 1.4076 \times 10^{12} + 3.4762 \times 10^9 T - 6.9650 \times 10^6 T^2 + 4.4792 \times 10^3 T^3$   $\alpha_{11}^{CNT} = -1.1252 \times 10^{-6} + 2.2917 \times 10^{-8} T - 2.8870 \times 10^{-11} T^2 + 1.1363 \times 10^{-14} T^3$   $\alpha_{22}^{CNT} = 5.43715 \times 10^{-6} - 9.84625 \times 10^{-10} T + 2.900 \times 10^{-13} T^2 + 1.2500 \times 10^{-17} T^3$ (20)

Chuyển vị không thứ nguyên và ứng suất không thứ nguyên được tính như sau:

$$\overline{w} = w/h; \left(\overline{\sigma}_{\xi\xi}, \overline{\sigma}_{\theta\theta}, \overline{\sigma}_{zz}, \overline{\tau}_{\xi\theta}, \overline{\tau}_{\xiz}, \overline{\tau}_{z\theta}\right) = \left(\sigma_{\xi}, \sigma_{\theta}, \sigma_{z}, \tau_{\xi\theta}, \tau_{\xiz}, \tau_{z\theta}\right) / Q_{0}$$
(21)

Từ kết quả tính toán ứng suất tại điểm giữa  $(\xi = L/2R)$  và điểm biên  $(\xi = L/R)$ của vỏ trụ FG-A được thể hiện ở hình 3, có thể thấy rằng:

- Điều kiện biên ảnh hưởng nhỏ đến ứng suất tại điểm giữa  $(\xi = L/2R)$  nhưng ảnh hưởng lớn đến ứng suất tại điểm biên  $(\xi = L/R)$  đối với vỏ có độ dài trung bình (L/R = 4). Trong đó, ứng suất của vỏ C-C thể hiện sự khác biệt lớn so với các điều kiện biên khác.

- Giá trị ứng suất tại điểm biên  $(\xi = L/R)$  có sự biến thiên đột ngột so với giá trị ứng suất tại điểm giữa  $(\xi = L/2R)$ . Trường hợp C-C sự biến thiên thể hiện rõ nét nhất.



(a) Úng suất dọc trục tại  $\xi = L/2R$ 



(b) Úng suất dọc trục tại  $\xi = L/R$ 



(c) Ứng suất vòng tại  $\xi = L/2R$ 



(d) Úng suất vòng tại  $\xi = L/R$ 



(g) Úng suất hướng kính tại  $\xi = L/2R$ 



Hình 3. Ứng suất không thứ nguyên của vỏ trụ  $FG-\Lambda$  tại vị trí giữa  $\xi = L/2R$  với điều kiện biên khác nhau và  $V_{CNT}^* = 0,17$ , L/R = 4, R/h = 10,  $T_{in} = 300K$ ,  $T_{out} = 500K$ .

#### 3.3. Ảnh hưởng của nhiệt độ

Xét vỏ trụ FG-A có biên C-S, có vật liệu cốt CNT và vật liệu nền như ở mục 3.2. Thông số hình học: R = 0,5 m; L/R = 3; R/h = 10. Vỏ chịu áp suất ở mặt trong  $Q_0 = 10^7$  Pa, nhiệt độ  $T_{out} = 300$  K, vỏ chịu nhiệt độ bên trong  $T_{in} = 600$ ; 500; 400; 300 K. Tỉ lệ thể tích:  $V_{CNT}^* = 0,28; \eta_1 = 0,141; \eta_2 = 1,585; \eta_3 = 0,7\eta_2$ .

Kết quả tính toán phân bố nhiệt độ, chuyển vị, ứng suất của vỏ tại điểm giữa  $(\xi = L/2R)$  ở các nhiệt độ khác nhau được thể hiện trên hình 4.



