

XÂY DỰNG TIÊU CHUẨN ỔN ĐỊNH MŨ TOÀN CỤC CHO ĐIỂM CÂN BẰNG CỦA MẠNG NƠN TẾ BÀO CÓ XUNG VÀ TRỄ BIẾN THIÊN

Đặng Thị Thu Hiền và Đinh Bích Hảo

Khoa Tự nhiên, Trường Đại học Hoa Lư

Tóm tắt: Bài báo nghiên cứu tiêu chuẩn ổn định mũ toàn cục cho điểm cân bằng của mạng nơron tế bào có xung và trễ biến thiên. Dựa trên việc xây dựng hàm Lyapunov, sử dụng bất đẳng thức Young và một số kỹ thuật của giải tích như: tính chất của hàm số liên tục trên một đoạn, tính chất của *inf* và *sup*, chúng tôi sẽ xây dựng tiêu chuẩn ổn định mũ toàn cục mới cho điểm cân bằng của mạng nói trên. Ngoài ra, chúng tôi lấy ví dụ minh họa cho kết quả đạt được.

Từ khóa: Ổn định mũ toàn cục, mạng nơron tế bào, xung, trễ, hàm Lyapunov.

1. Mở đầu

Trong những năm gần đây mạng nơron tế bào có xung và trễ biến thiên đã thu hút được sự quan tâm nghiên cứu sâu rộng và mạnh mẽ của các nhà khoa học trên thế giới vì các ứng dụng liên quan đến xử lý tín hiệu và hình ảnh, nhận dạng mẫu hình, liên kết bộ nhớ,... Đã có nhiều kết quả công bố về sự ổn định mũ toàn cục cho điểm cân bằng của mạng có dạng sau:

$$\begin{cases} x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t - \tau_j(t))) + I_i, t \neq t_k, t > t_0, \\ \Delta x_i(t_k) = x_i(t_k^+) - x_i(t_k) = P_i(x_i(t_k)), k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1.1)$$

Kết quả trong [1, 2] cho thấy sự phụ thuộc của độ trễ τ vào các thời điểm xung, cụ thể yêu cầu $\tau \leq t_k - t_{k-1}, \forall k \geq 1$ được đặt ra, do đó kết quả chỉ có giá trị đối với sự chậm trễ nhỏ nên không có ý nghĩa đối với một số ứng dụng thực tế. Kết quả trong [3, 4] đòi hỏi $k_1 > k_2$, như vậy mạng ban đầu không có tác động của xung cần được ổn định. Kết quả trong [5] của Bo wu, Yang Liu, Jianquan Lu đạt được mà không đặt ra yêu cầu $k_1 > k_2$, với kết quả này mạng ban đầu không có tác động của xung có thể không ổn định, điều này cho thấy xung đóng vai trò quan trọng trong việc làm cho điểm cân bằng của mạng ổn định mũ toàn cục.

Trong bài báo này, chúng tôi mở rộng mô hình (1.1) sang mô hình (1.2) dưới đây. Chúng tôi sẽ xây dựng tiêu chuẩn ổn định mũ toàn cục cho điểm cân bằng của mạng (1.2). Kết quả của chúng tôi vừa góp phần xây dựng thêm tiêu chuẩn ổn định mũ toàn cục cho điểm cân bằng của mạng (1.1) vừa góp phần mở rộng kết quả ở mô hình tổng quát hơn.

Ngày nhận bài: 5/3/2019. Ngày sửa bài: 19/3/2019. Ngày nhận đăng: 26 /3/2019.

Tác giả liên hệ: Đặng Thị Thu Hiền. Địa chỉ e-mail: dtthien@hlu.edu.vn

$$\begin{cases} \dot{x}_i(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_j(t))) + I_i, t \neq t_k, t > t_0, \\ \Delta x_i(t_k) = x_i(t_k^+) - x_i(t_k) = P_i(x_i(t_k)), k = 1, 2, \dots, \end{cases} \quad (1.2)$$

trong đó $i = 1, 2, \dots, n, n \geq 2$ là số neuron của mạng; $\tau_j(t)$ là sự truyền trễ dọc theo sợi trục của các neuron thứ j và thỏa mãn $0 \leq \tau_j(t) \leq \tau; 0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots, \lim_{k \rightarrow \infty} t_k = \infty$ với t_0 là thời điểm ban đầu, $t_1, t_2, \dots$, là các thời điểm xung; $PC = \{\phi: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n, \phi(t)$ liên tục hầu khắp nơi trừ ra tại hữu hạn các điểm $\tilde{t}$ mà tại đó tồn tại $\phi(\tilde{t}^+), \phi(\tilde{t}^-)$ và $\phi(\tilde{t}^-) = \phi(\tilde{t}^+)\}$; $BC = \{\phi \in PC: \phi \text{ bị chặn trên } [-\tau, 0]\}$, với $\phi \in BC$ ta xác định $\|\phi\|_\tau = \sup_{s \in [-\tau, 0]} \|\phi(s)\|$.

