HNUE JOURNAL OF SCIENCE DOI: 10.18173/2354-1059.2022-0001
Natural Sciences, 2022, Volume 67, Issue 1, pp. 3-9
This paper is available online at http://stdb.hnue.edu.vn

BỐN CÁCH CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ PAPPUS

Trần Đức Anh
Khoa Toán Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Tóm tắt. Định Pappus là định lí cổ điển trong hình học. Chúng tôi đưa ra bốn cách chứng minh định lí Pappus. Mỗi cách chứng minh vận dụng các kiến thức rất khác nhau.
Từ khóa: Định lí Pappus, Hình học tuyến tính, Hình học xạ ảnh, Hình học afin, Hình học Euclid, đường cong đại số.

1. Mở đầu

Định lí Pappus là một định lí độc đáo trong hình học. Định lí này là một phần kiến thức bắt buộc thuộc chương đầu tiên về Hình học afin, trong học phần Hình học tuyến tính 1 & 2, gồm 6 tín chỉ, dành cho sinh viên Khoa Toán Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội [1]. Đây là một kết quả cổ điển, đẹp đẽ và có hình thức phát biểu đơn giản. Tuy nhiên, thực tế giảng dạy lại cho thấy định lí này chưa được khai thác một cách tối đa để làm lợi cho quá trình học tập của sinh viên. lí do cơ bản là do thiếu thời gian, nên định lí chỉ được đề cập một cách sơ lược. Ví dụ giáo trình [2], trang 189-190, chỉ nêu một chứng minh cho định lí Pappus trong chương đầu tiên về Hình học afin. Để sinh viên có thể hiểu bài, các tác giả nêu ra một phiên bản mà có thể áp dụng các phép biến hình như phép vị tự hoặc phép tịnh tiến. Phương pháp chứng minh đó có được nhờ vào việc chọn đường thẳng vô cùng, một kĩ thuật của hình học xạ ảnh, và do đó, sinh viên sẽ phải đợi một khoảng thời gian rất lâu sau này mới hình dung được tại sao đó lại là một chứng minh cho định lí Pappus.

Rất may là chúng ta có thể tìm thấy một chứng minh thuần túy hình học giải tích trong Giáo trình [3], trang 31 và trang 310-311. Tuy vậy, không phải sinh viên nào cũng có tài liệu này, vì vậy, chúng tôi sẽ trình bày lại chứng minh này kèm theo các chú giải chi tiết hơn.

Ngoài chứng minh này, chúng tôi đưa ra thêm ba chứng minh khác, bao gồm: một cách sử dụng tỉ số kép mô phỏng lại theo chứng minh định lí Pascal [2], trang 326-327; một cách sử dụng thuần túy định nghĩa xạ ảnh và biến đổi véc-tơ; một cách cuối sử dụng kĩ thuật kiểu đường cong đại số.

Mỗi cách chứng minh sẽ đem lại những góc nhìn thú vị cho định lí Pappus mà tài liệu hiện hành chưa làm sáng tỏ cho sinh viên. Bài viết này nhằm hai mục đích: Cung cấp chứng minh chi

Ngày nhận bài: 1/3/2022. Ngày sửa bài 15/3/2022. Ngày nhận đăng: 28/3/2022.
Tác giả liên hệ: Trần Đức Anh. Địa chỉ e-mail: ducanh@hnue.edu.vn

tiết cho định lí nhằm làm tài liệu tham khảo cho sinh viên khoa Toán-Tin ĐHSP Hà Nội và làm sáng tỏ các khía cạnh kĩ thuật và phạm vi kiến thức của từng chứng minh.

2. Nội dung nghiên cứu

Đầu tiên, chúng tôi nêu phát biểu định lí Pappus trong môi trường xạ ảnh.

Định lí Pappus. *Trong mặt phẳng xạ ảnh thực $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ cho hai đường thẳng $\mathcal{D}$ và $\mathcal{D}'$ phân biệt. Trên $\mathcal{D}$ lấy ba điểm phân biệt A, B, C và trên $\mathcal{D}'$ lấy ba điểm A', B', C' sao cho sáu điểm này đều khác giao điểm $\mathcal{D} \cap \mathcal{D}'$. Giả sử các đường thẳng BC' cắt $B'C$ tại A'', CA' cắt $C'A$ tại B'' và AB' cắt $A'B$ tại C''. Khi đó, ba điểm A'', B'', C'' thẳng hàng.*

2.1. Chứng minh thứ nhất - Chứng minh kiểu hình học giải tích

Như đã nêu ở phần mở đầu, chứng minh này được trình bày lại theo Giáo trình [3], trang 31 và trang 310-311, với các chi tiết được làm rõ hơn.

