HNUE JOURNAL OF SCIENCE DOI: 10.18173/2354-1059.2021-0001
Natural Sciences, 2021, Volume 66, Issue 1, pp. 3-11
This paper is available online at http://stdb.hnue.edu.vn

CHỨNG MINH ĐỊNH LÍ GAUSS-BONNET ĐỊA PHƯƠNG

Trần Đức Anh
Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Tóm tắt. Chúng tôi trình bày một chứng minh đầy đủ và ngắn gọn cho định lí Gauss-Bonnet, một định lí đặc sắc của Hình học vi phân, nêu lên mối liên hệ giữa tính hình học vi phân và tính tôpô, tuy nhiên, kết quả này lại bị bỏ qua trong Chương trình mới dành cho sinh viên Khoa Toán-Tin, cũng như học viên cao học. Chứng minh dựa hoàn toàn vào định lí Stokes.
Từ khóa: Gauss-Bonnet, độ cong Gauss, độ cong trắc địa, hình học vi phân, dạng liên kết, định lí Stokes.

1. Mở đầu

Định lí Gauss-Bonnet là một kết quả đặc sắc của hình học vi phân cổ điển, nêu lên mối liên hệ giữa tính hình học vi phân của mặt khả vi (hay đa tạp hai chiều) với đặc trưng tôpô của nó. Do tính chất quan trọng của định lí mà hầu như khóa học Hình học vi phân nào trên thế giới cũng sẽ đề cập tới định lí này. Trước đây, khoa Toán-Tin Trường Đại học Sư phạm Hà Nội sử dụng giáo trình [1] của tác giả Đoàn Quỳnh, trong đó, nội dung định lí Gauss-Bonnet được đề cập tới. Hiện nay, do chương trình đào tạo thay đổi kể từ Khóa 64 (năm 2014), nhiều môn học phải thay đổi lại thời lượng kiến thức, nên một số mục trở thành kiến thức tự đọc hoặc bỏ qua, trong đó có định lí Gauss-Bonnet. Giáo trình [2] ra đời nhằm phục vụ nhu cầu mới đó. Mặc dù giáo trình mới [2] trình bày cơ bản vẫn theo tinh thần của [1] với nhiều diễn giải gọn gàng và dễ hiểu hơn cho sinh viên, tuy nhiên, định lí Gauss-Bonnet vẫn là khó tiếp cận với đại trà sinh viên và ngay cả học viên cao học cũng gặp khó khăn khi đọc chứng minh. Điều đó cũng ảnh hưởng một phần tới việc tiếp thu toán học ở trình độ cao hơn đối với nhiều học viên cao học.

Trong bài viết này, chúng tôi sẽ viết lại đầy đủ chứng minh định lí Gauss-Bonnet, phiên bản địa phương (cũng là phiên bản quan trọng nhất, vì phiên bản toàn cục chỉ là hệ quả), đồng thời giải thích chi tiết các kí hiệu và tính toán, chỉ ra những chỗ khó mà người mới học có thể gặp.

Ngày nhận bài: 10/3/2021. Ngày sửa bài: 19/3/2021. Ngày nhận đăng: 26/3/2021.
Tác giả liên hệ: Trần Đức Anh. Địa chỉ e-mail: ducanh@hnue.edu.vn

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Kiến thức chuẩn bị

Trước khi phát biểu định lí Gauss-Bonnet địa phương, ta cần chuẩn bị một số kiến thức. Các khái niệm được sử dụng ở đây đều lấy từ các giáo trình [1, 2].

Định nghĩa 2.1. *Cho S là một mặt chính quy định hướng được trong $\mathbb{R}^3$ và $c\colon [0,l] \to S$ là một ánh xạ liên tục từ đoạn $[0,l]$ vào S. Ta nói c là* cung tham số đơn, đóng, chính quy từng khúc *nếu:*

(i) $c(0) = c(l)$,

(ii) Với mọi $t_1 \neq t_2 \in [0,l)$, ta có $c(t_1) \neq c(t_2)$

(iii) Tồn tại một phân hoạch $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = l$ của $[0,l]$ sao cho c chính quy trên từng đoạn $[t_i, t_{i+1}]$ với $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Trong đó, chính quy nghĩa là khả vi và đạo hàm $c'(t) \neq \vec{0}$ với mọi t.