Kí hiệu $x(t) = x(t, t_0, \phi)$ là nghiệm của hệ (1.2) thỏa mãn điều kiện ban đầu $x_{t_0} = \phi$, tức là $x_{t_0}(s) = x(t_0 + s) = \phi(s), s \in [-\tau, 0]$. Giả sử nghiệm của (1.2) liên tục khắp nơi trừ tại các thời điểm xung t_k mà tại đó nghiệm liên tục trái và tồn tại giới hạn phải.

Điểm $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm cân bằng của hệ (1.2) nếu

$$\begin{cases} 0 = -c_i x_i^* + \sum_{j=1}^n a_{ij} f_j(x_j^*) + \sum_{j=1}^n b_{ij} g_j(x_j^*) + I_i, i = 1, 2, \dots, n \\ 0 = P_i(x_i^*) \end{cases} \quad (1.3)$$

Ta sẽ nghiên cứu mô hình (1.2) với các giả sử sau:

A₁) Tồn tại các hằng số $L_i > 0, N_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$ thỏa mãn

$$|f_i(x_1) - f_i(x_2)| \leq L_i |x_1 - x_2|, |g_i(x_1) - g_i(x_2)| \leq N_i |x_1 - x_2|, \forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, n.$$

A₂) $P_i(x_i(t_k)) = -\sigma_{ik}(x_i(t_k) - x_i^*), 1 - d_k < \sigma_{ik} < 1 + d_k$, trong đó $0 < d_k < 1, i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots$,

A₃) Tồn tại duy nhất điểm cân bằng thỏa mãn (1.3).

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Một số định nghĩa

Định nghĩa 2.1. Hàm $V: \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ được gọi là thuộc lớp V_0 nếu

(i) V liên tục trên mỗi tập $(t_{k-1}, t_k] \times \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \dots$, và $V(t, 0) = 0, \forall t \geq t_0$,

(ii) $V(t, x)$ là Lipschitz địa phương theo x ,

(iii) Với mỗi $k = 1, 2, \dots$ tồn tại giới hạn $\lim_{(t,y) \rightarrow (t_k^+, x)} V(t, y) = V(t_k^+, x)$.

Định nghĩa 2.2. Cho hàm $V \in V_0$. Với $(t, x) \in [t_{k-1}, t_k) \times \mathbb{R}^n, k = 1, 2, \dots$, đạo hàm trên bên phải của $V \in V_0$ đối với hệ (1.2) được xác định bởi:

$$D^+V(t, x(t)) = \overline{\lim}_{h \rightarrow 0^+} \frac{V(t+h, x(t+h)) - V(t, x(t))}{h}.$$

Định nghĩa 2.3. Điểm cân bằng $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)^T$ của hệ (1.2) được gọi là ổn định mũ toàn cục nếu $\exists \alpha > 0, \exists M \geq 1$ sao cho: $\|x(t, t_0, \phi) - x^*\| \leq M \|\phi - x^*\| e^{-\alpha(t-t_0)}, \forall t \geq t_0$.

Đặt $y_i(t) = x_i(t) - x_i^*, i = 1, 2, \dots, n$ thì hệ (1.2) trở thành:

$$\begin{cases} y_i'(t) = -c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} [f_j(y_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*)] + \sum_{j=1}^n b_{ij} [g_j(y_j(t - \tau_j(t)) + x_j^*) - g_j(x_j^*)] \\ \Delta y_i(t_k) = P_i(y_i(t_k) + x_i^*), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad k = 1, 2, \dots \end{cases}$$

Bổ đề 2.1 (Bất đẳng thức Young) Cho $a, b \geq 0$ và $p, q > 1: \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Khi đó: $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

2.2. Kết quả chính

Trong mục này, chúng tôi xây dựng tiêu chuẩn ổn định mũ toàn cục cho điểm cân bằng của mạng neuron tế bào có xung và trễ biến thiên (1.2).

