HNUE JOURNAL OF SCIENCE DOI: 10.18173/2354-1059.2020-0001
Natural Sciences, 2020, Volume 65, Issue 3, pp. 3-12
This paper is available online at http://stdb.hnue.edu.vn

TÍNH GIẢI ĐƯỢC CHO MỘT LỚP CÁC BAO HÀM THỨC VI PHÂN TRUNG TÍNH

Bùi Thị Hải Yến[1], Nguyễn Thị Nhàn[1] và Nguyễn Thị Quỳnh[2]
[1]*Khoa Tự nhiên, Trường Đại học Hoa Lư*
[2]*Khoa Khoa học Cơ bản, Trường Đại học Công nghiệp Hà Nội*

Tóm tắt. Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm của bao hàm thức vi phân trung tính được cho bởi

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[\mathcal{D}y_t - f(t,y_t)] - A[\mathcal{D}y_t - f(t,y_t)] - Ly_t \in F(t,y_t), t \in J = [0,\infty), \\ y_0 = \varphi \in C_E = C([-r,0];E), r > 0. \end{cases} \tag{1}$$

Bằng việc sử dụng lí thuyết giải tích đa trị, nguyên lí ánh xạ co và định lí điểm bất động Frigon, chúng tôi đưa ra các điều kiện đủ cho tính giải được của (1).
Từ khóa: bao hàm thức vi phân trung tính, định lí điểm bất động.

1. Mở đầu

Bao hàm thức vi phân (hay còn được gọi là hệ vi phân đa trị) là một lớp bài toán có nhiều ứng dụng trong khoa học, kĩ thuật. Nó không chỉ góp phần khái quát hóa lớp phương trình vi phân với vế phải không liên tục, hay các bài toán điều khiển với hàm điều khiển nằm trong một tập biến thiên theo trạng thái (điều khiển phản hồi đa trị), mà còn là mô hình toán học của nhiều ứng dụng quan trọng trong kĩ thuật, sinh hóa... Về bao hàm thức vi phân, có thể kể đến các cuốn sách chuyên khảo như [1], và nhiều hướng nghiên cứu rộng rãi liên quan đến các tính chất định tính của nó (chẳng hạn, xem [2, 3]).

Bài báo nghiên cứu một lớp bao hàm thức vi phân trung tính trên không gian Banach tổng quát. Cho E là không gian Banach, chúng ta xét bài toán sau

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[\mathcal{D}y_t - f(t,y_t)] - A[\mathcal{D}y_t - f(t,y_t)] - Ly_t \in F(t,y_t), t \in J = [0,\infty), \\ y_0 = \varphi \in C_E = C([-r,0];E), r > 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

trong đó, toán tử $A : D(A) \subseteq E \to E$ là tuyến tính có thể không bị chặn, $L : C_E \to E$ là toán tử tuyến tính bị chặn, toán tử $\mathcal{D} : C_E \to E$ tuyến tính liên tục và được xác định bởi

$$\mathcal{D}\varphi = \varphi(0) - P\varphi, \forall \varphi \in C_E$$

Ngày nhận bài: 13/3/2020. Ngày sửa bài: 20/3/2020. Ngày nhận đăng: 27/3/2020.
Tác giả liên hệ: Bùi Thị Hải Yến. Địa chỉ e-mail: bthyen.ktn@hluv.edu.vn

với $P : C_E \to E$ là toán tử tuyến tính bị chặn. Hàm trễ $y_t \in C_E$ cho bởi $y_t(\theta) = y(t+\theta)$ với $\theta \in [-r, 0]$. Ánh xạ đa trị $F : J \times C_E \to \mathcal{P}(E)$ nhận giá trị compact và hàm $f : J \times C_E \to E$ là liên tục.

Kết quả đầu tiên của bài toán đạo hàm riêng trung tính được nghiên cứu bởi Datko [4]. Những kết quả gần đây nhất có thể kể đến của các tác giả Anh-Ke [5], Haiyang-Shi-Liping [6], Wang-Shen [7], Eduarho-Jianhong-Denis [8], Ezzinbi và các cộng sự [9-12]. Trong đó, các tác giả đã nghiên cứu về tính giải được, nghiệm phân rã, nghiệm tuần hoàn, và tính tiêu hao cho một số lớp các phương trình vi phân/đạo hàm riêng trung tính.