Ảnh của c, tức tập hợp $c\Big([0,l]\Big)$, được gọi là đường cong đơn chính quy từng khúc. *Tại các điểm t_i, do tính chính quy của c trên từng đoạn, nên tồn tại các đạo hàm trái phải tại t_i, kí hiệu là $c'(t_i-)$ và $c'(t_i+)$ và lưu ý hai vector này đều $\neq \vec{0}$. Nếu hai vector $c'(t_i-) \neq c'(t_i+)$ thì $c(t_i)$ được gọi là* đỉnh *của c.*

Do S là mặt định hướng được, nên góc $\Big(c'(t_i-), c'(t_i+)\Big)$ là góc định hướng và có số đo góc θ_i duy nhất nằm trong $(-\pi, \pi)$. Góc θ_i này được gọi là góc ngoài *của c tại đỉnh $c(t_i)$.*

Giả sử $c\colon [0,l] \to S$ là một đường cong chính quy từng khúc nằm trong một tham số hóa $r\colon U \to S$, tức là ảnh $c\Big([0,l]\Big) \subset r(U)$, trong đó U là tập mở của $\mathbb{R}^2$. Mỗi điểm của U được kí hiệu là (u,v), và các vector r'_u, r'_v là các vector đạo hàm riêng của r theo u, v. Do S định hướng được, nên ta đòi hỏi r phải tương thích với hướng của S, tức là $r'_u \wedge r'_v$ xác định trường pháp tuyến của S, hay góc định hướng giữa r'_u và r'_v phải là góc dương, ngược chiều kim đồng hồ.

Khi đó, trên mỗi đoạn $[t_i, t_{i+1}]$, ta có thể định nghĩa được hàm liên tục $\varphi_i\colon [t_i, t_{i+1}] \to \mathbb{R}$ sao cho $\varphi(t) \equiv \Big(r'_u, c'(t)\Big) (\text{mod } 2\pi)$ với $t \in (t_i, t_{i+1})$, trong đó, ta hiểu vector r'_u chính là vector chỉ phương của trục hoành và xác định tại điểm $c(t)$. Hàm $\varphi_i(t)$ sẽ được gọi là *hàm góc* của c. Định lí sau rất cần thiết trong chứng minh định lí Gauss-Bonnet.

Định lí 2.1. *(Định lí quay tiếp tuyến, hay còn gọi là Umlaufsatz). Với các kí hiệu như ở trên, ta có:*

$$\sum_{i=0}^{k-1}\Big(\varphi_i(t_{i+1}) - \varphi_i(t_i)\Big) + \sum_{i=0}^{k-1}\theta_i = \pm 2\pi.$$

Trong đó, dấu cộng hay trừ phụ thuộc vào hướng của c. Cụ thể là hướng dương là hướng ngược chiều kim đồng hồ, và hướng âm là thuận chiều kim đồng hồ.

Độc giả tham khảo chứng minh định lí này ở trang 250 và 396 [3] hoặc trang 24-26 [4].

Bây giờ, ta có thể phát biểu định lí Gauss-Bonnet địa phương như sau:

Định lí 2.2. *(Định lí Gauss-Bonnet địa phương). Cho $S \subset \mathbb{R}^3$ là một mặt chính quy định hướng được. Giả sử $D \subset S$ là một miền đơn vi phôi với đĩa mở trong $\mathbb{R}^2$ có biên ∂D là một đường cong* *đơn chính quy từng khúc, được tham số hóa bởi $c\colon [0,l] \to S$. Giả sử c được định hướng dương và $\theta_0, \theta_1, \ldots, \theta_{k-1}$ là các góc ngoài của c. kí hiệu k_g là độ cong trắc địa của c trên S và K là độ cong Gauss của S. Khi đó ta có:*

$$\int_0^l k_g ds + \iint_D K dS + \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i = 2\pi.$$

2.2. Một số kết quả cần thiết cho chứng minh

Ta sẽ tiếp cận chứng minh định lí Gauss-Bonnet thông qua định lí Stokes, ở đây, ta phát biểu định lí Stokes dưới dạng cần thiết cho chứng minh.