Hình 4. Nhiệt độ, chuyển vị và ứng suất không thứ nguyên của vỏ trụ C-S FG- $\Lambda$  với  $V_{CNT}^* = 0,28, L/R = 3, R/h = 10, T_{out} = 300 K$  và  $T_{in} = 300; 400; 500; 600 K.$ 

Từ kết quả khảo sát ở hình 4, có thể thấy rằng:

Chuyển vị hướng kính w tại vị trí giữa của vỏ tăng lên khi nhiệt độ tăng lên.
 Điều này có thể giải thích do tác dụng của tải trọng nhiệt làm cho biến dạng nhiệt của vỏ tăng lên và hằng số độ cứng của vỏ giảm.

- Nhiệt độ bên trong vỏ ảnh hưởng lớn đến các giá trị ứng suất tại vị trí giữa  $(\xi = L/2R)$ . Khi nhiệt độ bên trong tăng, trị số tuyệt đối lớn nhất của ứng suất dọc trục  $\overline{\sigma}_{\xi\xi}$  tăng lên, còn ứng suất vòng  $\overline{\sigma}_{\theta\theta}$  giảm xuống. Nhiệt độ ảnh hưởng rõ nét nhất đến ứng suất  $\overline{\sigma}_{\xi\xi}, \overline{\sigma}_{\theta\theta}$  ở mặt trong của vỏ, tại đây chịu ảnh hưởng đồng thời của hai yếu tố nhiệt độ lớn nhất và giá trị tỉ lệ thể tích CNT cũng đạt giá trị lớn nhất đối với kiểu phân bố FG- $\Lambda$ .

# 4. Kết luận

Bài báo đã sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao có kể đến ứng suất hướng kính và ảnh hưởng của nhiệt độ đến tính chất vật liệu để nghiên cứu vỏ trụ FG-CNTRC chịu tải trọng cơ nhiệt. Thực hiện giải phương trình truyền nhiệt để xác định quy luật phân bố nhiệt độ theo độ dày vỏ. Sử dụng phương pháp giải tích bằng cách phân tích chuyển vị thành chuỗi lượng giác đơn, kết hợp với phép biến đổi Laplace để thực hiện giải hệ phương trình cân bằng của vỏ với các điều kiện biên khác nhau. Độ tin cậy của mô hình tính, phương pháp giải và chương trình tính toán đã được kiểm chứng bằng cách so sánh với các kết quả đã được công bố. Các khảo sát số đã được thực hiện để đánh giá ảnh hưởng của điều kiện biên, của nhiệt độ đến phân bố nhiệt độ, chuyển vị, ứng suất trong vỏ. Kết quả nhận được cho thấy điều kiện biên ảnh hưởng lớn đến ứng suất của vỏ, đặc biệt là tại các vị trí biên ngàm, tại đó có sự biến thiên đột ngột của ứng suất. Bên cạnh đó, khi nhiệt độ ở mặt trong vỏ tăng lên thì trị số tuyệt đối lớn nhất của ứng suất dọc trục tăng, còn của ứng suất vòng giảm. Ảnh hưởng của nhiệt độ thể hiện rõ nét ở các lớp vỏ có nhiệt độ cao ở sát nguồn nhiệt.

#### Phụ lục

$$C_{11}(T,z) = \frac{E_{11}}{\Delta} (1 - \upsilon_{23}\upsilon_{32}), C_{22}(T,z) = \frac{E_{22}}{\Delta} (1 - \upsilon_{31}\upsilon_{13}), C_{33}(T,z) = \frac{E_{33}}{\Delta} (1 - \upsilon_{21}\upsilon_{12}),$$

$$C_{12}(T,z) = \frac{E_{11}}{\Delta} (\upsilon_{21} + \upsilon_{23}\upsilon_{31}), C_{13}(T,z) = \frac{E_{11}}{\Delta} (\upsilon_{31} + \upsilon_{21}\upsilon_{32}), C_{23}(T,z) = \frac{E_{22}}{\Delta} (\upsilon_{32} + \upsilon_{12}\upsilon_{31}),$$