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại nghiệm tích phân cho bài toán (1.1) bằng định lí điểm bất động Frigon. Kết quả nhận được là tiếp nối những kết quả trước đó được đưa ra bởi nhóm tác giả Mostafa Adimy, Khalil Ezzinbi và các cộng sự.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Cơ sở lí thuyết

Trong phần này, chúng ta nhắc lại một số kết quả về ánh xạ đa trị co chấp nhận được trong không gian Fréchet.

Cho X là không gian metric, ta kí hiệu các tập hợp bởi

$$\mathcal{P}(X) = \{Y \subset X : Y \neq \emptyset\},$$

$$\mathcal{P}_{cl}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ đóng}\},$$

$$\mathcal{P}_{cp}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ compact}\},$$

$$\mathcal{P}_{b}(X) = \{Y \in \mathcal{P}(X) : Y \text{ bị chặn }\}.$$

Gọi $\wedge$ là tập chỉ số và với mỗi $\alpha \in \wedge$, giả sử d_α là một metric trên X, gọi D_α là giả metric Hausdorff sinh bởi metric d_α:

$$D_\alpha(A, B) = \inf\{\epsilon > 0 : \forall x \in A, y \in B, \exists \bar{x} \in A, \bar{y} \in B \\ \text{sao cho } d_\alpha(x, \bar{y}) < \epsilon, d_\alpha(\bar{x}, y) < \epsilon\},$$

với $\inf \emptyset = \infty$. Trong trường hợp X là một không gian lồi địa phương đầy đủ, ta nói rằng tập con $A \subset X$ là bị chặn nếu $D_\alpha(\{0\}, A) < \infty$ với mọi $\alpha \in \wedge$.

Định nghĩa 2.1. *Cho X và E là hai không gian Fréchet. Một ánh xạ đa trị $F : X \to \mathcal{P}(E)$ được gọi là một ánh xạ co chấp nhận được với các hằng số $\{k_\alpha\}_{\alpha \in \wedge}$ nếu với mỗi $\alpha \in \wedge$ tồn tại $k_\alpha \in (0, 1)$ sao cho các khẳng định đúng*
i) $D_\alpha(F(x), F(y)) \leq k_\alpha d_\alpha(x, y)$ với mọi $x, y \in X$.
ii) Với mọi $x \in X$ và $\epsilon = (\epsilon_\alpha) \in (0, \infty)^\wedge$, tồn tại $y \in F(x)$ sao cho

$$d_\alpha(x, y) \leq d_\alpha(x, F(x)) + \epsilon_\alpha \text{ với mọi } \alpha \in \wedge.$$

Bổ đề sau được chỉ ra trong [13].

Bổ đề 2.1. *Cho X là không gian Fréchet và U là một tập mở trong X. Cho $N : \bar{U} \to \mathcal{P}(X)$ là một toán tử co chấp nhận được. Giả sử rằng N bị chặn. Khi đó, các phát biểu sau tương đương:*

i) N có điểm bất động.

ii) Tồn tại $\lambda \in [0,1)$ và $x \in \partial U$ sao cho $x \in \lambda N(x)$.

Để áp dụng Bổ đề 2.1, ta xét $H_d : \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \to \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$ cho bởi:

$$H_d(A,B) = \max\left(\sup_{a\in A} d(a,B), \sup_{b\in B} d(A,b)\right),$$

trong đó, $d(a,B) = \inf_{b\in B} d(a,b)$, $d(A,b) = \inf_{a\in A} d(a,b)$.
Khi đó, $(\mathcal{P}_{cl}(X), H_d)$ là không gian metric. Kết quả dưới đây được chứng minh trong [16].