Đầu tiên, ta phát biểu lại định lí trong môi trường không gian afin $\mathbb{R}^2$.

Định lí Pappus. *Cho hai đường thẳng $\mathcal{D}$ và $\mathcal{D}'$ trong mặt phẳng $\mathbb{R}^2$ cắt nhau tại điểm O. Trên $\mathcal{D}$ lấy ba điểm $A, B, C \neq O$ và trên $\mathcal{D}'$ lấy ba điểm $A', B', C' \neq O$. Giả sử các đường thẳng BC' cắt $B'C$ tại A'', CA' cắt $C'A$ tại B'' và AB' cắt $A'B$ tại C''. Khi đó, ba điểm A'', B'', C'' thẳng hàng.*

Chứng minh. Ta chọn một mục tiêu afin cho $\mathbb{R}^2$ sao cho O là gốc tọa độ và $\mathcal{D}$ là trục hoành, $\mathcal{D}'$ là trục tung. Khi đó, tọa độ các điểm có dạng $A(\alpha, 0), B(\beta, 0), C(\gamma, 0)$ và $A'(0, \alpha'), B'(0, \beta'), C'(0, \gamma')$.

Phương trình đường thẳng BC' là $\dfrac{x}{\beta} + \dfrac{y}{\gamma'} = 1$ và phương trình đường thẳng $B'C$ là $\dfrac{x}{\gamma} + \dfrac{y}{\beta'} = 1$. Để đơn giản kí hiệu, ta đặt lại

$$\frac{1}{\alpha} = a,\ \frac{1}{\beta} = b,\ \frac{1}{\gamma} = c$$

và

$$\frac{1}{\alpha'} = a',\ \frac{1}{\beta'} = b',\ \frac{1}{\gamma'} = c'.$$

Giải hệ phương trình giao điểm ta thu được tọa độ $A''\left(\dfrac{b' - c'}{bb' - cc'}, \dfrac{b - c}{bb' - cc'}\right)$.

Do tính đối xứng, nên dễ dàng suy ra các tọa độ

$$B''\left(\frac{c' - a'}{cc' - aa'}, \frac{c - a}{cc' - aa'}\right) \text{ và } C''\left(\frac{a' - b'}{aa' - bb'}, \frac{a - b}{aa' - bb'}\right).$$

Ta biết rằng ba điểm $A, B, C \in \mathbb{R}^2$ thẳng hàng khi và chỉ khi

$$\begin{vmatrix} x_A & x_B & x_C \\ y_A & y_B & y_C \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Do đó, ta cần tính định thức

$$\begin{vmatrix} \dfrac{b'-c'}{bb'-cc'} & \dfrac{c'-a'}{cc'-aa'} & \dfrac{a'-b'}{aa'-bb'} \\ \dfrac{b-c}{bb'-cc'} & \dfrac{c-a}{cc'-aa'} & \dfrac{a-b}{aa'-bb'} \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{(bb'-cc')(cc'-aa')(aa'-bb')} \begin{vmatrix} b'-c' & c'-a' & a'-b' \\ b-c & c-a & a-b \\ bb'-cc' & cc'-aa' & aa'-bb' \end{vmatrix}$$

Định thức ở bên vế phải có ba cột có tổng bằng cột 0 nên ba cột phụ thuộc tuyến tính, do đó định thức bằng 0. Ta kết thúc chứng minh thứ nhất. □

2.2. Chứng minh thứ hai - Bằng tỉ số kép xạ ảnh

Trước khi vào chứng minh, người đọc cần biết các ý cơ bản sau: Phép chiếu xuyên tâm từ đường thẳng xạ ảnh này sang đường thẳng xạ ảnh khác là một đẳng cấu xạ ảnh. Mỗi đẳng cấu xạ ảnh luôn bảo toàn tỉ số kép của bốn điểm thẳng hàng.

Chứng minh. Ta xét thêm hai điểm $A'C \cap AB' = \{E\}$ và $AC' \cap B'C = \{F\}$. Xét phép chiếu xuyên tâm B'' từ đường thẳng AB' lên $B'C$. Phép chiếu này biến các điểm $B' \mapsto B'$, $E \mapsto C$ và $A \mapsto F$. kí hiệu $[x, y, z, t]$ là tỉ số kép xạ ảnh của bốn điểm thẳng hàng x, y, z, t. Ta có

$$\begin{aligned}
[A, C'', E, B'] &= [A'A, A'C'', A'E, A'B'] \text{ (tỉ số kép của chùm đường thẳng qua } A'\text{)} \\
&= [A, B, C, O] \text{ (O là giao điểm của } \mathcal{D} \text{ và } \mathcal{D}'\text{)} \\
&= [C'A, C'B, C'C, C'O] \\
&= [F, A'', C, B'].
\end{aligned}$$