Định lí 2.3. *(Định lí Stokes). Cho S là một đa tạp hai chiều compact có bờ định hướng được và ω là 1-dạng vi phân khả vi trên S. Khi đó,*

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega.$$

Chứng minh định lí xem trang 161-162 [5] hoặc trang 59-60 [6].

Ta nhắc lại định nghĩa của tích phân dạng vi phân trong trường hợp cụ thể trên vì sẽ có ích trong chứng minh định lí Gauss-Bonnet. Giả sử ∂S có thể tham số hóa toàn cục bởi $c\colon I \to \partial S$ trong đó I là một khoảng hoặc đoạn của $\mathbb{R}$, tức là $S = c(I)$ hoặc $\partial S \backslash c(I)$ gồm hữu hạn điểm. Ta yêu cầu thêm c phải tương thích với hướng của ∂S. Khi đó,

$$\int_{\partial S} \omega = \int_I \omega(c'(t))dt.$$

Tương tự, giả sử $r\colon U \to S$ là một tham số hóa toàn cục tương thích với hướng của S, khi đó

$$\int_S d\omega = \int_U d\omega(r'_u, r'_v) du\, dv.$$

Trong trường hợp không có tham số hóa toàn cục thì ta bắt buộc phải sử dụng phân hoạch đơn vị, nhưng các công thức tính toán trên là cốt yếu.

* ***Ý tưởng chứng minh Định lí 2.2***

Đầu tiên, ta sẽ chuyển đổi tích phân $\iint_D K dS$ thành tích phân theo 2-dạng vi phân, kí hiệu tạm là η. Sau đó, ta tìm *nguyên dạng* của η, tức là 1-dạng vi phân ω sao cho $\eta = d\omega$. Từ đó có thể áp dụng định lí Stokes và kết thúc chứng minh.

Định nghĩa 2.2. *Cho $c\colon I \to S$ là một cung tham số chính quy từ khoảng $I \subset \mathbb{R}$ vào mặt chính quy định hướng $S \subset \mathbb{R}^3$. kí hiệu n là trường pháp tuyến đơn vị xác định hướng của S. Giả sử c là tham số hóa tự nhiên, tức là $|c'(s)| = 1$ với mọi $s \in I$. kí hiệu $t(s) = c'(s)$, $n(s) = n(c(s))$, và $g(s) = n(s) \wedge t(s)$. Khi đó, bộ ba $\{t, g, n\}$ được gọi là* trường mục tiêu Darboux *dọc c.* Độ cong trắc địa *của c tại điểm $c(s)$, được kí hiệu là $k_g(s)$, hoặc $k_g(c(s))$ khi cần làm rõ điểm $c(s)$, được cho bởi công thức*

$$k_g(s) = \langle t'(s), g(s) \rangle.$$

Định nghĩa 2.3. *Cho $U_1, U_2, \ldots, U_n$ là trường mục tiêu khả vi trên $\mathbb{R}^n$. kí hiệu D là đạo hàm của trường vector trên $\mathbb{R}^n$, còn gọi là liên thông trên $\mathbb{R}^n$. Định nghĩa của D là như sau: Cho α là vector tiếp xúc tới $\mathbb{R}^n$ tại điểm $p \in \mathbb{R}^n$, cho X là một trường vector quanh p. Giả sử $\rho\colon I \to \mathbb{R}^n$ là một cung tham số khả vi thỏa mãn $\rho(t_0) = p$ và $\rho'(t_0) = \alpha$ với $t_0 \in I$. Khi đó,*

$$D_\alpha X = \frac{d}{dt}\bigg|_{t=t_0} X(\rho(t)) \in T_p\mathbb{R}^n.$$

Thay vì viết $D_\alpha X$, thì ta có thể viết DX và ngầm hiểu có vector tiếp xúc α. Bây giờ, đạo hàm trường mục tiêu $U_1, U_2, \ldots, U_n$, ta thu được

$$DU_i = \sum_{j=1}^{n} \omega_i^j U_j$$

trong đó ω_j^i là các 1-dạng vi phân, và được gọi là dạng liên kết *tới trường mục tiêu $U_1, U_2, \ldots, U_n$.*