Định lý 2.1 Giả sử $p \geq 1, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n > 0$ và các điều kiện $A_1 - A_3$ được thỏa mãn. Đặt:

$$k_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \left[pc_i - L_i \sum_{j=1}^n |a_{ji}|^p \frac{\alpha_j}{\alpha_i} - (p-1) \sum_{j=1}^n (L_j + N_j) \right], \quad k_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \left(N_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}|^p \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right).$$

Giả sử: $k_1 > 0$ và $\exists \sigma > 0, \lambda > 0$:

$$(i) -k_1 + \frac{k_2 e^{\lambda \tau}}{d_{k-1}} \leq \sigma - \lambda, k = 1, 2, \dots, \text{ với } 0 < d_0 < 1, d_k \text{ được cho trong } A_2,$$

$$(ii) \ln d_{k-1} < -(\sigma + \lambda)(t_k - t_{k-1}), k = 1, 2, \dots$$

Khi đó, điểm cân bằng của hệ (1.2) là ổn định mũ toàn cục.

Chứng minh. Đặt $\alpha_{\max} = \max\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}, \alpha_{\min} = \min\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$. Ta xác định hàm

$$\text{Lyapunov } v(t) = V(t, y(t)) = \sum_{i=1}^n \alpha_i |y_i(t)|^p \text{ và xét } \|y(t)\| = \left(\sum_{i=1}^n |y_i(t)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Với $t \geq t_0$ và $t \neq t_k, k = 1, 2, \dots$ ta có: $D^+v(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i p |y_i(t)|^{p-1} \text{sgn}(y_i(t)) y_i'(t)$. Do đó:

$$\begin{aligned} D^+v(t) = \sum_{i=1}^n \alpha_i p |y_i(t)|^{p-1} \text{sgn}(y_i(t)) & \left[-c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} (f_j(y_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*)) + \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^n b_{ij} (g_j(y_j(t - \tau_j(t)) + x_j^*) - g_j(x_j^*)) \right] \end{aligned}$$

$$\leq \sum_{i=1}^n \alpha_i p \left[-c_i |y_i(t)|^p + \sum_{j=1}^n L_j |a_{ij}| |y_i(t)|^{p-1} |y_j(t)| + \sum_{j=1}^n N_j |b_{ij}| |y_i(t)|^{p-1} |y_j(t - \tau_j(t))| \right]. \quad (2.1)$$

+ Trường hợp $p > 1$. Áp dụng bất đẳng thức Young với $p > 1, q = \frac{p}{p-1}$ ta có:

$$\left(|a_{ij}| |y_j(t)| \right) \left(|y_i(t)|^{p-1} \right) \leq \frac{|a_{ij}|^p |y_j(t)|^p}{p} + \frac{p-1}{p} |y_i(t)|^p,$$

$$\left(|b_{ij}| |y_j(t - \tau_j(t))| \right) \left(|y_i(t)|^{p-1} \right) \leq \frac{|b_{ij}|^p |y_j(t - \tau_j(t))|^p}{p} + \frac{p-1}{p} |y_i(t)|^p.$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } D^+v(t) &\leq -\sum_{i=1}^n \left[pc_i - L_i \sum_{j=1}^n |a_{ji}|^p \frac{\alpha_j}{\alpha_i} - (p-1) \sum_{j=1}^n (L_j + N_j) \right] \alpha_i |y_i(t)|^p + \\ &+ \sum_{i=1}^n \left(N_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}|^p \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right) \alpha_i |y_i(t - \tau_i(t))|^p \leq -k_1 v(t) + k_2 \sup_{t-\tau \leq s \leq t} v(s). \end{aligned}$$

$$+ \text{Trường hợp } p = 1. \text{ Khi đó: } k_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \left[c_i - L_i \sum_{j=1}^n |a_{ji}| \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right], \quad k_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \left(N_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right).$$

Từ (2.1) ta có:

$$\begin{aligned} D^+v(t) &\leq -\sum_{i=1}^n \left[c_i - L_i \sum_{j=1}^n |a_{ji}| \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right] \alpha_i |y_i(t)| + \sum_{i=1}^n \left(N_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \frac{\alpha_j}{\alpha_i} \right) \alpha_i |y_i(t - \tau_i(t))| \\ &\leq -k_1 v(t) + k_2 \sup_{t-\tau \leq s \leq t} v(s) \end{aligned}$$

$$\text{Vậy ta chứng minh được: } D^+v(t) \leq -k_1 v(t) + k_2 \sup_{t-\tau \leq s \leq t} v(s)$$

$$\text{Tiếp theo, ta đặt } \gamma = \sup_{k \geq 1} \left\{ \frac{1}{d_{k-1}} \right\}. \text{ Từ giả thiết } A_1) \quad \frac{1}{d_{k-1}} \leq \frac{\sigma - \lambda + k_1}{k_2 e^{\lambda \tau}}, \forall k \geq 1$$

$$\Rightarrow \gamma \leq \frac{\sigma - \lambda + k_1}{k_2 e^{\lambda \tau}} \Rightarrow -k_1 + k_2 e^{\lambda \tau} \gamma \leq \sigma - \lambda.$$

