Ành hưởng kích thước hình học của ứng xử trụ tròn thành mỏng chịu tải va đập dọc trục vận tốc thấp

- Lý Hùng Anh¹
- Lê Doãn Quang²
- ¹ Viện John von Neumann, ĐHQG-HCM

² Học Viện hàng không Việt Nam

(Bản nhận ngày 29 tháng 03 năm 2016, hoàn chỉnh sửa chữa ngày 23 tháng 05 năm 2016)

TÓM TẮT

Ảnh hưởng kích thước hình học trụ tròn thành mỏng lên các kiểu biến dạng khi chịu tải va đập dọc trục vận tốc thấp được nghiên cứu bằng phương pháp mô phỏng số. Mô hình là các mẫu trụ tròn nhôm 6060-T5 với các đường kính (D), độ dày (h) và chiều dài (L) khác nhau. Với tỉ lệ D/h và L/D thay đổi, trụ tròn có các kiểu biến dạng đối xứng, bất đối xứng, hỗn hợp hoặc biến dạng oần. Hai bộ kích hoạt biến dạng được nghiên cứu áp dụng để kết quả mô phỏng sát với thực nghiệm. Kết quả đề tài phù hợp với các kết quả thí nghiệm được công bố trên các bài báo quốc tế. Công thức biểu thị mối quán hệ vô thứ nguyên giữa lực va đập trung bình \overline{P}_m/M_0 và tỉ lệ D/h cho trụ tròn nhôm 6060-T5 cũng được đề xuất.

Từ khóa: Trụ tròn thành mỏng, va chạm dọc trục vận tốc thấp, biến dạng, mô phỏng số.

1. GIỚI THIỆU

Trụ tròn khi chịu va đập sẽ biến dạng thành các kiểu đối xứng, bất đối xứng hoặc bị oằn. Ba kiểu biến dạng thường gặp được trình bày trong Hình 1. Các nghiên cứu liên quan đến nguyên nhân vì sao xuất hiện các kiểu biến dạng như vậy chỉ được thực hiện từ đầu thập niên 80 và rất ít được tiếp tục cho đến thời điểm hiện tại. Một điểm đáng lưu ý là các nghiên cứu trước chủ yếu làm thực nghiệm, chỉ một vài nghiên cứu thực hiện bằng phương pháp mô phỏng số. Hiện nay nó vẫn là đề tài hấp dẫn vì mang tính ứng dụng cao, ví dụ như cơ cấu hấp thụ năng lượng khi va chạm trực diện của ô tô, kết cấu xây dựng, cơ cấu bảo vệ hành khách ở máy bay trực thăng...Ở nước ta hiện nay, chưa có phòng thí nghiệm liên quan và cũng chưa có nhiều nghiên cứu chuyên sâu đến vấn đề này. Vì vậy nghiên cứu tập trung tìm ra bộ kích hoạt biến dạng cho trụ tròn trong mô phỏng sao cho kết quả biến dạng phù hợp với thực tế.



Hình 1. Biến dạng đối xứng (a); Biến dạng hỗn hợp (b); Biến dạng bất đối xứng (c) [1]

2. CƠ SỞ LÝ THUYẾT

2.1 Trụ tròn chịu lực nén tĩnh dọc trục

Trụ tròn thành mỏng chịu lực tác dụng dọc trục sẽ có thể bị biến dạng đối xứng, Hình 2 (a), hoặc biến dạng bất đối xứng, Hình 2 (b) và (c). Lý thuyết tính toán tĩnh cho các trường hợp biến dạng đối xứng và bất đối xứng của ống trụ tròn được tóm tắt dựa trên kết quả nghiên cứu của Alexander [2], Pugsley và Macaulay [3].



Hình 2. Chế độ đối xứng (a); chế độ bất đối xứng (b) và (c) [1]

Chế độ biến dạng đối xứng

Alexander [2] giả thiết ống được làm từ khối vật liệu rắn lý tưởng và theo mô hình biến dạng đối xứng như trong Hình 3. Năng lượng được hấp thụ do ống bị biến dạng tạo thành một nếp gấp có giá trị là $A = P_m \times 2H$. Trong đó P_m là lực nén và 2*H* là chiều dài một nếp gấp. Hai thông số này được xác định trong công thức (1) và (2). Chi tiết quá trình xây dựng công thức tham khảo tài liệu [2].