Định lí 2.4. *(Phương trình cấu trúc trên $\mathbb{R}^n$). Cho $U_1, U_2, \ldots, U_n$ là một trường mục tiêu trên $\mathbb{R}^n$ và kí hiệu $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n$ là trường đối mục tiêu tương ứng (tức là θ^i là các 1-dạng vi phân trên $\mathbb{R}^n$ thỏa mãn $\theta^i(U_j) = \delta_{ij}$ với δ_{ij} là kí hiệu Kronecker). Khi đó ta có hai phương trình sau, gọi là phương trình cấu trúc trên $\mathbb{R}^n$*

(a)

$$d\theta^i = -\sum_{j=1}^{n} \omega_j^i \wedge \theta^j \text{ với mọi } i = 1, 2, \ldots, n.$$

(b)

$$d\omega_j^i = -\sum_{k=1}^{n} \omega_k^i \wedge \omega_j^k \text{ với mọi } i, j.$$

Chứng minh định lí xem ở trang 61-63 [1].

2.3. Chứng minh Định lí 2.2

* ***Bước 1***. Chuyển đổi tích phân $\iint_D K dS$ thành tích phân dạng vi phân.

Giả sử U_1, U_2 là một trường mục tiêu trực chuẩn trên S và tương thích với hướng của S. Nhắc lại: n là trường pháp tuyến đơn vị xác định hướng của S. Khi đó, ta có thể mở rộng tập xác định của U_1, U_2, n lên một tập mở chứa S sao cho U_1, U_2, n là trường mục tiêu trực chuẩn trên tập mở của $\mathbb{R}^3$. Khi đó, ta thu được dạng liên kết ω_j^i của trường mục tiêu này trong đó coi $U_3 = n$.

kí hiệu α là một vector tiếp xúc. Khi đó, theo định nghĩa của dạng liên kết, ta có

$$\omega_j^i(\alpha) = \langle D_\alpha U_j, U_i \rangle .$$

Do U_i, U_j vuông góc với nhau nếu $i \neq j$ nên

$$0 = D_\alpha \langle U_i, U_j \rangle = \langle D_\alpha U_i, U_j \rangle + \langle U_i, D_\alpha U_j \rangle .$$

Do đó, các dạng liên kết $\omega_j^i = -\omega_i^j$, tức là có tính phản đối xứng.

Tiếp theo ta có

$$D_{U_1}n = \omega_3^1(U_1)U_1 + \omega_3^2(U_1)U_2$$
$$D_{U_2}n = \omega_3^1(U_2)U_1 + \omega_3^2(U_2)U_2.$$

Do đó, độ cong Gauss

$$\begin{aligned} K &= \omega_3^1(U_1)\omega_3^2(U_2) - \omega_3^1(U_2)\omega_3^2(U_1) \\ &= (\omega_3^1 \wedge \omega_3^2)(U_1, U_2) \end{aligned}$$

Như vậy ta suy ra $\omega_3^1 \wedge \omega_3^2 = K\theta^1 \wedge \theta^2$, mà $\theta^1 \wedge \theta^2$ lại chính là *dạng diện tích chính tắc* (Thuật ngữ theo Giáo trình [1] trang 166, đồng thời xem thêm trang 248, mục 2.2.1.) trên S, nghĩa là

$$\iint_D K dS = \int_D K\theta^1 \wedge \theta_2 = \int_D \omega_3^1 \wedge \omega_3^2.$$

* ***Bước 2***. Tìm nguyên dạng của $\omega_3^1 \wedge \omega_3^2$.