Từ $A_2)$ ta có:

$$\gamma \geq \frac{1}{d_{k-1}} > e^{(\sigma + \lambda)(t_1 - t_0)} > 1. \text{ Do đó, } \exists M \geq 1: e^{(\sigma + \lambda)(t_1 - t_0)} \leq M \leq \gamma e^{\lambda \tau}. \quad (2.2)$$

$$\text{Suy ra: } \|\phi - x^*\|_\tau^p < \|\phi - x^*\|_\tau^p e^{\sigma(t_1 - t_0)} \leq M \|\phi - x^*\|_\tau^p e^{-\lambda(t_1 - t_0)}.$$

$$\text{Tiếp theo ta chứng minh: } v(t) \leq \alpha_{\max} M \|\phi - x^*\|_\tau^p e^{-\lambda(t - t_0)}, \forall t \in (t_0, t_1].$$

Ta quy về chứng minh:

$$v(t) \leq \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t_1-t_0)}, \forall t \in (t_0, t_1]. \quad (2.3)$$

Vì $v(t)$ liên tục trái tại t_1 nên để chứng minh (2.3) ta chỉ cần chứng minh

$$v(t) \leq \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t_1-t_0)}, \forall t \in (t_0, t_1). \quad (2.4)$$

Giả sử (2.4) không đúng. Khi đó tồn tại $\bar{t} \in (t_0, t_1)$ sao cho

$$v(\bar{t}) > \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t_1-t_0)} > \alpha_{\max} \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p \geq v(t_0 + s), \forall s \in [-\tau, 0]. \quad (2.5)$$

$$\text{Đặt } \hat{t} = \inf \left\{ t : v(t) = \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t_1-t_0)}, t \in (t_0, \bar{t}) \right\}$$

$$\text{Dễ thấy, } \hat{t} \in (t_0, \bar{t}) \text{ và } \begin{cases} v(\hat{t}) = \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t_1-t_0)} \\ v(t) \leq v(\hat{t}), t \in [t_0 - \tau, \hat{t}] \end{cases}. \quad (2.6)$$

$$\text{Đặt: } \tilde{t} = \sup \left\{ t : v(t) = \alpha_{\max} \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p, t \in [t_0, \hat{t}) \right\} \Rightarrow \tilde{t} \in [t_0, \hat{t}) : \begin{cases} v(\tilde{t}) = \alpha_{\max} \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p \\ v(t) \geq v(\tilde{t}), t \in [\tilde{t}, \hat{t}] \end{cases}. \quad (2.7)$$

Với $\forall s \in [-\tau, 0], \forall t \in [\tilde{t}, \hat{t}]$ thì $t+s \in [\tilde{t}-\tau, \hat{t}] \subset [t_0-\tau, \hat{t}]$. Do đó từ (2.2), (2.6), (2.7) ta có:

$$v(t+s) \leq \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t_1-t_0)} \leq \alpha_{\max} \gamma e^{\lambda\tau} \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p = \gamma e^{\lambda\tau} v(\tilde{t}) \leq \gamma e^{\lambda\tau} v(t).$$

$$\text{Suy ra } D^+v(t) \leq -k_1 v(t) + k_2 \gamma e^{\lambda\tau} v(t) = (-k_1 + k_2 e^{\lambda\tau} \gamma) v(t) \leq (\sigma - \lambda) v(t), \forall t \in [\tilde{t}, \hat{t}].$$

Do đó hàm $u(t) = v(t)e^{-(\sigma-\lambda)t}$ nghịch biến trên $[\tilde{t}, \hat{t}]$. Do đó:

$$\begin{aligned} v(\hat{t}) &\leq v(\tilde{t}) e^{(\sigma-\lambda)(\hat{t}-\tilde{t})} = \alpha_{\max} \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{(\sigma-\lambda)(\hat{t}-\tilde{t})} < \alpha_{\max} \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{\sigma(t_1-t_0)} < \\ &< \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t_1-t_0)} = v(\hat{t}) \text{ (vô lý)} \Rightarrow (2.4) \text{ đúng} \end{aligned}$$

