

BÀN VỀ TIẾP CẬN VÀ MỘT SỐ BIỆN PHÁP VẬN DỤNG LÝ THUYẾT RME TRONG DẠY HỌC MÔN TOÁN Ở VIỆT NAM

Lê Tuấn Anh và Trần Cường*

Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Tóm tắt. Bài báo trình bày những kết quả nghiên cứu lý luận và tổng kết kinh nghiệm của chúng tôi về việc vận dụng lý thuyết Realistic Mathematics Education (RME) ở nước ta. Chúng tôi đã tiếp cận những công trình đầu tiên về RME từ nguồn khởi phát lý thuyết cùng một số công bố trong nước gần đây để bàn luận về cách hiểu sao cho đúng nghĩa, cách vận dụng RME sao cho phù hợp thực tiễn của Việt Nam. Bài báo cũng đề xuất một số biện pháp vận dụng RME vào dạy học môn Toán ở Việt Nam. Mỗi biện pháp vận dụng RME cùng ví dụ minh họa được lựa chọn có thể là tham khảo bổ ích cho giáo viên toán ở trường phổ thông.

Từ khóa: lý thuyết RME, dạy học môn Toán, biện pháp, bài tập thực tiễn.

1. Mở đầu

Trong 50 năm hình thành và phát triển, RME được phát triển mạnh mẽ bởi các nhà giáo dục toán học (GDTH) tại Hà Lan [1]. Với nhiều điểm ưu việt, RME được khai thác, vận dụng một cách rộng rãi ở nhiều nước trên thế giới [2].

RME được giới thiệu vào Việt Nam từ những năm 2005, 2006 [3, 4]. Nguyen Phu Loc và Mai Hoan Hao vận dụng RME trong dạy học (DH) hàm số $y = ax + b$ [5]; Trần Cường và Nguyễn Thủy Duyên làm rõ khái niệm *bài tập thực tiễn* và đề xuất phương án xây dựng lớp các bài tập này [6]; Nguyen Tien Trung cùng các cộng sự phân tích mối quan hệ giữa RME với lý thuyết tình huống, tư tưởng RME trong chương trình toán phổ thông Việt Nam, đưa ra một số gợi ý - thông qua vài tình huống cụ thể cho thấy khả năng vận dụng trong thực tiễn DH toán ở nước ta [7-9]. Mặc dù những kết quả trên đã phong phú, chúng tôi nhận thấy 2 khoảng trống cần bàn luận kỹ hơn: giữa ý tưởng nguyên gốc của các nhà sáng lập lý thuyết RME với một số nhìn nhận, diễn giải của các nhà nghiên cứu trong nước; giữa ý tưởng có phần thiên về lý luận hàn lâm của RME với *những biện pháp thực thi* vẫn đảm bảo tính thần RME, đủ khái quát để định hướng hành động một cách phổ quát nhưng cũng đủ tường minh để GV có thể vận dụng.

Bài báo này trình bày những luận điểm chính và những nguyên tắc của RME, khẳng định sự phù hợp của RME với quan điểm chỉ đạo, định hướng DH môn Toán ở Việt Nam, một số khó khăn cần và có thể khắc phục khi vận dụng lý thuyết này. Từ đó chúng tôi đề xuất một số biện pháp vận dụng RME vào DH môn Toán ở Việt Nam.

Ngày nhận bài: 15/4/2020. Ngày sửa bài: 20/7/2020. Ngày nhận đăng: 27/7/2020.

Tác giả liên hệ: Trần Cường. Địa chỉ e-mail: trancuong@hnue.edu.vn

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Cơ sở lí luận, tiền đề và điều kiện để vận dụng RME ở Việt Nam

2.1.1. Những luận điểm chính và những nguyên tắc của RME

* Nguồn gốc của thuật ngữ RME

Theo Treffers [10, tr. 243], “Toán học hóa theo chiều ngang” gắn với việc chuyển từ bài toán thực tiễn sang bài toán của Toán học, còn “Toán học hóa theo chiều dọc” liên quan tới việc “vận hành trong hệ thống Toán học” và hai loại toán học hóa này có mối quan hệ chặt chẽ với nhau. De Lange đã liệt kê các hoạt động chứa những thành tố của chúng [11, tr. 43].

Bảng 1. Phân loại 4 xu hướng trong giáo dục toán học

Xu hướng	Toán học hóa “theo chiều ngang”	Toán học hóa “theo chiều dọc”
“máy móc”	-	-
“cấu trúc”	-	+
“kinh nghiệm”	+	-
“realistic”	+	+

Thuật ngữ “Realistic” trong RME bắt nguồn từ việc Treffers sử dụng tiêu chí “Toán học hóa theo chiều ngang” và “Toán học hóa theo chiều dọc” để phân loại 4 xu hướng khác nhau trong GDTH, bao gồm xu hướng máy móc (“mechanistic”), xu hướng cấu trúc (“structuralist”), xu hướng kinh nghiệm (“empiricist”) và xu hướng “realistic”, minh họa ở Bảng 1 [10, tr. 251].

Thuật ngữ “realistic” của RME dễ gây hiểu nhầm là xu hướng này tập trung vào thực tiễn và tính xác thực (authentic) của vấn đề. Thực ra, theo Van den Heuvel-Panhuizen, “realistic” xuất phát từ một động từ trong Tiếng Hà Lan “zich realiseren” có nghĩa là “tương tượng” [12]. Bà giải thích rõ hơn: “thuật ngữ realistic đề cập tới việc học sinh được đặt vào tình huống vấn đề mà họ có thể tương tượng hơn là việc đề cập tới tính thực tế hoặc thực tiễn của vấn đề và ngay cả những câu chuyện cổ hoặc những bài toán thuần túy cũng có thể là ngữ cảnh phù hợp miễn là chúng có thực trong suy nghĩ, trải nghiệm của học sinh” [12].