Mệnh đề 2.1. *Nếu Γ_1 và Γ_2 là hàm đa trị đo được giá trị compact thì hàm đa trị $t \mapsto \Gamma_1(t) \cap \Gamma_2(t)$ đo được.*

Định lí 2.1. *Cho X là không gian metric tách được, (T,σ) là không gian đo được, Γ là hàm đa trị từ T vào tập tất cả các tập con khác rỗng của X. Nếu với mỗi tập mở V trong X, $\Gamma^-(V) = \{t : \Gamma(t) \cap V \neq \emptyset\}$ thuộc σ thì ảnh của Γ là các tập đo được.*

2.2. Tính giải được

Trong phần này, ta đưa ra các điều kiện đủ cho sự tồn tại nghiệm tích phân của bài toán (1.1). Trước khi trình bày kết quả, chúng tôi xét các giả thiết sau

(H1) *Toán tử A là Hille-Yosida, nghĩa là, tồn tại $M_0 \geq 0$ và $\omega \in \mathbb{R}$ sao cho $(\omega,\infty) \subset \rho(A)$ và*

$$\|(\lambda - A)^{-n}\| \leq \frac{M_0}{(\lambda-\omega)^n}, \text{ với } n \in \mathbb{N} \text{ và } \lambda > \omega,$$

trong đó $\rho(A)$ kí hiệu là tập giải của toán tử A.
Đặt

$$D(A_0) = \{x \in D(A), Ax \in \overline{D(A)}\},$$
$$A_0 x = Ax \text{ với } x \in D(A).$$

Khi đó, A_0 sinh ra một nửa nhóm liên tục mạnh $(T_0(t))_{t\geq 0}$ trên $\overline{D(A)}$.

(HF) *Hàm đa trị $F : [0,\infty) \times C_E \to \mathcal{P}(E)$ là L_1-Caratheodory, nghĩa là:*
(i) $t \mapsto F(t,y)$ đo được với mỗi $y \in C_E$.
(ii) $x \mapsto F(t,x)$ liên tục với hầu khắp $t \in [0,\infty)$.
(iii) Với mỗi $q > 0$, tồn tại $h_q \in L^1_{loc}([0,\infty),\mathbb{R}_+)$ sao cho

$$\|F(t,y)\| \leq h_q(t) \text{ với mọi } \|y\| \leq q \text{ và với hầu khắp } t \in [0,\infty).$$

(Hf) *Tồn tại $K_1 < 1$ sao cho*

$$\|f(t,y) - f(t,\bar{y})\| \leq K_1 \|y - \bar{y}\| \text{ với } t \in J; y, \bar{y} \in C_E.$$

(H2) $\|P\| + K_1 < 1$.

(H3) *Tồn tại hàm không giảm* $\psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ *và* $p \in L^1_{loc}([0,\infty),\mathbb{R}_+)$ *sao cho*

$$\|F(t,y)\| \le p(t)\psi(\|y\|) \text{ hầu khắp } t \in J, \forall y \in C([-r,0],\overline{D(A)}) \text{ với}$$

$$\int_1^\infty \frac{ds}{s+\psi(s)} = \infty.$$

(H4) *với mọi* $R > 0$*, tồn tại* $l_R \in L^1_{loc}([-r,\infty),\mathbb{R}_+)$ *sao cho*

$$H_d(F(t,y),F(t,\bar{y})) \le l_R(t)\|y-\bar{y}\|, \text{ với mọi } y,\bar{y} \in C_E \text{ thoả mãn } \|y\|,\|\bar{y}\| \le R,$$

và

$$d(0,F(t,0)) \le l_R(t) \text{ với hầu khắp } t \in J.$$

Nhận xét 2.1. *Từ* **(Hf)***, ta có*

$$\|f(t,\varphi)\| \le K_1\|\varphi\| + K_2 \text{ với mọi } t \in J, \varphi \in C_E,$$

trong đó, $K_2 = \sup_{t\in J}\|f(t,0)\|$

Sau đây ta đưa ra khái niệm về nghiệm tích phân của bài toán (1.1). Với mỗi $v \in C([-r,\infty);X)$ ta ký hiệu

$$S_{F,v} = \{g \in L^1(J,E) : g(t) \in F(t,v_t) \text{ với hầu khắp } t \in J\}.$$

Định nghĩa 2.2. *Hàm liên tục* $y \in C([-r,\infty),\overline{D(A)})$ *được gọi là nghiệm tích phân của bài toán* (1.1) *nếu tồn tại một hàm* $g \in S_{F,y}$ *sao cho những khẳng định sau được thoả mãn:*

i) $\displaystyle\int_0^t (\mathcal{D}y_s - f(s,y_s))ds \in \overline{D(A)}, t \ge 0,$

ii) $\displaystyle\mathcal{D}y_t = f(t,y_t) + \mathcal{D}\varphi - f(0,\varphi) + A\int_0^t (\mathcal{D}y_s - f(s,y_s))ds + L\int_0^t y_s ds + \int_0^t g(s)ds, t \ge 0,$

iii) $y_0 = \varphi$ *trên* $[-r,0]$.