Từ đây ta suy ra điểm A'' là ảnh của C'' qua phép chiếu xuyên tâm B'' nói trên, hay nói cách khác A'', B'', C'' thẳng hàng. □

2.3. Chứng minh thứ ba - Thuần túy định nghĩa hình học xạ ảnh và biến đổi véc-tơ kiểu đại số tuyến tính

Chứng minh. Theo định nghĩa của không gian xạ ảnh, mỗi điểm xạ ảnh trong $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ chính là một đường thẳng tuyến tính trong $\mathbb{R}^3$ và ta có thể coi mỗi điểm được đại diện bởi một véc-tơ cơ sở. Giả sử $A = [a]$ (tức là a là véc-tơ đại diện cho điểm A), $B = [b], C = [c], A' = [a'], B' = [b'], C' = [c']$.

Trang bị cho $\mathbb{R}^3$ tích vô hướng để ta có thể định nghĩa được tích có hướng để tính toán pháp véc-tơ cho các không gian véc-tơ hai chiều.

Ta có giao điểm

$$\begin{aligned} A'' = BC' \cap B'C &= \operatorname{span}\{b, c'\} \cap \operatorname{span}\{b', c\} \\ &= \operatorname{span}\{(b \wedge c') \wedge (b' \wedge c)\}. \end{aligned}$$

Ở đây, $\operatorname{span}\{b, c'\}$ là không gian véc-tơ sinh bởi hai véc-tơ b, c'. Như vậy, ta tính được

$$A'' = [(b \wedge c') \wedge (b' \wedge c)].$$

Tương tự

$$B'' = [(c \wedge a') \wedge (c' \wedge a)]$$

và

$$C'' = [(a \wedge b') \wedge (a' \wedge b)].$$

Như vậy, để chứng minh ba điểm A'', B'', C'' thẳng hàng, ta cần chứng minh ba véc-tơ đại diện trên là phụ thuộc tuyến tính. Do các điểm A, B, C thẳng hàng có sẵn theo giả thiết, nên ta có thể giả sử $c = a + b$ cho tiện tính toán. Tương tự, $c' = a' + b'$.

Ta có các tính toán sau: Véc-tơ đại diện của A'' là

$$\begin{aligned} (b \wedge c') \wedge (b' \wedge c) &= [b \wedge (a' + b')] \wedge [b' \wedge (a + b)] \\ &= (b \wedge a' + b \wedge b') \wedge (b' \wedge a + b' \wedge b) \\ &= (b \wedge a') \wedge (b' \wedge a) + (b \wedge a' + a \wedge b') \wedge (b' \wedge b). \end{aligned}$$

Véc-tơ đại diện của B'' là

$$\begin{aligned} (c \wedge a') \wedge (c' \wedge a) &= [(a + b) \wedge a'] \wedge [(a' + b') \wedge a] \\ &= (a \wedge a' + b \wedge a') \wedge (a' \wedge a + b' \wedge a) \\ &= (b \wedge a') \wedge (b' \wedge a) + (b \wedge a' + a \wedge b') \wedge (a' \wedge a). \end{aligned}$$

Véc-tơ đại diện của C'' là

$$(a \wedge b') \wedge (a' \wedge b) = -(b \wedge a') \wedge (b' \wedge a).$$

Do đó, chứng minh ba điểm A'', B'', C'' thẳng hàng tương đương với chứng minh ba véc-tơ $(b \wedge a' + a \wedge b') \wedge (b' \wedge b), (b \wedge a' + a \wedge b') \wedge (a' \wedge a), (b \wedge a') \wedge (b' \wedge a)$ phụ thuộc tuyến tính.

Ta cần các tính chất cơ bản của tích có hướng trong $\mathbb{R}^3$ như sau:

Tính chất của tích có hướng

(i) $a \wedge (b \wedge c) = (a \cdot c)b - (a \cdot b)c$. Ở đây, $a \cdot c$ là tích vô hướng giữa hai véc-tơ a và c.

(ii) $(a \wedge b) \wedge (a \wedge c) = [a, b, c]a$, trong đó $[a, b, c]$ là tích hỗn tạp của ba véc-tơ a, b, c.

(iii) $(a \wedge b) \cdot c = [a, b, c]$.