Theo phương trình cấu trúc thứ hai ở Định lí 2.4, ta có:

$$d\omega_2^1 = -\omega_3^1 \wedge \omega_2^3 = \omega_3^1 \wedge \omega_3^2.$$

Như vậy, ω_2^1 chính là nguyên dạng của $\omega_3^1 \wedge \omega_3^2$.

Do đó, tích phân

$$\iint_D K dS = \int_D d\omega_2^1 = \int_{\partial D} \omega_2^1 = \int_0^l \omega_2^1(c'(t))dt.$$

Để tiện trình bày, ta giả sử c là tham số hóa tự nhiên, tức là $|c'(s)| = 1$ với mọi $s \in [0, l]$, và viết lại tích phân

$$\iint_D K dS = \int_D d\omega_2^1 = \int_{\partial D} \omega_2^1 = \int_0^l \omega_2^1(c'(s))ds.$$

* ***Bước 3***. Xác định mối liên hệ giữa $\omega_2^1(c'(s))$ với độ cong trắc địa của c tại $c(s)$.

Do vector $c'(s)$ là vector đơn vị, nên ta có thể viết

$$c'(s) = \cos\varphi(s)U_1(c(s)) + \sin\varphi(s)U_2(c(s))$$

với $\varphi(s)$ là hàm góc như trong Định nghĩa 2.1. Lưu ý rằng φ định nghĩa trên từng đoạn $[s_i, s_{i+1}]$ chứ không phải trên toàn bộ $[0, l]$.

Khi đó, ta có

$$\begin{aligned} t'(s) = c''(s) &= \varphi'(s)\Big(\underbrace{-\sin\varphi(s)U_1(c(s)) + \cos\varphi(s)U_2(c(s))}_{=g(s)}\Big) + \\ &\qquad + \cos\varphi(s)D_{c'(s)}U_1 + \sin\varphi(s)D_{c'(s)}U_2 \\ &= \varphi'(s)g(s) + \cos\varphi(s)\Big(\omega_1^2(c'(s))U_2(c(s)) + \omega_1^3(c'(s))n(s)\Big) + \\ &\qquad + \sin\varphi(s)\Big(\omega_2^1(c'(s))U_1 + \omega_2^3(c'(s))n(s)\Big). \end{aligned}$$

Do đó, độ cong trắc địa

$$k_g(s) = \langle t'(s), g(s) \rangle = \varphi'(s) + \omega_1^2(c'(s))$$

Như vậy

$$\omega_2^1(c'(s)) = \varphi'(s) - k_g(s).$$

* ***Bước 4***. Kết thúc chứng minh. Ta có:

$$\int_0^l \omega_2^1(c'(s))ds = \int_0^l (\varphi'(s) - k_g(s))ds.$$

Theo Định lí 2.1, ta có

$$\int_0^l \varphi'(s)ds = 2\pi - \sum_{i=0}^{k-1} \theta_i$$

với θ_i là các góc ngoài của c (xem Định nghĩa 2.1).

Do đó ta chứng minh xong định lí Gauss-Bonnet địa phương.

2.4. Bình luận và giải thích thêm một số kí hiệu và tính toán

2.4.1. Tầm quan trọng của định lí Gauss-Bonnet địa phương

Từ định lí này, ta có thể chứng minh được định lí Gauss-Bonnet (toàn cục), cụ thể là tích phân $\int_S KdS$, với S là đa tạp hai chiều compact có hướng, bằng đặc trưng Euler của S. Để chứng minh điều đó, ta cần một kết quả khó trong tôpô, đó là mỗi đa tạp hai chiều đều có thể tam giác phân được (xem Định lí 2.3.A.1, trang 37-39 [7]).

Định lí này cũng cho phép chứng minh tổng các góc của $n-$giác trong mặt phẳng bằng $(n-2)\pi$.

Thật vậy, trên mặt phẳng, độ cong Gauss $K \equiv 0$ và các cạnh của đa giác chính là các đường trắc địa nên độ cong trắc địa cũng $\equiv 0$. Ta suy ra tổng các góc ngoài của $n-$giác bằng 2π, mà có n góc. Do đó, tổng các góc trong của $n-$giác bằng $n\pi - 2\pi = (n-2)\pi$.