$$C_{44}(T,z) = G_{23}, C_{55}(T,z) = G_{13}, C_{66}(T,z) = G_{12}, \Delta = 1 - \upsilon_{12}\upsilon_{21} - \upsilon_{23}\upsilon_{32} - \upsilon_{31}\upsilon_{13} - 2\upsilon_{12}\upsilon_{23}\upsilon_{32}$$

$$\begin{split} &k_{33U} = \frac{1}{\frac{V_{CNT}^{*} + V_m^{*}}{k_m^{CNT} + k_m^{*}}}, \ A_1 = \frac{k_{33U}\left(\frac{T_m - T_{out}}{R + h/2}\right)}{\ln\left(\frac{R - h/2}{R + h/2}\right)}, \ A_2 = \frac{T_{out}\ln\left(R - h/2\right) - T_m\ln\left(R + h/2\right)}{\ln\left(\frac{R - h/2}{R + h/2}\right)}, \\ &A_3 = \frac{T_m - T_{out}}{G_{1\Lambda} \cdot \ln\left(\frac{R - h/2}{R + h/2}\right) - G_{2\Lambda} \cdot h}, \ A_5 = \frac{T_m - T_{out}}{G_{1V} \cdot \ln\left(\frac{R - h/2}{R + h/2}\right) - G_{2V} \cdot h}, \\ &A_4 = \frac{\left[\frac{G_{1\Lambda} \cdot \ln\left(R - h/2\right) - G_{2\Lambda} \cdot h/2\right] T_{out} - \left[G_{1\Lambda} \cdot \ln\left(R + h/2\right) + G_{2\Lambda} \cdot h/2\right] T_m}{G_{1\Lambda} \cdot \ln\left(\frac{R - h/2}{R + h/2}\right) - G_{2\Lambda} \cdot h}, \\ &A_4 = \frac{\left[\frac{G_{1\Lambda} \cdot \ln\left(R - h/2\right) - G_{2\Lambda} \cdot h/2\right] T_{out} - \left[G_{1\Lambda} \cdot \ln\left(R + h/2\right) + G_{2\Lambda} \cdot h/2\right] T_m}{G_{1\Lambda} \cdot \ln\left(\frac{R - h/2}{R + h/2}\right) - G_{2\Lambda} \cdot h}, \\ &A_5 = \frac{\left[\frac{G_{1\Lambda} \cdot \ln\left(R - h/2\right) - G_{2\Lambda} \cdot h/2\right] T_{out} - \left[G_{1\Lambda} \cdot \ln\left(R + h/2\right) + G_{2\Lambda} \cdot h/2\right] T_m}{G_{1\Lambda} \cdot \ln\left(\frac{R - h/2}{R + h/2}\right) - G_{2\Lambda} \cdot h}, \\ &A_6 = \frac{\left[\frac{G_{1V} \cdot \ln\left(R - h/2\right) - G_{2V} \cdot h/2\right] T_{out} - \left[G_{2V} \cdot \ln\left(R + h/2\right) + G_{2V} \cdot h/2\right] T_{in}}{G_{1V} \cdot \ln\left(\frac{R - h/2}{R + h/2}\right) - G_{2V} \cdot h}, \\ &A_6 = \frac{\left[\frac{G_{10} \cdot \ln\left(R - h/2\right) - G_{2V} \cdot h/2\right] T_{out} - \left[G_{2V} \cdot \ln\left(R + h/2\right) + G_{2V} \cdot h/2\right] T_{in}}{G_{1V} \cdot \ln\left(\frac{R - h/2}{R + h/2}\right) - G_{2V} \cdot h}, \\ &A_7 = \frac{T_{out} - T_m}{\Delta}, A_8 = \frac{1}{\Delta_0} \cdot \left[\left[-G_{10} \cdot \ln\left(R - h/2\right) + G_{20} \cdot h/2\right] T_{out} + \left[1 - \left(2 + 4R/h\right) V_{CNT}^{*}\right] k_{33}^{CNT}, G_{20} = \frac{4}{h} V_{CNT}^{*} \cdot \left(k_m - k_{33}^{CNT} - k_m\right), \\ &A_7 = \frac{T_{out} - T_m}{\Delta}, A_8 = \frac{1}{\Delta_0} \cdot \left[\left[-G_{10} \cdot \ln\left(R - h/2\right) + G_{20} \cdot h/2\right] T_{out} + \left[G_{10} \cdot \ln R - G_{30} \cdot \ln\left(R - h/2\right) + G_{20} \cdot h/2\right] T_{out} + \left[A_9 - \frac{1}{\Delta_0} \cdot \left[\left[G_{10} \cdot \ln R - G_{30} \cdot \ln\left(R - h/2\right) + G_{20} \cdot h/2\right] T_m}{A_0} - \frac{1}{G_{10} \cdot \ln\left(R - h/2\right) + G_{30} \cdot \ln\left(R - h/2\right) + G_{40} \cdot h/2\right] T_m}{A_1} + \frac{1}{\Delta_2} \left[\left[-\left(4R/h\right) k_m V_{CNT}^{*}\right] k_{33}^{CNT}, G_{2X} = \frac{4}{h} N_{CNT}^{*} \cdot \left(k_{33}^{CNT} - k_m\right), \\ &G_{3X} = \left[1 - \left(4R/h\right) k_m V_{CNT}^{*}\right] + \frac{1}{\Delta_2} \left[\left[-G_{1X} \cdot \ln\left(R - h/2\right) + G_{2X} \cdot h/2\right] T_m}{A_1} + \frac{1}{\Delta_2} \left[\left[-G_{1X} \cdot \ln\left(R - h/2\right) + G_{2X} \cdot h/2\right] T_m}\right], \\ &A_{10} = \frac{T_{out} - T_m}{\Delta_X}, A_{11} =$$