Tiếp theo ta đi chứng minh: $v(t) \leq \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall t \in (t_{k-1}, t_k], \forall k \geq 1$.

$$\text{Giả sử: } v(t) \leq \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall t \in (t_{k-1}, t_k], k=1,2,\dots,m. \quad (2.8)$$

$$\text{Ta sẽ chứng minh: } v(t) \leq \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall t \in (t_m, t_{m+1}]. \quad (2.9)$$

Vì $v(t)$ liên tục trái tại t_{m+1} nên để chứng (2.9) ta chỉ cần chứng minh :

$$v(t) \leq \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t-t_0)}, \forall t \in (t_m, t_{m+1}). \quad (2.10)$$

Giả sử (2.10) không đúng. Ta xác định: $\bar{t} = \inf \left\{ t \in (t_m, t_{m+1}) : v(t) > \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t-t_0)} \right\}$.

Theo giả thiết: $\ln d_{k-1} < -(\sigma + \lambda)(t_k - t_{k-1}), k=1,2,\dots$

$$\Rightarrow 0 < d_{k-1} < 1 \Rightarrow d_{k-1}^p \leq d_{k-1}, \forall p \geq 1, \forall k \geq 1$$

$$\text{Ta có: } v(t_m^+) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \left| y_i(t_m) + P_i(y_i(t_m) + x_i^*) \right|^p = \sum_{i=1}^n \alpha_i |1 - \sigma_{im}|^p |x_i(t_m) - x_i^*|^p \leq$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^n \alpha_i d_m^p \left| x_i(t_m) - x_i^* \right|^p = d_m^p v(t_m) \leq d_m v(t_m) \leq d_m \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t_m - t_0)} < \\ &< \left(d_m e^{\lambda(t_{m+1} - t_m)} \right) \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(\bar{t} - t_0)} < \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(\bar{t} - t_0)}. \end{aligned}$$

Từ đó $\bar{t} > t_m$. Từ tính liên tục của $v(t)$ và tính chất của $\inf$ ta có:

$$\begin{cases} v(\bar{t}) = \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(\bar{t} - t_0)} \\ v(t) \leq \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t - t_0)}, \forall t \in (t_m, \bar{t}). \end{cases} \quad (2.11)$$

Đặt: $t^* = \sup \left\{ t \mid v(t) = d_m e^{\lambda(t_{m+1} - t_m)} \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(\bar{t} - t_0)}, t \in (t_m, \bar{t}) \right\}$.

Dễ thấy $t^* \in (t_m, \bar{t})$ và thỏa mãn $v(t^*) = d_m \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{\lambda(t_{m+1} - t_m)} e^{-\lambda(\bar{t} - t_0)}$.

Với $\forall t \in [t^*, \bar{t}]$, $\forall s \in [-\tau, 0]$ ta có $t+s \in (t_0 - \tau, t_m]$ hoặc $t+s \in (t_m, \bar{t}]$.

Do đó từ (2.5), (2.8), (2.11) ta có:

$$\begin{aligned} v(t+s) &\leq \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t+s-t_0)} \leq \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(\bar{t} - t_0)} e^{\lambda(\bar{t} - t)} e^{\lambda\tau} \leq \\ &\leq \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(\bar{t} - t_0)} e^{\lambda(t_{m+1} - t_m)} e^{\lambda\tau} = \frac{v(t^*) e^{\lambda\tau}}{d_m}. \\ \Rightarrow \sup_{t-\tau \leq s \leq t} v(s) &\leq \frac{v(t^*) e^{\lambda\tau}}{d_m} \Rightarrow D^+ v(t) \leq \left(-k_1 + k_2 \frac{e^{\lambda\tau}}{d_m} \right) v(t) \leq (\sigma - \lambda) v(t), \forall t \in [t^*, \bar{t}]. \end{aligned}$$

Từ đó hàm $u(t) = v(t) e^{-(\sigma - \lambda)t}$ nghịch biến trên $[t^*, \bar{t}]$. Điều này dẫn đến:

$$\begin{aligned} v(\bar{t}) &\leq v(t^*) e^{(\sigma - \lambda)(\bar{t} - t^*)} = d_m \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{\lambda(t_{m+1} - t_m)} e^{-\lambda(\bar{t} - t_0)} e^{(\sigma - \lambda)(\bar{t} - t^*)} \\ &< e^{-(\sigma + \lambda)(t_{m+1} - t_m)} M \alpha_{\max} \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{\lambda(t_{m+1} - t_m)} e^{-\lambda(\bar{t} - t_0)} e^{(\sigma - \lambda)(\bar{t} - t_0)} e^{(\sigma - \lambda)(\bar{t} - t^*)} \\ &< \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\sigma(t_{m+1} - t_m)} e^{-\lambda(\bar{t} - t_0)} e^{\sigma(\bar{t} - t^*)} < \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(\bar{t} - t_0)} = v(\bar{t}) \quad (\text{vô lý}). \end{aligned}$$