Nhờ định lí này, nhiều phần kiến thức quan trọng trong Môn *hình học của nhóm biến đổi* [8] trở nên dễ hiểu hơn, ví dụ áp dụng định lí Gauss-Bonnet cho các mô hình hình học khác nhau như hình học elliptic, hyperbolic, hình học trên đĩa và nửa phẳng Poincare. Điều này đặc biệt có ý nghĩa, bởi môn học mới đó mang tinh thần học thuật hiện đại.

2.4.2. Giải thích kí hiệu tích phân $\int k_g ds$.

Giáo trình [1] và [2] quy ước: nếu cung tham số là tham số hóa tự nhiên thì ta sử dụng chữ s để kí hiệu tham số của nó. Điều này vô tình gây ra sự lẫn lỗn với tích phân $\int k_g ds$ ở trên, khiến người mới học nghĩ rằng phải chuyển về tham số hóa tự nhiên thì mới tính được tích phân. Thực chất, ds ở đây là phần tử độ dài, tức là một độ đo xác định trên đường cong. Ta phác lại cách định nghĩa độ dài đường cong.

Giả sử ta có cung tham số $c\colon I \to \mathbb{R}^n$ với I là một khoảng trong $\mathbb{R}$. Xét đoạn $[a,b] \subset I$. Khi đó, độ dài của cung tham số c từ $c(a)$ tới $c(b)$ được định nghĩa thông qua xấp xỉ đường gấp khúc. Tức là, xét phân hoạch $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k = b$, và ta tính tổng độ dài

$$\sum_{i=0}^{k-1} |\overrightarrow{c(t_i)c(t_{i+1})}|.$$

Khi bước nhảy của phân hoạch này trở nên rất nhỏ thì giá trị của tổng trên tiến tới một giới hạn và giới hạn đó được gọi là độ dài của c từ $c(a)$ tới $c(b)$.

Nhiều giáo trình (trong đó có [1, 2]) khi định nghĩa độ dài thì chỉ nêu công thức và chứng minh, nên người học nhiều khi không hiểu được bản chất các kí hiệu và tính toán.

Ta xét phần tử $|\overrightarrow{c(t_i)c(t_{i+1})}| = |c(t_{i+1}) - c(t_i)|$. Theo công thức Taylor, ta có

$$|c(t_{i+1}) - c(t_i)| \approx |c'(t_i)|(t_{i+1} - t_i).$$

Đại lượng $t_{i+1} - t_i$ chính là số gia và được kí hiệu là dt. Như vậy, kí hiệu dt trong tích phân không phải là số cụ thể, mà là đại diện cho các số gia $t_{i+1} - t_i$, tức là đại diện cho một *quá trình*.

Do đó, độ dài của c từ $c(a)$ tới $c(b)$ chính là tích phân

$$\int_a^b |c'(t)|dt.$$

Như vậy, $|c'(t)|dt$ đại diện cho các độ dài của đường gấp khúc trên và được kí hiệu là ds. Đấy chính là bản chất của kí hiệu ds trong tích phân và không liên quan gì tới tham số hóa tự nhiên.

2.4.3. Giải thích kí hiệu tích phân $\int_S KdS$.

Cũng giống như trên, kí hiệu dS ở đây không liên quan gì tới mặt S. kí hiệu dS là phần tử diện tích mặt, tức là một độ đo trên mặt S. Cách xác định bản chất của nó là thông qua việc xấp xỉ mặt S bởi các tứ giác. Cụ thể như sau: Giả sử $r \colon U \to S$ là một tham số hóa. Do U là tập mở trong $\mathbb{R}^2$ nên ta có thể chia U thành một lưới các hình chữ nhật nhỏ. Khi đó, diện tích của $r(U)$ sẽ được xấp xỉ thông qua diện tích của các tứ giác mà đỉnh của nó là ảnh của lưới trên U qua r.