Hình 3. Kiểu biến dạng đối xứng lý tưởng cho trụ tròn thành mỏng khi bị nén dọc trục [4]

$$\frac{P_m}{M_0} = 20.79 \left(\frac{2R}{h}\right)^{\frac{1}{2}} + 11.90$$
(1)

$$\frac{H}{R} = 1.76 \left(\frac{h}{2R}\right)^{\frac{1}{2}}$$
 (2)

 M_0 là moment uốn trên một đơn vị chu vi của ống tròn được tính trong công thức (3), trong đó σ_0 là ứng suất chảy dẻo của vật liệu

$$M_0 = \left(\frac{2\sigma_0}{\sqrt{3}}\right) \frac{h^2}{4} \tag{3}$$

Chế độ biến dạng bất đối xứng

Wierzbicki [5] đã tìm được công thức gần đúng cho lực va đập trung bình (6) và chiều dài nếp gấp (7), công thức này sát với các kết quả thực nghiệm hơn công thức (4) và (5):

$$\frac{P_m}{2\sigma_0\pi Rh} = 3.64 \left(\frac{h}{R}\right)^{\frac{2}{3}} \tag{6}$$

$$\frac{H}{R} = 0.816 \left(\frac{h}{2R}\right)^{\frac{1}{3}}$$
 (7)

Công thức (6) được viết lại theo M_0 như sau:

$$\frac{P_m}{M_0} = 62.88 \left(\frac{2R}{h}\right)^{\frac{1}{3}}$$
(8)

2.2 Trụ tròn chịu lực va đập dọc trục

Khi trụ tròn chịu tải va đập dọc trục, có hai yếu tố sau đây cần được bổ sung vào so với khi trụ chịu tải tĩnh.

<u>Ånh hưởng của khoảng va đập hữu hiệu</u>

Trên thực tế, các nếp gấp tạo thành đường cong dọc theo chiều dài như Hình 4, do vậy chiều dài một nếp gấp sẽ lớn hơn 2*H* như tính toán trong công thức (7). Hay nói cách khác, khi bị va đập trụ sẽ biến dạng dọc trục một khoảng hữu hiệu δ_e khi một nếp gấp được hoàn thành, khoảng cách này được tính theo công thức (9).

$$\delta_e = 2H - 2x_m - h \tag{9}$$



Hình 4. Nếp gấp tạo thành các đường cong dọc theo chiều dài [1]

Thêm vào đó Abramowicz [6] đã chứng minh được $x_m = 0.28 \times H/2$, vì vậy công thức δ_e được viết lại như sau:

$$\delta_e = 1.72H - h \tag{10}$$

Kết hợp công thức (2) và (10) thu được:

$$\frac{\delta_e}{2H} = 0.86 - 0.568 \left(\frac{h}{2R}\right)^{\frac{1}{2}}$$
(11)

 $\delta_e/2H$ được tìm thấy trong tài liệu tham khảo [7] với công thức (12) gọn hơn,

$$\frac{\delta_e}{2H} = 0.73 \tag{12}$$

Trang 36

Vì vậy khi ảnh hưởng của khoảng va đập hữu hiệu được xét tới thì lực va đập trung bình được tính theo các công thức (13) cho chế độ đối xứng (kết hợp (1) và (12)) và công thức (14) cho chế độ bất đối xứng (kết hợp (8) và (12)):

$$\frac{\overline{P}_{m}}{M_{0}} = \frac{20.79(2R/h)^{1/2} + 11.90}{0.86 - 0.568(2R/h)^{1/2}}$$
(13)

$$\frac{\overline{P}_m}{M_0} = 86.14 \left(2R/h\right)^{1/3}$$
(14)

Ảnh hưởng của tốc độ biến dạng vật liệu

Khi va đập có vận tốc lớn, lực quán tính sẽ gây ra ứng xử của vật liệu khác so với chịu tải nén gần tĩnh. Quan hệ giữa ứng suất – biến dạng rất nhạy đối với vận tốc va chạm, đại lượng này được gọi là độ nhạy biến dạng của vật liệu.

Rất nhiều bài báo sử dụng công thức thực nghiệm (15) của Cowper-Symonds:

$$\frac{\sigma_0^d}{\sigma_0} = 1 + \left(\dot{\varepsilon}/D_s\right)^{1/p} \tag{15}$$

Trong đó, hệ số Cowper-Symonds được chọn cho vật liệu nhôm 6060T5 là $D_s = 6844 \text{ s}^{-1}$ và p = 3.91.