Vậy ta đã chứng minh được: $v(t) \leq \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t - t_0)}$, $\forall t \in (t_{k-1}, t_k]$, $\forall k \geq 1$ (2.12)

Hiển nhiên, (2.12) cũng đúng khi $t = t_0$. Do đó: $v(t) \leq \alpha_{\max} M \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau}^p e^{-\lambda(t - t_0)}$, $\forall t \geq t_0$.

Vì $v(t) \geq \alpha_{\min} \|y(t)\|^p \Rightarrow \|x(t, t_0, \phi) - x^*\| = \|y(t)\| \leq M^{\frac{1}{p}} \left(\frac{\alpha_{\max}}{\alpha_{\min}} \right)^{\frac{1}{p}} \left\| \phi - x^* \right\|_{\tau} e^{-\frac{\lambda}{p}(t - t_0)}$, $\forall t \geq t_0$.

Do đó, điểm cân bằng của hệ (1.1) là ổn định mũ toàn cục.

□

Trong Định lí 2.1, cho $p=1, \alpha_i=1, \forall i=1, 2, \dots, n$ ta có hệ quả sau:

Hệ quả 2.1. Giả sử các điều kiện $A_1 - A_3$ được thỏa mãn.

$$\text{Đặt: } k_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \left[c_i - L_i \sum_{j=1}^n |a_{ji}| \right], \quad k_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \left(N_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \right).$$

Giả sử $k_1 > 0$ và $\exists \sigma > 0, \lambda > 0$ sao cho:

$$(i) -k_1 + \frac{k_2 e^{\lambda \tau}}{d_{k-1}} \leq \sigma - \lambda, k = 1, 2, \dots, \text{ với } 0 < d_0 < 1, d_k \text{ được cho trong } A_2,$$

$$(ii) \ln d_{k-1} < -(\sigma + \lambda)(t_k - t_{k-1}), k = 1, 2, \dots$$

Khi đó, điểm cân bằng của hệ (1.2) là ổn định mũ toàn cục.

Định lý 2.2. Giả sử các điều kiện $A_1 - A_3$ được thỏa mãn. Đặt:

$$k_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \left[2c_i - \sum_{j=1}^n (L_i |a_{ji}| + L_j |a_{ij}| + N_j |b_{ij}|) \right], \quad k_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \left(N_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \right).$$

Giả sử: $k_1 > 0$ và $\exists \sigma > 0, \lambda > 0$:

$$(i) -k_1 + \frac{k_2 e^{\lambda \tau}}{d_{k-1}} \leq \sigma - \lambda, k = 1, 2, \dots, \text{ với } 0 < d_0 < 1, d_k \text{ được cho trong } A_2,$$

$$(ii) \ln d_{k-1} < -(\sigma + \lambda)(t_k - t_{k-1}), k = 1, 2, \dots$$

Khi đó, điểm cân bằng của hệ (1.2) là ổn định mũ toàn cục.

Chứng minh.

Ta xác định hàm Lyapunov $v(t) = V(t, y(t)) = \sum_{i=1}^n |y_i(t)|^2$ và xét $\|y(t)\| = \left(\sum_{i=1}^n |y_i(t)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$.

Với $t \geq t_0$ và $t \neq t_k, k = 1, 2, \dots$ ta có: $D^+v(t) = \sum_{i=1}^n 2|y_i(t)| \operatorname{sgn}(y_i(t)) y_i'(t)$. Do đó:

$$\begin{aligned} D^+v(t) &= \sum_{i=1}^n 2|y_i(t)| \operatorname{sgn}(y_i(t)) \left[-c_i y_i(t) + \sum_{j=1}^n a_{ij} (f_j(y_j(t) + x_j^*) - f_j(x_j^*)) + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n b_{ij} (g_j(y_j(t - \tau_j(t)) + x_j^*) - g_j(x_j^*)) \right] \\ &\leq \sum_{i=1}^n 2 \left[-c_i |y_i(t)|^2 + \sum_{j=1}^n L_j |a_{ij}| |y_i(t)| |y_j(t)| + \sum_{j=1}^n N_j |b_{ij}| |y_i(t)| |y_j(t - \tau_j(t))| \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Ta có: } |y_i(t)| |y_j(t)| \leq \frac{|y_i(t)|^2}{2} + \frac{|y_j(t)|^2}{2}, \quad |y_i(t)| |y_j(t - \tau_j(t))| \leq \frac{|y_i(t)|^2}{2} + \frac{|y_j(t - \tau_j(t))|^2}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Do đó } D^+v(t) \leq & -\sum_{i=1}^n \left[2c_i - \sum_{j=1}^n (L_i |a_{ji}| + L_j |a_{ij}| + N_j |b_{ij}|) \right] |y_i(t)|^2 + \\ & + \sum_{i=1}^n \left(N_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \right) |y_i(t - \tau_i(t))|^2 \leq -k_1 v(t) + k_2 \sup_{t-\tau \leq s \leq t} v(s). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Ta có: } v(t_m^+) &= \sum_{i=1}^n |y_i(t_m) + P_i(y_i(t_m) + x_i^*)|^2 = \sum_{i=1}^n |1 - \sigma_{im}|^2 |x_i(t_m) - x_i^*|^2 \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n d_m^2 |x_i(t_m) - x_i^*|^2 = d_m^2 v(t_m) \leq d_m v(t_m). \end{aligned}$$

Do đó định lí chứng minh tương tự Định lí 2.1. □

2.3. Ví dụ

Ví dụ 2.1. Xét mạng nơron tế bào có xung và trễ sau:

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^2 a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^2 b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_j(t))) + I_i, t \neq t_k, t > t_0, \text{ trong đó}$$

$$f_i(x_i) = \frac{1}{2}(|x_i + 1| - |x_i - 1|), \quad g_i(x_i) = (|x_i + 1| - |x_i - 1|) \quad (i = 1, 2), t_0 = 0, t_k - t_{k-1} = 0.1,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0.4 & -0.1 \\ 0.2 & 0.2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0.2 \\ -0.3 & 0.2 \end{bmatrix}, c_1 = c_2 = 3, I_1 = 2.7424242, I_2 = 0.60606072.$$

$$0 \leq \tau_1(t) = \tau_2(t) = \sin^2(t) \leq \tau = 1, \quad \begin{cases} x_1(t_k + 0) = \frac{1.8181818 - x_1(t_k)}{2} \\ x_2(t_k + 0) = \frac{1.0606064 - x_2(t_k)}{6} \end{cases}, k = 1, 2, \dots$$

Dãy $\{t_k\}_{k \geq 1}$ lập thành cấp số cộng, $t_k = 0.1k, k \geq 1$. Do đó $t_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$

Dễ thấy f_i, g_i thỏa mãn điều kiện A_1 với $L_i = 1, N_i = 2, i = 1, 2$. Ta tính được

$$k_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \left[c_i - L_i \sum_{j=1}^n |a_{ji}| \right] = 2.4, \quad k_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \left(N_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \right) = 2.6, \quad \sigma_{1k} = \frac{3}{2}, \sigma_{2k} = \frac{7}{6}, k = 1, 2, \dots$$

Chọn $d_k = 0.8, k = 0, 1, 2, \dots, \sigma = 1.4, \lambda = 0.1$ ta thấy các điều kiện A_2, A_3 và của Hệ quả 2.1 đều được thỏa mãn. Vậy điểm cân bằng duy nhất $x^* = (0.6060606, 0.1515152)^T$ của mạng là ổn định mũ toàn cục.

Ví dụ 2.2. Xét mạng nơron tế bào có xung và trễ sau:

$$x_i'(t) = -c_i x_i(t) + \sum_{j=1}^2 a_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^2 b_{ij} g_j(x_j(t - \tau_j(t))) + I_i, t \neq t_k, t > t_0, \text{ trong đó}$$

$$f_i(x_i) = \frac{1}{2}(|x_i + 1| - |x_i - 1|), \quad g_i(x_i) = \sin x_i \quad (i = 1, 2), t_0 = 0, t_k - t_{k-1} = 0.15,$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -0.6 & 0.8 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 1.5 \\ 0.3 & 1 \end{bmatrix}, c_1 = c_2 = 4, I_1 = 2.777046158, I_2 = 0.613983916.$$

$$0 \leq \tau_1(t) = \tau_2(t) = \frac{1}{2} \sin^2(t) \leq \tau = \frac{1}{2}, \begin{cases} x_1(t_k + 0) = \frac{1.8262806 + x_1(t_k)}{3} \\ x_2(t_k + 0) = \frac{0.0668151 + x_2(t_k)}{4} \end{cases}, k = 1, 2, 3, \dots$$

Dãy $\{t_k\}_{k \geq 1}$ lập thành cấp số cộng, $t_k = 0.15k, k \geq 1$. Do đó $t_k \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$

Dễ thấy f_i, g_i thỏa mãn điều kiện A_1 với $L_i = 1, N_i = 1, i = 1, 2$.