Các tính chất này xem ở sách [4], trang 198. Nhờ đó, ta có các tính toán sau. Đối với véc-tơ thứ nhất,

$$\begin{aligned}(b \wedge a' + a \wedge b') \wedge (b' \wedge b) &= (b \wedge a') \wedge (b' \wedge b) + (a \wedge b') \wedge (b' \wedge b) &\quad (2.1)\\ &= -[b, a', b'] \cdot b - [b', a, b] \cdot b'. &\quad (2.2)\end{aligned}$$

Ta tính toán véc-tơ thứ hai:

$$\begin{aligned}(b \wedge a' + a \wedge b') \wedge (a' \wedge a) &= (b \wedge a') \wedge (a' \wedge a) + (a \wedge b') \wedge (a' \wedge a) &\quad (2.3)\\ &= -[a', b, a] \cdot a' - [a, b', a'] \cdot a. &\quad (2.4)\end{aligned}$$

Đối với véc-tơ thứ ba,

$$\begin{aligned}(b \wedge a') \wedge (b' \wedge a) &= [(b \wedge a') \cdot a]b' - [(b \wedge a') \cdot b']a &\quad (2.5)\\ &= [b, a', a] \cdot b' - [b, a', b'] \cdot a. &\quad (2.6)\end{aligned}$$

Ngoài ra, nếu đảo chỗ các véc-tơ thì véc-tơ thứ ba có biểu diễn thứ hai như sau

$$\begin{aligned}(b \wedge a') \wedge (b' \wedge a) &= -(b' \wedge a) \wedge (b \wedge a') &\quad (2.7)\\ &= -[(b' \wedge a) \cdot a'] \cdot b + [(b' \wedge a) \cdot b] \cdot a' &\quad (2.8)\\ &= -[b', a, a'] \cdot b + [b', a, b] \cdot a'. &\quad (2.9)\end{aligned}$$

Giả sử đường thẳng AB và $A'B'$ cắt nhau tại điểm O. Khi đó, tồn tại các số thực k, l, k', l' sao cho

$$ka + lb = k'a' + l'b'$$

(véc-tơ này đại diện cho điểm O).

Ta có

$$\begin{aligned}l' \cdot (2.2) - k' \cdot (2.6) &= -[b, a', b'] \cdot (l'b - k'a) - [l'b' + k'a', a, b] \cdot b' &\quad (2.10)\\ &= [b, a', b'] \cdot (k'a - l'b) - \underbrace{[ka + lb, a, b]}_{=0} \cdot b' &\quad (2.11)\end{aligned}$$

và

$$k' \cdot (2.4) - l' \cdot (2.9) = -\underbrace{[k'a' + l'b', b, a]}_{=0} \cdot a' - [a, b', a'](k'a - l'b). \quad (2.12)$$

Do đó, các véc-tơ (2.2), (2.4), (2.6) (trong đó (2.6) và (2.9) cùng là véc-tơ thứ ba) phụ thuộc tuyến tính. Ta có điều phải chứng minh.

□

2.4. Chứng minh thứ tư - Theo phương pháp đại số kiểu đường cong đại số

Chứng minh. Chứng minh này dựa vào Định lí 3.1 theo sách của Robert Walker [5], trang 59 có nội dung như sau:

Định lí 3.1. (theo tài liệu [6]) *Nếu hai đường cong có bậc m và bậc n có chung nhiều hơn mn điểm thì chúng có chung một thành phần.*

Ta hiểu đường cong trong mặt phẳng xạ ảnh $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ là đối tượng được đại diện bởi đa thức thuần nhất trên $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ và khi hai đường cong có chung một thành phần thì ta hiểu là hai đa thức có chung nhân tử không tầm thường.

Ta xét hai đường bậc ba xác định bởi các đường thẳng AB', BC', CA', kí hiệu là F, và $A'B, B'C, C'A$, kí hiệu bởi G. Khi đó, F và G là hai đường bậc ba có chung 9 điểm: $A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''$.

Gọi O là giao điểm của $\mathcal{D}$ và $\mathcal{D}'$. Do F và G đều không đi qua O nên ta tìm được các số thực $a, b \neq 0$ sao cho $aF + bG$ là đường bậc ba đi qua điểm O.

Khi đó, đường cong bậc ba $aF + bG$ này có chung bốn điểm với đường bậc một $\mathcal{D}$ và $\mathcal{D}'$. Nên theo định lí 3.1 [5], trang 59 nêu ở trên, $aF + bG$ có chung thành phần với $\mathcal{D}$ và $\mathcal{D}'$.

Do $\mathcal{D}$ và $\mathcal{D}'$ đều là bậc một nên chúng bất khả quy, do đó, $aF + bG$ nhận $\mathcal{D}$ và $\mathcal{D}'$ là thành phần của $aF + bG$.