Công thức (16) áp dụng cho chế độ nếp gấp đối xứng và (17) cho chế độ bất đối xứng, trong đó V là vận tốc va chạm,

_

$$\frac{\overline{P}_{m}}{M_{0}} = \left[\frac{20.79(2R/h)^{1/2} + 11.90}{0.86 - 0.568(2R/h)^{1/2}}\right] \times \left[1 + \left\{\frac{0.25V}{6844R\left[0.86 - 0.568(h/2)^{1/2}\right]}\right\}^{1/3.91}\right] \quad (16)$$

$$\frac{\overline{P}_{m}}{M_{0}} = 86.14(2R/h)^{1/3}\left[1 + \left(\frac{0.37V}{6844R}\right)^{1/3.91}\right] \quad (17)$$

3. MÔ HÌNH TÍNH

3.1 Phần tử lưới

Mô hình trụ tròn được xây dựng bằng phần tử tấm Belytschko-Lin-Tsay. Tỷ lệ giữa kích thước lưới và chu vi tiết diện ống (1/80) để tiết kiệm thời gian tính toán và kích thước này đã được nhiều nghiên cứu cho thấy rất thích hợp cho việc mô phỏng thành mỏng của trụ tròn khi bị biến dạng va đập. Vật nặng va đập được mô phỏng là phần tử rắn 8 nút.

3.2. Điều kiện biên và điều kiện tiếp xúc

Đáy trụ tròn được ngàm cứng các nút ở đáy, tránh bị xoay hoặc di chuyển, các phần khác được để tự do, Hình 5. Vật nặng va đập được cho vận tốc rơi ban đầu V (8-10 m/s).

Thuật toán tiếp xúc giữa vật va đập và trụ tròn có sẵn trong LS-DYNA là Automatic node to surface. Ngoài ra, thuật toán Automatic single surface cho trụ tròn cũng được sử dụng để các nếp gấp không xuyên vào nhau.



Hình 5. Điều kiện biên

3.3. Vật liệu

Mô hình vật liệu Piecewise Linear Plasicity được sử dụng, vật liệu đẳng hướng theo tiêu chuẩn Von Mises. Vật liệu được dùng để mô phỏng tính toán sử dụng nhôm 6060-T5 có tính chất sau: khối lượng riêng $\rho = 2700 \text{ kg/m3}$; mô đun đàn hồi Young E = 69.5 GPa; hệ số poisson v = 0.33; ứng suất chảy dẻo $\sigma_y = 180 \text{ MPa}$; ứng suất tới hạn $\sigma_{ult} = 212 \text{ MPa}$.

3.4 Mô hình kính hoạt biến dạng

Khi mô phỏng các mẫu trụ tròn thành mỏng chịu va đập bằng phần mềm LS-DYNA. Mẫu trụ tròn đối xứng lý tưởng, vật liệu đồng dạng, lực va đập thẳng đứng... do vậy theo lý thuyết kết quả biến dạng sẽ luôn đối xứng, điều này không phù hợp với thực tế. Để có được các biến dạng của trụ tròn tương tự như các thí nghiệm thực tế, các mô hình kích hoạt biến dạng được chọn như sau:

<u>Mô hình kích hoat 1:</u> Trụ tròn được tạo bởi 6 điểm A,B,C,D,E,F như Hình 6, tại các điểm F,B,D được cho lệch vào phía trong với kích thước 1% đường kính. So với kích thước đường kính D = 97 mm thì trụ tròn chỉ hơi méo tại 3 điểm A, E và C. Đây là các điểm dùng để kích hoạt biến dạng bất đối xứng phù hợp với thực tế.



Hình 6. Mô hình kích hoạt cho trụ tròn tạo biến dạng bất đối xứng

<u>Mô hình kích hoạt 2:</u> Tại khoảng giữa chiều cao trụ (L/2), điểm F lùi vào thêm 0.5% đường kính như trong Hình 7 nhằm mục đích kích hoạt kiểu biến dạng oằn phản ánh đúng thực tế khi tỷ lệ L/D và D/h phù hợp.



Hình 7. Mô hình kích hoạt cho trụ tròn tạo biến dạng oằn

4. KẾT QUẢ VÀ THẢO LUẬN

Trụ tròn nhôm được xây dựng 36 mô hình có các đường kính lần lượt là D = 48 mm và D =97 mm, đây là các trụ nhôm phổ biến trên thị trường. Bề dày *h* được thay đổi trong khoảng 0.4 mm đến 4.0 mm, chiều dài *L* trong khoảng từ 48 mm đến 576 mm để có các tỷ lệ *D/h* và *L/D* khác nhau (*D/h* = 12÷194; *L/D* = 1÷12). Khối lượng vật va đập cũng được thay đổi từ 5 kg đến 225 kg để tạo khoảng từ 2 nếp gấp trở lên.