Ta tính được:

$$k_1 = \min_{1 \leq i \leq n} \left[2c_i - \sum_{j=1}^n (L_i |a_{ji}| + L_j |a_{ij}| + N_j |b_{ij}|) \right] = 1.9, \quad k_2 = \max_{1 \leq i \leq n} \left(N_i \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \right) = 2.5,$$

$$\sigma_{1k} = \frac{2}{3}, \sigma_{2k} = \frac{3}{4}, k = 1, 2, \dots$$

Chọn $d_k = 0.5, k = 0, 1, 2, \dots, \sigma = 3.6, \lambda = 0.1$ ta thấy các điều kiện A_2, A_3 và của Định lý 2.2 đều được thỏa mãn. Vậy điểm cân bằng duy nhất $x^* = (0.9131403, 0.0222717)^T$ của mạng là ổn định mũ toàn cục.

Nhận xét 2.1. Nếu $g_j \equiv f_j, \forall 1 \leq j \leq n$ thì mô hình (1.2) trở thành mô hình (1.1) và Hệ quả 2.1 khi đó chính là một kết quả trong [5].

Nhận xét 2.2. Trong Ví dụ 2.1, Ví dụ 2.2 của chúng tôi nhằm minh họa cho kết quả đạt được, ta thấy $\tau > t_k - t_{k-1}, \forall k \geq 1$ và $k_1 < k_2$. Do đó kết quả của chúng tôi cải thiện so với một số kết quả đã đạt được, chẳng hạn trong [1-4].

3. Kết luận

Nếu $g_i \equiv f_i, 1 \leq i \leq n$ thì mô hình (1.2) chính là mô hình (1.1). Như vậy kết quả của chúng tôi sẽ góp phần xây dựng thêm tiêu chuẩn ổn định mũ toàn cục cho điểm cân bằng của mô hình (1.1). Ngoài ra, kết quả được mở rộng ở mô hình tổng quát hơn. Kết quả của chúng tôi đạt được ngay cả khi mạng ban đầu không có tác động của xung có thể không ổn định, điều này đặc biệt có ý nghĩa đối với các ứng dụng trong kỹ thuật và công nghệ; hơn nữa, độ trễ τ là bị chặn tùy ý. Đó là lợi thế về kết quả của chúng tôi so với một số kết quả đã được công bố.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Qing wang, Xinzhi Liu, 2008. *Impulsive stabilization of cellular neural networks with time delay via lyapunov functionals*. J. Nonlinear Sci. App, 1, pp. 72-86.
- [2] Xinzhi Liu and Qing Wang, 2008. *Impulsive stabilization of high - order hopfield - type neural networks with time - varying delays*. Iee Transactions on Neural Networks, 19, 1, pp. 71-79.
- [3] Ivanka M. Stamova, Rajcho Ilarionov, 2010. *On global exponential stability for impulsive cellular neural networks*. Computers and Mathematics with Application, 59, pp. 3508-3515.

- [4] Shair Ahmad, IvankaM.Stamova, 2008. *Global exponential stability for impulsive cellular neural networks with time - varying delays*. Nonlinear Analysis, 69, pp. 786-795.
- [5] Bo wu, Yang Liu, Jianquan Lu, 2012. *New results on global expontial stability for impulsive cellular neural networks with any bouned time - varying delays*. Mathematical and Computer Modelling, 55, pp. 837- 843.

ABSTRACT

The building global exponential stability criteria for the equilibrium point of impulsive cellular neural networks with time – varying delays

Dang Thi Thu Hien and Dinh Bich Hao

Faculty of Natural Science, Hoa Lu University, Ninh Binh

In this paper, the global exponential stability criteria for the equilibrium point of impulsive cellular neural networks with time - varying delays is studied. Based on the construction of the Lyapunov function, using Young inequality and some analytical techniques such as the properties of continuous functions on a segment, the properties of *inf*, *sup*, we will build new global exponential stability criteria for the equilibrium point of the networks mentioned above. In addition, we take some examples that illustrate our results.

Keywords: Global exponential stability, cellular neural networks, impulsive, delay, Lyapunov function.