Nhận xét 2.2. *Nếu một nghiệm tích phân của bài toán* (1.1) *tồn tại thì theo [11] nghiệm này được cho bởi công thức:*

$$\begin{aligned}\mathcal{D}y_t =& f(t,y_t) + T_0(t)(\mathcal{D}\varphi(0) - f(0,\varphi)) + \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t T_0(t-s)B_\lambda L y_s ds \\ &+ \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t T_0(t-s)B_\lambda g(s)ds.\end{aligned}$$

trong đó, $B_\lambda = \lambda(\lambda - A)^{-1}$.

Với mỗi $n \in \mathbb{N}$, ta định nghĩa nửa chuẩn trong $C([-r,\infty),\overline{D(A)})$ bởi

$$\|y\|_n := \sup_{t\leq n} e^{-(wt+\tau L_n(t))}\|y(t)\|,$$

trong đó $L_n(t) = \int\limits_0^t Ml_n(s)ds$. Khi đó $C([-r,\infty),\overline{D(A)})$ là không gian Fréchet với họ nửa chuẩn $\{\|.\|_n\}_{n\geq 1}$. Hằng số τ được chọn đủ lớn trong khi thiết kế các nửa chuẩn thích hợp nhằm thu được kết quả về tính giải được của bài toán.

Định lí 2.2. *Giả sử rằng* **(H1)-(H4) và (Hf)** *thỏa mãn. Khi đó với mỗi φ sao cho $\varphi(0) - f(0,\varphi) \in \overline{D(A)}$, bài toán* (1.1) *có ít nhất một nghiệm tích phân trên* $[-r,\infty)$.

Chứng minh. Xét toán tử $N : C([-r,\infty),\overline{D(A)}) \to \mathcal{P}(C([-r,\infty),\overline{D(A)}))$ được định nghĩa bởi,

$$N(y)(t) = \begin{cases} \varphi(t), \text{ nếu } t \in [-r,0], \\ f(t,y_t) + T_0(t)[\mathcal{D}\varphi(0) - f(0,\varphi)] + Py_t + \lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_0^t T_0(t-s)B_\lambda Ly_s ds \\ + \lim\limits_{\lambda\to\infty}\int\limits_0^t T_0(t-s)B_\lambda g(s)ds, \text{ nếu } t \in J. \end{cases}$$

trong đó $g \in S_{F,y}$.

Ta thấy, điểm bất động của toán tử N là nghiệm tích phân của bài toán (1.1). Ta sẽ chứng minh N có điểm bất động.

Cho y là một nghiệm của bài toán (1.1). Cho $n \in \mathbb{N}$ và $t \leq n$, thì $y \in N(y)$, và tồn tại $g \in S_{F,y}$ sao cho, với mỗi $t \in [0,\infty)$, ta có

$$\begin{aligned} y(t) =& f(t,y_t) + T_0(t)[\mathcal{D}\varphi(0) - f(0,\varphi)] + Py_t + \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t T_0(t-s)B_\lambda Ly_s ds \\ &+ \lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t T_0(t-s)B_\lambda g(s)ds. \end{aligned}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \|y(t)\| \leq& (K_1\|y_t\| + K_2) + Me^{wt}(\|\mathcal{D}\varphi\| + K_1\|\varphi\| + K_2) + \|Py_t\| \\ &+ Me^{wt}\|L\|\int_0^t e^{-ws}\|y_s\|ds + Me^{wt}\int_0^t e^{-ws}p(s)\psi(\|y_s\|)ds. \end{aligned}$$

Đặt

$$\mu(t) = \sup\{\|y(s)\| : -r \leq s \leq t\}, 0 \leq t \leq n.$$

Khi đó tồn tại $t^* \in [-r,t]$ sao cho $\mu(t) = \|y(t^*)\|$. Nếu $t^* \in [-r,0]$ thì $\mu(t) = \|\varphi\|$.