Kết quả thu được là biểu đồ lực va đập tức thời theo chuyển vị. Lực va đập trung bình lý thuyết tùy vào kiểu biến dạng được tính theo công thức (16) hoặc (17). Lực va đập trung bình mô phỏng \overline{P}_m vị được tính theo công thức (18).

$$P_{m} = \frac{1}{\delta} \int_{0}^{\delta} P(\delta) d\delta$$
 (18)

Trong đó: $P(\delta)$ là lực va đập tức thời theo chuyển vị, δ là chuyển vị.

D x h (mm)	L/D	P _m t.bình (kN)	P _m 1.thuyết (kN)	Sai số (%)
97 x 4	1	142.82	144.62	1.2
97 x 3	1	89.94	89.45	0.5
48 x 1.2	1	16.30	16.24	0.4
97 x 2	1	47.70	47.29	0.9
97 x 2	1.8	47.81	6.68	2.5
97 x 4	2.5	137.91	142.73	3.4

Bảng 1: Kết quả lực va đập trung bình

Kết quả so sánh lực va đập trung bình trong mô phỏng và công thức lý thuyết của một số trường hợp cụ thể được trình bày trong Bảng 1. Sai số của hai giá trị này rất ít. Vì vậy mô hình tính bằng phương pháp mô phỏng đáng tin cậy. Ví dụ cụ thể mô tả trong Hình 8 cho trường hợp ống tròn có D = 48 mm, t = 1.2 mm, L = 48mm chịu tải va đập có khối lượng m = 8 kg và vận tốc V = 8 m/s.



Hình 8. Biểu đồ lực va đập theo chuyển vị

4.1 Kết quả

Kết quả biến dạng của 36 mẫu ống nhôm 6060-T5 được tóm tắt thành các kiểu biến dạng như sau.

Mẫu biến dang đối xứng tiêu biểu

Biến dạng đối xứng cho ta các nếp gấp có hình tròn đều được biểu thị trong Hình 9 dưới đây.



Mẫu biến dạng bất đối xứng tiêu biểu

Biến dạng bất đối xứng biểu thị các nếp gấp có hình tam giác, tứ giác, ngũ giác, lục giác...được biểu thị trong Hình 10.



Hình 10. *D*=97 mm, *h*=1 mm, *L*=242 mm

Mẫu biến dạng hỗn hợp tiêu biểu

Biến dạng hỗn hợp là biến dạng khi 2 hoặc 3 nếp gấp đầu là đối xứng, các nếp gấp tiếp theo là bất đối xứng được biểu thị trong Hình 11.



Hình 11. *D*=97 mm, *h*=1 mm, *L*=97 mm

Mẫu biến dạng oằn tiêu biểu

Biến dạng oằn là biến dạng làm mẫu thí nghiệm bị oằn, gãy trong quá trình thí nghiệm được biểu thị trong Hình 12.



Hình 12. D=48 mm, h=3 mm, L=97480 mm

4.2 Đánh giá kết quả

Kết quả tính bằng phương pháp phần tử hữu hạn cho các mẫu ống nhôm trong bài báo này được tổng hợp theo biểu đồ Hình 13 (b) theo các tỷ lệ kích thước hình học. Để kiểm nghiệm tính chính xác của kết quả mô phỏng, kết quả thực nghiệm từ nghiên cứu của S.R. Guillow và cộng sự [8] được sử dụng để so sánh. Kết quá thí nghiệm trên các mẫu ống nhôm tròn 6060-T5 được trình bày trong Hình 13 (a).



Hình 13. (a) Các kiểu biến dạng từ kết quả thực nghiệm của S.R. Guillow và cộng sự [8] trên trụ nhôm tròn 6060-T5 chịu tải gần tĩnh; (b) Các kiểu biến dạng của trụ nhôm tròn 6060- T5 thu được từ tính toán mô phỏng

<u>Kiểu biến dạng đối xứng:</u> Kiểu biến dạng đối xứng xảy ra khi tỉ lệ D/h < 50 và L/D < 2.5 tức là khi trụ tròn bề dày lớn và chiều dài giới hạn. Kết quả này phù hợp với thực nghiệm của Guillow S.R. và cộng sự [8] và cũng tương đương với kết quả thực nghiệm trên trụ tròn bằng thép mềm của Abramowicz W. và Jones N. [1], các tác giả đã chứng minh bằng cả lý thuyết và thực nghiệm rằng kiểu biến dạng đối xứng chỉ xảy ra khi $R/h \le 37.8$ (tương đương $D/h \le 65.6$). Trong thử nghiệm đối với trụ nhôm tròn 6061-T6 có tỉ lệ D/h = 25.4 và D/h = 47 của Mamalis và

Johnson [9] cũng thu được hiện tượng biến dạng đối xứng trong suốt quá trình chịu lực dọc trục.