$$A_{12} = \frac{1}{\Delta_{X}} \cdot \begin{bmatrix} G_{1x} \cdot \ln R - G_{3x} \cdot \ln R - G_{1x} \cdot \ln (R - h/2) + G_{2x} \cdot h/2 \end{bmatrix} \cdot T_{out} + \\ + \begin{bmatrix} G_{3x} \cdot \ln (R + h/2) + G_{4x} \cdot h/2 \end{bmatrix} \cdot T_{in} \end{bmatrix},$$
  
$$\Delta_{X} = -G_{1x} \cdot \ln (R - h/2) + G_{2x} \cdot h/2 - G_{3x} \cdot \ln (R + h/2) - G_{4x} \cdot h/2 + G_{1x} \cdot \ln R - G_{3x} \cdot \ln R$$

#### Tài liệu tham khảo

- [1] M. Loos, Carbon nanotube reinforced composites: CNT Polymer Science and Technology. Elsevier, 2014.
- [2] H. S. Shen, "Nonlinear bending of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plates in thermal environments", *Composite Structures*, Vol. 91(1), pp. 9-19, 2009. DOI: 10.1016/j.compstruct.2009.04.026
- [3] H. Zhang, C. Gao, H. Li, F. Pang, T. Zou, H. Wang, and N. Wang, "Analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite structures: A review", *Nanotechnology Reviews*, Vol. 9(1), pp. 1408-1426, 2020. DOI: 10.1515/ntrev-2020-0110
- [4] H. S. Shen, "Postbuckling of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments, Part I: Axially-loaded shells", *Composite Structures*, Vol. 93(8), pp. 2096-2108, 2011. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.02.011
- [5] H. S. Shen and Y. Xiang, "Nonlinear vibration of nanotube-reinforced composite cylindrical shells in thermal environments", *Computer Methods in Applied Mechanics Engineering*, Vol. 213, pp. 196-205, 2012. DOI: 10.1016/j.cma.2011.11.025
- [6] P. Zhu, Z. Lei, and K. M. Liew, "Static and free vibration analyses of carbon nanotubereinforced composite plates using finite element method with first order shear deformation plate theory", *Composite Structures*, Vol. 94(4), pp. 1450-1460, 2012. DOI: 10.1016/j.compstruct.2011.11.010
- [7] D. G. Ninh and D. H. Bich, "Characteristics of nonlinear vibration of nanocomposite cylindrical shells with piezoelectric actuators under thermo-mechanical loads", *Aerospace Science Technology*, Vol. 77, pp. 595-609, 2018. DOI: 10.1016/j.ast.2018.04.008
- [8] H. V. Tung and L. T. N. Trang, "Imperfection and tangential edge constraint sensitivities of thermomechanical nonlinear response of pressure-loaded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panels", *Acta Mechanica*, Vol. 229(5), pp. 1949-1969, 2018. DOI: 10.1007/s00707-017-2093-z
- [9] D. T. Dong, V. H. Nam, N. T. Phuong, L. N. Ly, V. M. Duc, N. V. Tien, P. H. Quan, "An analytical approach of nonlinear buckling behavior of longitudinally compressed carbon nanotube-reinforced (CNTR) cylindrical shells with CNTR stiffeners in thermal environment", ZAMM - Journal of Applied Mathematics Mechanics/Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 102(4), 2022, e202100228. DOI: 10.1002/zamm.202100228