Trong trường $t^* \in [0, n]$, theo bất đẳng thức trên ta có với $t \in [0, n]$,

$$e^{-wt}\mu(t) \leq \frac{M(1+\|P\|+K_1)\|\varphi\|+MK_2}{1-\|P\|-K_1} + \frac{M\|L\|}{1-\|P\|-K_1}\int_0^t e^{-ws}\|y_s\|ds$$
$$+ \frac{M}{1-\|P\|-K_1}\int_0^t e^{-ws}p(s)\psi(\mu(s))ds.$$

Đặt vế phải của bất đẳng thức trên là $v(t)$. Khi đó, ta có

$$\mu(t) \leq e^{wt}v(t) \text{ với mọi } t \in [0, n],$$

và

$$v(0) = \frac{M(1+\|P\|+K_1)\|\varphi\|+MK_2}{1-\|P\|-K_1},$$
$$v'(t) = \frac{M\|L\|}{1-\|P\|-K_1}e^{-wt}\|y_t\| + \frac{M}{1-\|P\|-K_1}e^{-wt}p(t)\psi(\mu(t)).$$

Sử dụng tính tăng của ψ ta có

$$\begin{aligned}
v'(t) &\leq \frac{M\|L\|}{1-\|P\|-K_1}e^{-wt}\mu(t) + \frac{M}{1-\|P\|-K_1}e^{-wt}p(t)\psi(e^{wt}v(t))\\
&\leq \frac{M\|L\|}{1-\|P\|-K_1}e^{-wt}e^{wt}v(t) + \frac{M}{1-\|P\|-K_1}e^{-wt}p(t)\psi(e^{wt}v(t)), \text{ hầu khắp } t \in [0, n].
\end{aligned}$$

Bất đẳng thức này kéo

$$e^{wt}v'(t) \leq \frac{M\|L\|}{1-\|P\|-K_1}e^{wt}v(t) + \frac{M}{1-\|P\|-K_1}p(t)\psi(e^{wt}v(t)), \text{ hầu khắp } t \in [0, n].$$

Do đó,

$$\begin{aligned}
(e^{wt}v(t))' &= we^{wt}v(t) + e^{wt}v'(t)\\
&\leq \left(w + \frac{M\|L\|}{1-\|P\|-K_1}\right)e^{wt}v(t) + \frac{M}{1-\|P\|-K_1}p(t)\psi(e^{wt}v(t))\\
&\leq m(t)\left(e^{wt}v(t) + \psi(e^{wt}v(t))\right), \text{ hầu khắp } t \in [0, n].
\end{aligned}$$

trong đó $m(t) = \max\left\{w + \frac{M\|L\|}{1-\|P\|-K_1}; \frac{M}{1-\|P\|-K_1}p(t)\right\}$.
Từ đó ta suy ra

$$\int_{v(0)}^{e^{wt}v(t)} \frac{du}{u+\psi(u)} \leq \int_0^n m(s)ds < \infty.$$

Bởi giả thiết (H3), tồn tại hằng số d_n sao cho $e^{wt}v(t) \leq d_n, t \in [0, n]$ và

$$\sup_{-r \leq s \leq n} \|y_s\| \leq \max\{\|\varphi\|, d_n\} := M_n.$$

Đặt

$$U = \{y \in C([-r,\infty), E) : \sup\{\|y(t)\| : t \le n\} < M_n + 1, \text{ với mọi } n \in \mathbb{N}\}.$$

Dễ thấy, U là tập mở trong $C([-r,\infty), E)$.
Ta sẽ chứng minh $N : \bar{U} \to \mathcal{P}(C([-r,\infty), \overline{D(A)}))$ là toán tử co chấp nhận được.
Đầu tiên, ta chứng minh N là một ánh xạ co, nghĩa là, tồn tại $\gamma < 1$ sao cho

$$H_d(N(y), N(\bar{y})) \le \gamma \|y - \bar{y}\|_n \text{ với mỗi } y, \bar{y} \in C([-r,\infty), \overline{D(A)}).$$