<u>Kiểu biến dạng bất đối xứng:</u> Kiểu biến dạng bất đối xứng được tìm thấy khi tỉ lệ D/h > 90, khi trụ tròn có tỉ lệ D/h tăng, số lượng cạnh của nếp gấp cũng có xu hướng tăng từ 3 đến 6 cạnh, tuy nhiên cũng có các mẫu thí nghiệm có cùng tỷ lệ D/h nhưng có số cạnh biến dạng khác nhau. Kết quả này cũng tương tự như thí nghiệm của Guillow S.R. và cộng sự, khi D/h > 100 hiện tượng bất đối xứng bắt đầu xảy ra [8].

<u>Kiểu biến dạng hỗn hợp</u>: Kiểu biến dạng hỗn hợp được tìm thấy phần lớn ở vùng trụ tròn có tỉ lệ kích thước D/h > 2; 40 < L/D < 90.

<u>Kiểu biến dang oằn:</u> Biến dạng oằn, gãy xảy ra trong vùng có D/h < 40 và L/D > 6. Tại điểm L/D = 6; D/h = 24. Biết dạng oằn mới bắt đầu xảy ra, trụ có xu hướng nghiêng, oằn. Khi tăng $D/h \ge$ 8 hiện tượng trụ bị gãy gập xảy ra.

So sánh kết quả ở hai biểu đồ hình 13 (a) và (b) trên, các kiểu biến dạng của trụ tròn xảy ra ở các vùng tương đối giống nhau, một số khác biệt như được liệt kê như sau:

•Theo các thí nghiệm của Guillow S.R. và cộng sự [8], tại vùng có tỉ lệ $D/h = 10 \div 20$; $L/D = 3 \div 4$ có xảy ra kiểu biến dạng khác, đây là kiểu biến dạng mà trụ tròn chỉ tạo ra một nếp gấp hoặc nén bình thường. Ở kết quả tính toán mô phỏng cho ra kiểu biến dạng hỗn hợp.

•Tại vùng có tỷ lệ $D/h = 10 \div 20$; $L/D = 4 \div 6$, theo kết quả tính toán xảy ra hiện tượng biến dạng hỗn hợp trong khi theo thực nghiệm trụ tròn bị oằn.

Sự khác biệt này được giải thích là do sự khác biệt về vận tốc va đập của vật nặng. Thí nghiệm của Guillow S.R. và cộng sự sử dụng tải gần tĩnh. Như vậy kết quả tính toán thu được phù hợp với các thực nghiệm ở các bài báo có uy tín khoa học cao như đã nêu trên.

Ảnh hưởng của các kích thước hình học tới lực va đập trung bình

Khi thí nghiệm và tính toán kết cấu chịu tải va đập, một thông số được viết dưới dạng vô thứ nguyên rất được quan tâm, có ảnh hưởng tới tính nén dọc trục, đó là \overline{P}_m/M_0 .

Kết quả tính lực va đập trung bình vô thứ nguyên so với *D/h* được trình bày trong Hình 14. Dựa vào các công thức thực nghiệm của Abramowicz W. và Jones N. [1], của Guilow S.R. [8] và các kết quả từ biểu đồ này, công thức (20) được đề xuất cho trụ nhôm tròn 6060-T5 chịu tải va đập.

$$\frac{\bar{P}_m}{M_0} = 65 \frac{D^{0.38}}{h}$$
(20)





Công thức này có sự khác biệt với công thức của Abramowicz W. và Jones N. [1] tìm ra năm 1984 cho biến dạng không đối xứng của mẫu thí nghiệm là thép mềm chịu tải va đập dọc trục là $\frac{\overline{P}_m}{M_0} = 86.14 \frac{D^{0.33}}{h}$ và của Guilow S.R. [8] cho hợp kim nhôm 6060-T5 chịu tải gần tĩnh là $\frac{\overline{P}_m}{M_0} = 72.3 \frac{D^{0.32}}{h}.$

5. KÉT LUÂN

Trong tính toán mô phỏng bằng phương pháp phần tử hữu hạn, để trụ tròn biến dạng theo các kiểu đối xứng, bất đối xứng, hỗn hợp và oằn trong mô hình đối xứng (đối xứng về hình học và điều kiện biên) là điều không thể. Do đó việc áp dụng mô hình kích hoạt biến dạng là rất cần thiết. Nghiên cứu này hai mô hình kích hoạt đã được áp dụng.