Nhưng do $aF + bG$ là đường bậc ba, nên điều này dẫn tới đa thức $aF + bG$ có thêm một thành phần bậc một nữa ngoài $\mathcal{D}$ và $\mathcal{D}'$ và thành phần này bắt buộc phải chứa ba điểm A'', B'', C''. Từ đó suy ra ba điểm A'', B'', C'' thẳng hàng. □

2.5. Bình luận thêm

Mỗi chứng minh sẽ đóng góp các góc nhìn khác nhau về bài toán và sử dụng một mảng kiến thức khác nhau, cho phép người học thấy được kiến thức được vận dụng sinh động ra sao trong thực tiễn. Từ thực tiễn dạy học, chúng tôi thấy rằng việc đưa ra các chứng minh khác nhau sẽ góp phần làm cho việc học của sinh viên trở nên tốt hơn vì họ thấy được sức mạnh của các kiến thức được học ở nhà trường, chứ không đơn giản là những kiến thức chỉ dùng để đi thi.

Chứng minh thứ nhất chỉ đòi hỏi các kiến thức đơn giản về hình học giải tích, viết phương trình đường thẳng chắn, điều kiện các điểm thẳng hàng theo kiểu định thức. Chứng minh này phù hợp cho sinh viên năm 1-2 giúp ôn luyện các kiến thức cơ bản về phương trình, hệ phương trình.

Chứng minh thứ hai đòi hỏi người học phải nắm được khái niệm tỉ số kép, phép chiếu xuyên tâm là biến đổi xạ ảnh. Chứng minh này là một ứng dụng tốt về tỉ số kép, một bất biến của hình học xạ ảnh.

Chứng minh thứ ba đòi hỏi người học phải nắm được các kĩ thuật về tích véc-tơ. Đây là mảng kiến thức không phải sinh viên nào cũng nắm được vì nó nằm ở lưng chừng các môn học:

Đại số tuyến tính thì không dạy tới, vì khối lượng kiến thức đã quá nhiều, mà Hình học tuyến tính lại chưa chú trọng mảng tính toán này. Do đó, chứng minh thứ ba dùng để minh họa cho người học thấy được sức mạnh của kĩ thuật tính toán véc-tơ. Phù hợp cho sinh viên chất lượng cao hoặc sinh viên năm 3 trở lên.

Chứng minh thứ tư đòi hỏi người học phải có kiến thức nhập môn về đường cong đại số, tuy không khó, nhưng đòi hỏi người học phải tự học thêm ngoài, phù hợp với những sinh viên có nhu cầu làm nghiên cứu khoa học sinh viên.

3. Kết luận

Bài báo đưa ra bốn chứng minh cho định lí Pappus từ các cách tiếp cận khác nhau: Hình học giải tích, tỉ số kép xạ ảnh, đại số tuyến tính và tính toán véc-tơ và cuối cùng là phương pháp đại số kiểu đường cong đại số. Mỗi cách chứng minh cung cấp một góc nhìn cùng các ưu và nhược điểm khác nhau, từ đó tác giả mong muốn bài báo sẽ là một tư liệu học tập tốt cho sinh viên và học viên cao học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Trường Đại học Sư phạm Hà Nội, 2020. Chương trình Giáo dục đại học, Ngành sư phạm Toán học, NXB Đại học Sư phạm.

[2] Đỗ Đức Thái (chủ biên), Phạm Việt Đức, Phạm Hoàng Hà, 2013. *Giáo trình Đại số tuyến tính và Hình học tuyến tính*, NXB Đại học Cần Thơ.

[3] Jean-Marie Monier, 2001. *Hình học, Giáo trình Toán - tập 7*, NXB Giáo dục Việt Nam.

[4] Marcel Berger, 1987. *Geometry I.* Translated from the 1977 French original by M. Cole and S. Levy. Fourth printing of the 1987 English translation [MR0882541]. Universitext. Springer-Verlag, Berlin, 2009. xiv+428 pp. ISBN: 978-3-540-11658-5.

[5] Robert J. Walker, 1978. *Algebraic curves*. Reprint of the 1950 edition. Springer-Verlag, New York-Heidelberg. x+201 pp. ISBN: 0-387-90361-5.

ABSTRACT

Four proofs for Pappus's theorem

Tran Duc Anh

Faculty of Mathematics-Informatics, Hanoi National University of Education

Pappus's theorem is a classical result in geometry. We present four proofs for Pappus's theorem. Each proof makes use of different tools and techniques.

Keywords: Pappus's theorem, affine geometry, euclidean geometry, projective geometry, algebraic curves.