$y, \bar{y} \in C([-r,\infty), \overline{D(A)})$ và $h \in N(y)$. Khi đó, tồn tại $g(t) \in F(t, y_t)$ sao cho với mỗi $t \in [0, n]$

$$\begin{aligned} y(t) =& f(t, y_t) + T_0(t)(\mathcal{D}\varphi(0) - f(0,\varphi)) + P y_t \\ &+ \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t T_0(t-s) B_\lambda L y_s ds + \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t T_0(t-s) B_\lambda g(s) ds \\ &=: h(t). \end{aligned}$$

Từ giả thiết (H4), ta có

$$H_d(F(t, y_t), F(t, \bar{y}_t)) \le l_n(t) \|y_t - \bar{y}_t\|.$$

Do đó, tồn tại $w \in F(t, y_t)$ sao cho

$$\|g(t) - w\| \le l_n(t) \|y_t - \bar{y}_t\|, t \in J.$$

Xét $U_* : [0, n] \to \mathcal{P}(E)$ cho bởi

$$U_*(t) = \{w \in E : \|g(t) - w\| \le l_n(t) \|y_t - \bar{y}_t\|\}.$$

Vì toán tử đa trị $V_*(t) = U_*(t) \cap F(t, \bar{y}_t)$ đo được (theo Mệnh đề 2.2), tồn tại một hàm $\bar{g}$, $V_*(\bar{g})$ là tập đo được. Do đó, $\bar{g} \in F(t, \bar{y}_t)$ và

$$\|g(t) - \bar{g}(t)\| \le l_n(t) \|y_t - \bar{y}_t\|, \text{ với mỗi } t \in [0, n].$$

Ngoài ra với $t \in [0, n]$, ta định nghĩa

$$\begin{aligned} \bar{h}(t) =& f(t, \bar{y}_t) + T_0(t)(\mathcal{D}\varphi(0) - f(0,\varphi)) + P \bar{y}_t \\ &+ \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t T_0(t-s) B_\lambda L \bar{y}_t ds + \lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t T_0(t-s) B_\lambda \bar{g}(s) ds. \end{aligned}$$

Khi đó,

$$\begin{aligned} \|h(t) - \bar{h}(t)\| \le& \|f(t, y_t) - f(t, \bar{y}_t)\| + \|P y_t - P \bar{y}_t\| + \|\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t T_0(t-s) B_\lambda (L y_s - L \bar{y}_t) ds\| \\ &+ \|\lim_{\lambda\to\infty} \int_0^t T_0(t-s) B_\lambda (g(s) - \bar{g}(s)) ds\|. \end{aligned}$$

Đặt
$$\overline{L}_n(t) = \int_0^t M\bar{l}_n(s)ds.$$
$$\bar{l}_n(t) = \max\{\|L\|, l_n(t)\}.$$
Ta có các ước lượng sau
$$\begin{aligned}\|f(t,y_t) - f(t,\bar{y}_t)\| &\le K_1\|y_t - \bar{y}_t\| \\ &\le K_1.e^{wt+\tau L_n(t)}.e^{-(wt+\tau L_n(t))}\|y-\bar{y}\| = K_1.e^{wt+\tau L_n(t)}.\|y-\bar{y}\|_n;\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|Py_t - P\bar{y}_t\| &\le \|P\|\|y_t - \bar{y}_t\| \\ &\le \|P\|.e^{wt+\tau L_n(t)}.e^{-(wt+\tau L_n(t))}\|y-\bar{y}\| = \|P\|.e^{wt+\tau L_n(t)}.\|y-\bar{y}\|_n;\end{aligned}$$

$$\|\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t T_0(t-s)B_\lambda(Ly_s - L\bar{y}_t)ds\| \le Me^{wt}\|L\|\int_0^t e^{-ws}\|y_s-\bar{y}_t\|ds$$
$$\le Me^{wt}\int_0^t \overline{L}_n(s)e^{\tau\overline{L}_n(s)}e^{-(ws+\tau\overline{L}_n(s))}\|y-\bar{y}\|ds \le Me^{wt}\int_0^t \bar{l}_n(s)e^{\tau\bar{l}_n(s)}\|y-\bar{y}\|_n ds$$
$$\le \frac{1}{\tau}e^{ws+\tau\bar{L}_n(s)}\|y-\bar{y}\|_n;$$