Tuy nhiên, ở đây ta không có được tứ giác đúng nghĩa, vì không có gì đảm bảo tính đồng phẳng của 4 điểm trong $\mathbb{R}^3$. Vì vậy, việc xấp xỉ diện tích sẽ thực hiện bằng cách chia đôi "tứ giác" đó thành 2 tam giác, và tính diện tích như bình thường.

Ta giả sử (x, y) là một nút của lưới, và $(x + h, y), (x, y + k), (x + h, y + k)$ là các nút lân cận tạo thành hình chữ nhật trong $\mathbb{R}^2$, với h, k nhỏ.

Diện tích của tam giác dựng bởi ba điểm $r(u, v), r(u + h, v), r(u, v + k)$ bằng

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}|\overrightarrow{r(u,v)r(u+h,v)} \wedge \overrightarrow{r(u,v)r(u,v+k)}| &\approx \frac{1}{2}|hr'_u(u,v) \wedge kr'_v(u,v)| \\ &= \frac{1}{2}hk|r'_u \wedge r'_v|.\end{aligned}$$

Các đại lượng h, k chính là các số gia du, dv. Do đó, phần tử diện tích dS có biểu diễn qua tham số r là

$$dS = |r'_u \wedge r'_v| du\, dv.$$

Điều đó giải thích cách định nghĩa tích phân trên mặt chính quy đã được nêu ra ở các giáo trình [2] trang 108 và [1] trang 166. Các định nghĩa nêu ra trong đó và cũng như rất nhiều giáo trình ở nước ngoài đều không làm nổi bật bản chất của định nghĩa.

2.4.4. Về định lí quay tiếp tuyến

Chứng minh định lí này rất kỹ thuật gồm hai phiên bản: Phiên bản đầu tiên là cho các đường cong trong $\mathbb{R}^2$, phiên bản thứ hai là cho các đường cong trên đa tạp 2 chiều có hướng. Phiên bản thứ hai đòi hỏi khái niệm dịch chuyển song song, một khái niệm rất độc đáo của Hình học vi phân, nên người mới học sẽ không dễ tiếp thu phần đó.

Trong giáo trình [1], trang 282, GS Đoàn Quỳnh đã tránh định lí đó bằng cách "biến dạng" metric trên S thành một metric phẳng, do đó độ cong Gauss triệt tiêu và giản lược được tính toán. Đó là một kĩ thuật thú vị của hình học vi phân.

Trong sách của Pressley [9] trang 344 có trình bày một đoạn chứng minh bằng kỹ thuật "trơn hóa" các đỉnh của đường cong c. Kỹ thuật này rất có ích cho trực giác của người mới học.

2.4.5. Về Định lí Gauss-Bonnet địa phương trong giáo trình [2]

Định lí Gauss-Bonnet trong giáo trình [2] phát biểu cho đa tạp 2 chiều compact trong $\mathbb{R}^n$ nên có tính tổng quát hơn so với định lí Gauss-Bonnet phát biểu ở trên. Tuy nhiên, mục đích của chúng tôi là chứng minh bằng các chất liệu quen thuộc với sinh viên và học viên cao học của trường ĐHSP Hà Nội. Ví dụ định lí Stokes nằm trong học phần Đa tạp vi phân thuộc môn chung đối với toàn bộ học viên cao học ngành Toán.

Chứng minh trong đó có lẽ lấy từ chứng minh trong [3], và rất kỹ thuật. Chứng minh cố gắng quy tích phân $\int_D KdS$ về các hệ số của các dạng cơ bản thứ nhất và thứ hai của mặt S dưới dạng đạo hàm khá phức tạp, để sau đó có thể áp dụng định lí Green-Ostrogradski. Chính sự thiếu tự nhiên đó là động lực để chúng tôi viết một chứng minh khác mà chúng tôi cho là tự nhiên hơn, dễ tiếp cận hơn cho người mới học.