- [10] N. Van Thanh, V. Dinh Quang, N. Dinh Khoa, K. Seung-Eock, and N. Dinh Duc, "Nonlinear dynamic response and vibration of FG CNTRC shear deformable circular cylindrical shell with temperature-dependent material properties and surrounded on elastic foundations", *Journal of Sandwich Structures Materials*, Vol. 21(7), pp. 2456-2483, 2019. DOI: 10.1177/10996362177522
- [11] A. Alibeigloo and K. Liew, "Thermoelastic analysis of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite plate using theory of elasticity", *Composite Structures*, Vol. 106, pp. 873-881, 2013. DOI: 10.1016/j.compstruct.2013.07.002
- [12] A. Alibeigloo, "Three-dimensional thermoelasticity solution of functionally graded carbon nanotube reinforced composite plate embedded in piezoelectric sensor and actuator layers", *Composite Structures*, Vol. 118, pp. 482-495, 2014. DOI: 10.1016/j.compstruct.2014.08.004
- [13] A. Alibeigloo, "Elasticity solution of functionally graded carbon nanotube-reinforced composite cylindrical panel subjected to thermo mechanical load", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 87, pp. 214-226, 2016. DOI: 10.1016/j.compositesb.2015.09.060
- [14] P. T. Hieu and H. V. Tung, "Thermomechanical postbuckling of pressure-loaded CNT-reinforced composite cylindrical shells under tangential edge constraints and various temperature conditions", *Polymer Composites*, Vol. 41(1), pp. 244-257, 2020. DOI: 10.1002/pc.25365
- [15] A. Pourasghar and Z. Chen, "Thermoelastic response of CNT reinforced cylindrical panel resting on elastic foundation using theory of elasticity", *Composites Part B: Engineering*, Vol. 99, pp. 436-444, 2016. DOI: 10.1016/j.compositesb.2016.06.028
- [16] R. Moradi-Dastjerdi, G. Payganeh, and M. Tajdari, "Thermoelastic analysis of functionally graded cylinders reinforced by wavy CNT using a mesh-free method", *Polymer Composites*, Vol. 39, 2016. DOI: 10.1002/pc.24183
- [17] H. Q. Tran, M. T. Tran, and P. Nguyen-Tri, "A new four-variable refined plate theory for static analysis of smart laminated functionally graded carbon nanotube reinforced composite plates", *Mechanics of Materials*, Vol. 142, 2020, 103294. DOI: 10.1016/j.mechmat.2019.103294
- [18] N. T. Chung, D. T. N. Thu, and L. X. Thuy, "Dynamic analysis of stiffened functionally graded composite plates reinforced by carbon nanotubes subjected to blast loads using a new four-variable refined plate theory", *International Journal of Computational Materials Science and Engineering*, Vol. 12(03), 2023, 2350004. DOI: 10.1142/S2047684123500045
- [19] V. Q. Duong, N. D. Tran, D. T. Luat, and D. V. Thom, "Static analysis and boundary effect of FG-CNTRC cylindrical shells with various boundary conditions using quasi-3D shear and normal deformations theory", *Structures*, Vol. 44, pp. 828-850, 2022. DOI: 10.1016/j.istruc.2022.08.039