$$\|\lim_{\lambda\to\infty}\int_0^t T_0(t-s)B_\lambda(g(s)-\bar{g}(s))ds\| \le Me^{wt}\int_0^t e^{-ws}\|g(s)-\bar{g}(s)\|ds$$
$$\le Me^{wt}\int_0^t e^{-ws}l_n(s)\|y_s-\bar{y}_t\|ds \le Me^{wt}\int_0^t \bar{l}_n(s)e^{\tau\bar{l}_n(s)}\|y-\bar{y}\|_n ds \le \frac{1}{\tau}e^{ws+\tau\bar{L}_n(s)}\|y-\bar{y}\|_n.$$

Do đó, $\|h-\bar{h}\|_n \le \left(\|P\| + K_1 + \dfrac{2}{\tau}\right)\|y-\bar{y}\|_n$.
Từ đó suy ra
$$H_d(N(y), N(\bar{y})) \le \left(\|P\| + K_1 + \frac{2}{\tau}\right)\|y-\bar{y}\|_n.$$
Vì $\|P\| + K_1 < 1$, nên ta có thể chọn τ đủ lớn sao cho $\|P\| + K_1 + \dfrac{2}{\tau} < 1$. Vậy N là toán tử co.

Tiếp theo, ta chứng minh N chấp nhận được.
Cho $y \in C([-r,\infty), \overline{D(A)})$. Xét $N : C([-r,n], \overline{D(A)}) \to \mathcal{P}_{cl}(C([-r,n], \overline{D(A)}))$, cho bởi
$$N(y) = \left\{ h \in C([-r,n], \overline{D(A)}) : h(t) = \begin{cases} \varphi(t), \text{ nếu t} \in [-r,0] \\ f(t,y_t) + T_0(t)[\mathcal{D}\varphi(0) - f(0,\varphi)] + Py_t \\ + \lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_0^t T_0(t-s)B_\lambda Ly_s ds \\ + \lim\limits_{\lambda\to\infty}\int_0^t T_0(t-s)B_\lambda g(s)ds, \text{ nếu t} \in [0,n]. \end{cases} \right\}$$

trong đó, $g \in S^n_{F,y} = \{h \in L^1([0,n], \overline{D(A)}) : h \in F(t, y_t) \text{ a.e t} \in [0,n]\}$.
Từ (H1), (H3), (H4) và F là ánh xạ đa trị với giá trị compact, nên bằng lập luận tương tự như trong [14] (hoặc [15]) ta suy ra với mọi $y \in C([-r,n], \overline{D(A)})$ thì $N(y) \in \mathcal{P}_{cp}(C([-r,n], \overline{D(A)}))$ và tồn tại $y_* \in C([-r,n], E)$ sao cho $y_* \in N(y_*)$.
Cho $h \in C([-r,n], \overline{D(A)}), \bar{y} \in \bar{U}$ và $\epsilon > 0$.
Nếu $y_* \in N(\bar{y})$ thì $\|y_* - N(\bar{y})\| = 0$ và

$$\|\bar{y} - y_*\| \le \|\bar{y} - N\bar{y}\| + \|y_* - h\|.$$

Vì h bất kì, ta có thể giả sử $h \in B(y_*, \epsilon)$. Do đó,

$$\|\bar{y} - y_*\|_n \le \|\bar{y} - N\bar{y}\|_n + \epsilon.$$

Nếu $y_* \notin N(\bar{y})$ thì $\|y_* - N(\bar{y})\| \neq 0$. Vì $N(\bar{y})$ compact, tồn tại $x \in N(\bar{y})$ sao cho $\|y_* - N\bar{y}\| = \|y_* - x\|$. Vì $x \in N(\bar{y})$, ta được

$$\|\bar{y} - x\| \le \|\bar{y} - N\bar{y}\| + \|x - h\|.$$

Vì h bất kì, ta có thể giả sử $h \in B(x, \epsilon)$. Do đó,

$$\|\bar{y} - x\|_n \le \|\bar{y} - N\bar{y}\|_n + \epsilon.$$

Vậy, N là toán tử co chấp nhận được. Hơn nữa, từ cách chọn của U, không có $y \in \partial U$ sao cho $y \in \lambda N(y)$ với $\lambda \in [0,1)$ nào đó. Từ bổ đề 2.1, N có ít nhất một điểm bất động chính là nghiệm tích phân của bài toán (1.1). □

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] J.P. Aubin, A. Cellina, 1984. Differential Inclusions. Set-Valued Maps and Viability Theory. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences], *Springer-Verlag*, Berlin, 264.