Kích thước hình học D, h và L có ảnh hưởng rất lớn đến các kiểu biến dạng của trụ tròn thành mỏng khi chịu va đập vận tốc thấp. Kiểu biến dạng đối xứng xuất hiện khi tỉ lệ D/h < 50 và L/D < 2.5, kiểu biến dạng bất đối xứng khi tỉ lệ D/h >

90. Ở kiểu biến dạng bất đối xứng khi tỉ lệ D/htăng, số lượng cạnh của nếp gấp cũng có xu hướng tăng từ 3 đến 6 cạnh, tuy nhiên cũng có các mẫu thí nghiệm có cùng tỉ lệ D/h nhưng có số cạnh biến dạng khác nhau. Kiểu biến dạng hỗn hợp xảy ra phần lớn ở vùng trụ tròn có tỉ lệ kích thước D/h > 2; L/D trong khoảng 40÷90.

Dựa trên các kết quả tính toán mô phỏng, công thức biểu thị mối quan hệ giữa lực va đập trung bình vô thứ nguyên P_m/M_0 và tỉ lệ D/h được đề xuất cho trụ tròn nhôm 6060-T5 là

$$\frac{\overline{P}_m}{M_0} = 65 \frac{D^{0.38}}{h}$$

Lời cảm ơn: Nghiên cứu được tài trợ bởi Đại học Quốc gia Thành phố Hồ Chí Minh (ĐHQG-HCM) trong khuôn khổ Đề tài mã số C2015-42-01

Geometrical effect on behavior of thinwalled cylindrical tubes subjected to low velocity impact load

• Ly Hung Anh¹

• Le Doan Quang²

¹ John von Neumann Institute, VNU-HCM

² Vietnam Aviation Academy

ABSTRACT

Geometrical effect on deformation of thinwalled cylindrical tubes subjected to low velocity impact load is conducted using numerical simulation. The cylindrical tube models are made by 6060-T5 Aluminum with difference of diameter (D), thickness (h) and length (L). If ratios of D/h and L/D are changed, deformation modes are also varied as symmetric, asymmetric, mix or buckling. Two sets of trigger applied to model to activate deformation modes. Results obtained from numerical simulation agree very well with experimental results published in the international journal articles. The formula indicated relationship between the non-dimension mean crushing force \bar{P}_m/M_0 and D/h is also proposed.

Key words: thin-walled tube, low velocity impac load, deformation, numerical simulation.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Abramowicz W., Jones N., Dynamic axial crushing of circular tubes, International Journal of Impact Engineering, 2, 263-281 (1984).
- [2].Alexander J.M. An approximate analysis of collapse of thin-walled cylindrical shells under axial loading, Quarterly Journal of Mechanical and Applied Mathematics, 13, 10–15 (1960).
- [3].Pugsley A., Macaulay M. The large scale crumpling of thin cylindrical columns, Quarterly Journal of Mechanical and Applied Mathematics, 13, 1-9 (1960).
- [4].Johnson W., Impact strength of materials, Quarterly Journal of Mechanical and Applied Mathematics, 13, 1–9 (1960).
- [5].Wierzbicki T., Optimum design of integrated front panel against crash, Report for Ford Motor Company (1983).

- [6].Abramowicz W., The effective crushing distance in axially compressed thin-walled metal columns, International Journal of Impact Engineering, 1, 309-317 (1983).
- [7].Abramowicz W., Jones N., Dynamic axial crushing of square tubes. International Journal of Impact Engineering, 2, 179-208 (1984).
- [8].Guillow S.R., Lu G., Grzebieta R.H., Quasi static axial compression of thin-walled circular aluminum tubes, International Journal of Mechanical Sciences, 43, 2103-2123 (2001).
- [9].Mamalis A.G., Johnson W., The quasi-static crumpling of thin-walled circular cylinders and frusta under axial compression, International Journal of Mechanical Sciences, 25, 713-732(1983).