Chứng minh của chúng tôi hoàn toàn có thể tổng quát hóa dễ dàng cho các định lí Gauss-Bonnet tổng quát hơn. Nhưng điều quan trọng nhất vẫn là người học cảm thấy dễ tiếp thu và trở nên yêu thích môn Toán học hơn.

2.4.6. Định lí Gauss-Bonnet trong giáo trình [1]

Định lí Gauss-Bonnet trong giáo trình của GS Đoàn Quỳnh chỉ phát biểu cho tam giác cong, điều đó tiện cho trực giác của người học. Chứng minh mà chúng tôi trình bày cơ bản là quay lại với ý tưởng đã thực hiện trong đó, nhưng chi tiết hơn nhiều. Giáo trình của GS Đoàn Quỳnh có mật độ kiến thức rất dày, nhưng có thể do điều kiện thời trước, nên việc trình bày và trích dẫn có nhiều khó khăn. Điều đó khiến cho sinh viên và học viên cao học không dễ gì hiểu được trọn vẹn các kết quả quan trọng trong đó. Điều đó thúc đẩy chúng tôi viết bài này để bổ sung tư liệu học tập cho sinh viên và học viên cao học. Đồng thời cũng khẳng định [1] là tài liệu rất giá trị, và cần được nghiên cứu nghiêm túc, qua đó người học sẽ thụ đắc thêm được rất nhiều kiến thức toán học.

3. Kết luận

Trong bài viết này, chúng tôi đưa ra chứng minh chi tiết định lí Gauss-Bonnet thông qua sử dụng định lí Stokes, đồng thời chỉ ra những điểm khó trong chứng minh và giáo trình mà sinh viên và cao học viên có thể gặp phải. Qua đó, bài viết sẽ góp phần làm tư liệu học tập có giá trị cho sinh viên và học viên cao học.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Đoàn Quỳnh, 2001. *Hình học Vi phân*. NXB Giáo Dục Việt Nam (tái bản lần thứ nhất).

[2] Nguyễn Doãn Tuấn (chủ biên), Sĩ Đức Quang, Nguyễn Thị Thảo, 2017. *Giáo trình Hình học Vi phân*. NXB Đại học Sư phạm (in lần hai).

[3] Do Carmo, Manfredo P., 2016. *Differential geometry of curves and surfaces*. Dover Publications, Inc., Mineola, NY, xvi+510 pp. ISBN: 978-0-486-80699-0; 0-486-80699-5

[4] Klingenberg, Wilhelm, 1978. A course in differential geometry. Translated from the German by David Hoffman. *Graduate Texts in Mathematics*, Vol. 51. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, xii+178 pp. ISBN: 0-387-90255-4

[5] Nguyễn Văn Đoành, 2015. *Đa tạp Khả vi*. NXB Đại học Sư phạm (in lần thứ hai).

[6] Aubin, Thierry, 2001. *A course in differential geometry*. Graduate Studies in Mathematics, 27. American Mathematical Society, Providence, RI, xii+184 pp. ISBN: 0-8218-2709-X

[7] Jost, Jürgen, 2006. *Compact Riemann surfaces*. An introduction to contemporary mathematics. Third edition. Universitext. Springer-Verlag, Berlin. xviii+277 pp. ISBN: 978-3-540-33065-3; 3-540-33065-8

[8] Trần Văn Tấn, 2018. *Hình học của nhóm biến đổi*. NXB Đại học Sư phạm.

[9] Pressley, Andrew, 2010. *Elementary differential geometry*. Second edition. Springer Undergraduate Mathematics Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, xii+473 pp. ISBN: 978-1-84882-890-2.

ABSTRACT

A proof of Gauss-Bonnet theorem - Local version

Tran Duc Anh

Faculty of Mathematics, Hanoi National University of Education

We present a short proof with details for the local Gauss-Bonnet theorem, a deep result in differential geometry, which shows a connection between differential geometric and topological aspects. However, this theorem is left to students according to the new programme in our faculty. The main idea in the proof makes use of Stokes' theorem.

Keywords: Gauss-Bonnet, Gaussian curvature, geodesic curvature, differential geometry, associated forms, Stokes' theorem.