- [20] V. Q. Duong, L. H. Nguyen, N. D. Tran, T. L. Doan, and T. H. Tran, "Bending Analysis of Functionally Graded Carbon Nanotubes Reinforced Composite Cylindrical Shell Using Higher-Order Shear Deformation Theory", *Proceedings of the International Conference on Advanced Mechanical Engineering, Automation, and Sustainable Development 2021* (AMAS2021), 2022, Springer International Publishing. DOI: 10.1007/978-3-030-99666-6\_90
- [21] H. S. Shen and Y. Xiang, "Nonlinear bending of nanotube-reinforced composite cylindrical panels resting on elastic foundations in thermal environments", *Engineering Structures*, Vol. 80, pp. 163-172, 2014. DOI: 10.1016/j.engstruct.2014.08.038
- [22] V. Q. Duong, N. D. Tran, and T. L. Doan, "Static investigation of a functionally graded carbon nanotubes reinforced composite cylindrical shell, double-ended clamped subjected to external pressure loads", *Journal of Science and Technique*, Vol. 17(05), 2022. DOI: 10.56651/lqdtu.jst.v17.n05.528
- [23] N. D. Tran and T. T. Nguyen, "Thermoelastic response and boundary effect of cross-ply laminated cylindrical shells based on a quasi-3D type higher-order shear deformation theory", *International Journal of Pressure Vessels Piping*, Vol. 194, 2021, 104534. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2021.104534
- [24] H. Gharooni, M. Ghannad, and M. Z. Nejad, "Thermo-elastic analysis of clamped-clamped thick FGM cylinders by using third-order shear deformation theory", *Latin American Journal of Solids Structures*, Vol. 13, pp. 750-774, 2016. DOI: 10.1590/1679-78252254

# STATIC ANALYSIS OF FG-CNTRC CYLINDRICAL SHELL SUBJECTED TO THERMO-MECHANICAL LOAD WITH TEMPERATURE-DEPENDENT PROPERTIES

Abstract: This article presents a thermo-elastic static analysis of the FG-CNTRC cylinderical shell subjected to a thermo-mechanical load. The temperature is assumed to vary through the thickness, and the temperature distribution is derived from the heat transfer formula. The gorvening equations of thermoelastic analysis are established by using the higher-order shear deformation theory, including the transverse normal stress effect. The material properties of FG-CNTRC are temperature-dependent. Using an analytical solution that used the single trigonometric series and the Laplace transformation to solve these equations of shell with the different boundary conditions. The present approach is validated by comparing the results with published results. The effects of different boundary conditions and temperatures on the displacement and stresses of the FG-CNTRC cylindrical shells are investigated. The results show the jumping variation of the stress components at the boundary position. Besides, when the temperature increases, the maximum absolute value of the axial stress increases while that of the circumferential stress decreases.

**Keywords:** FG-CNTRC; thermoelastic; higher order shear deformation theory; cylindrical shell; temperature-dependent properties.

Nhận bài: 24/06/2023; Hoàn thiện sau phản biện: 20/02/2024; Chấp nhận đăng: 05/04/2024