[2] T.D. Ke, D. Lan, 2017. Fixed point approach for weakly asymptotic stability of fractional differential inclusions involving impulsive effects. *J. Fixed Point Theory Appl.* 19(4), pp. 2185-2208.

[3] T.D. Ke, N.V. Loi, V. Obukhovskii, 2015. Decay solutions for a class of fractional differential variational inequalities. *Fract. Calc. Appl. Anal.* 18(3), pp. 531-553.

[4] R. Datko, 1977. Linear autonomous neutral differential equations in a Banach space. *J. Differential Equations*, 25, pp. 258-274.

[5] Nguyen Thanh Anh and Tran Dinh Ke, 2015. Decay integral solutions for neutral fractional differential equations with infinite delays. *Math. Meth. Appl. Sci.*

[6] Wen, Haiyang; Shu, Shi; Wen, 2020. Liping Analytical and numerical dissipativity of neutral functional differential equations. *Appl. Math. Lett.* 100, 106016, pp. 7.

[7] Wang, Weibing; Shen, Jianhua, 2020. Positive periodic solutions for neutral functional differential equations. *Appl. Math. Lett.* 102, 106154, pp. 6.

[8] Hernández, Eduardo; Wu, Jianhong; Fernandes, Denis; 2020.Existence and Uniqueness of Solutions for Abstract Neutral Differential Equations with State-Dependent Delay. *Appl. Math. Optim.* 81, No. 1, pp. 89-111.

[9] Ezzinbi K., Marrakesh, S. L. Rhali, Tara, 2014. Existence and controllability for nondensely defined partial neutral functional differential inclusions.

[10] M. Adimy, K. Ezzinbi, 1998. A class of linear partial neutral functional differential equations with non-dense domain. *J. Differential Equations* 147, pp. 285-332.

[11] M. Adimy, K. Ezzinbi, 1999. Existence and linearized stability for partial neutral functional differential equations with non-dense domain. *Differ. Equ. Dyn. Syst.*, 7, pp. 371-417.

[12] M. Adimy, K. Ezzinbi, M. Laklach, 2001. *Spectral decomposition for partial neutral functional differential equations.* Springer.

[13] M. Frigon, 2002. *Fixed point resultats for multivalued contractions on gauge spaces.* SIMAA 4, 175-181.

[14] J. Henderson, A. Ouahab, 2005. Existence results for nondensely defined semilinear functional differential inclusions in Fréchet spaces. *J. Qual. Theory Differ. Equ.*

[15] M. Benchohra, A. Ouahab, 2005. Controllability results for functional semilinear differential inclusions in Fréchet spaces. *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl., Ser. A,* Theory Methods 61, 405-423.

[16] M. Frigon, 2002. *Fixed point resultats for multivalued contractions on gauge spaces.* SIMAA 4, 175-181.

ABSTRACT

Solvability for the partial neutral functional differential inclusions

Bui Thi Hai Yen[1], Nguyen Thi Nhan[1] and Nguyen Thi Quynh[2]

[1]*Department of Mathematics, Hoa Lu University*

[2]*Department of Fundamental Science, Hanoi University of Industry*

In this article, we study the existence of integral solutions to the following neutral functional differential inclusion:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}[\mathcal{D}y_t - f(t,y_t)] - A[\mathcal{D}y_t - f(t,y_t)] - Ly_t \in F(t,y_t), t \in J = [0,\infty), \\ y_0 = \varphi \in C_E = C([-r,0];E), r > 0. \end{cases} \tag{1}$$

By using the multivalued analysis theory, the fixed point theorem for condensing map and the Frigon's fixed point theorem, we give sufficient conditions for the solvability of (1).

Keywords: partial neutral functional differential inclusion, the fixed point theorem.