* Những luận điểm chính của RME

Những luận điểm chính của RME được đề xuất chủ yếu bởi Freudenthal, có liên quan chặt chẽ với nhau và để trả lời câu hỏi do ông đặt ra “Tại sao cần DH môn Toán theo cách thực sự có ích?” [13, tr. 10].

(i) Toán học như một hoạt động của con người

Freudenthal phân biệt hai quan niệm về toán học: “Toán học như một hoạt động của con người” và “Toán học như một sản phẩm được làm sẵn” [14]. Freudenthal phản đối việc cách dạy môn Toán bắt đầu với những sản phẩm toán học được làm sẵn, ông gọi cách này là “sự đảo ngược phi sư phạm” [15, tr. ix]. Trái lại, ông ủng hộ quan điểm “Toán học như một hoạt động của con người” trong DH môn Toán, trong đó toán học hóa là đặc điểm chính của hoạt động Toán học.

(ii) Phát minh lại có hướng dẫn

Freudenthal nhấn mạnh vai trò của việc giúp học sinh (HS) *phát minh lại có hướng dẫn* (khám phá lại hoặc phát hiện lại có hướng dẫn) của môi trường DH [14, tr. 46]. Tất nhiên, HS không được mong đợi sẽ nhắc lại toàn bộ quá trình nhận thức của nhân loại, nhưng họ cần được tạo ra cơ hội để phát minh lại Toán học dưới sự trợ giúp của giáo viên (GV) và tài liệu học tập. Ông dùng 5 nguyên lí do Treffers đề xuất để hướng dẫn HS phát minh lại.

(iii) Hiện tượng học trong DH của những cấu trúc toán học

Theo Freudenthal [15, tr. ix], “hiện tượng học của một khái niệm (một cấu trúc hoặc một ý tưởng) toán học là mô tả nó trong mối quan hệ với các hiện tượng mà nó đã được sáng tạo ra hoặc mở rộng trong quá trình nhận thức của nhân loại; khi các mô tả này liên quan tới quá trình

học tập của thể hệ trẻ, nó sẽ trở thành hiện tượng học trong DH - là một con đường chỉ ra cho GV đặt HS vào đâu để họ có thể bước vào quá trình nhận thức của nhân loại”. Ý tưởng về “hiện tượng học” của một khái niệm (một cấu trúc hoặc một ý tưởng) toán học không thật sự mới vì nó thường được áp dụng để tìm ra các ứng dụng của toán học trong một số xu hướng DH khác, tuy nhiên Treffers rất đề cao ý tưởng về “hiện tượng học trong DH” [10, tr. 246]. Freudenthal đã trình bày “hiện tượng học trong DH” của cấu trúc toán học cho nhiều mạch kiến thức toán học khác nhau [15].

*** Những nguyên tắc của RME**

(i) Sử dụng ngữ cảnh/ bối cảnh

Những vấn đề gắn với ngữ cảnh là “những vấn đề mà tình huống của vấn đề có thực theo kinh nghiệm của HS” [16, tr. 111]. Ở đây, những vấn đề gắn với ngữ cảnh không chỉ gắn với nội dung thực tiễn (theo nghĩa hẹp), mà còn xuất hiện trong nội bộ môn Toán [16, tr. 111; 1, tr. 4]. Các nhà nghiên cứu hàng đầu về RME đều khẳng định vai trò có tính quyết định của việc những vấn đề gắn với ngữ cảnh được sử dụng ngay từ đầu trong quá trình DH [12, tr. 9; 16, tr. 111].

Freudenthal đã phân biệt rõ việc sử dụng những vấn đề gắn với ngữ cảnh và ứng dụng Toán học [17]. De Lange đưa ra 3 cấp độ sử dụng ngữ cảnh: để giới thiệu và phát triển mô hình và khái niệm Toán học (cấp độ thứ 3, quan trọng nhất), tìm kiếm tri thức toán học có liên quan để giải quyết vấn đề từ thế giới thực (cấp độ thứ 2, quan trọng) và HS chỉ cần thực hiện một phép biến đổi đơn giản để chuyển từ vấn đề có nội dung thực tiễn sang vấn đề của toán học là đủ (cấp độ thứ 1, thường gặp trong các sách giáo khoa môn Toán truyền thống) [11, tr. 76-77]. Trên cơ sở các nghiên cứu của De Lange, Meyer, Dekker và Querelle đã trình bày 5 vai trò của ngữ cảnh trong DH môn Toán [18, tr. 523].

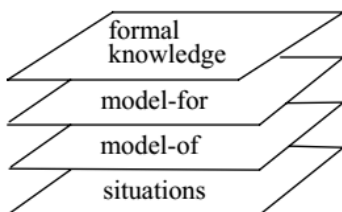
(ii) Sử dụng mô hình

Cần lưu ý, mô hình được xác định bởi Freudenthal khác với mô hình toán học và mô hình hóa toán học. Các ý tưởng về mô hình trong RME tiếp tục được phát triển bởi các nhà nghiên cứu Streefland, Gravemeijer, Van den Heuvel-Panhuizen...

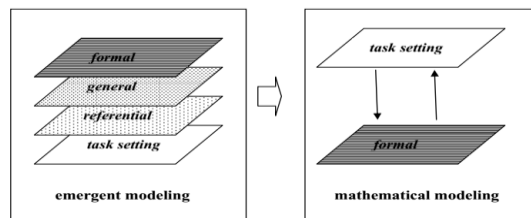
Theo Van den Heuvel-Panhuizen [12, tr. 14], từ tình huống vấn đề, một mô hình dựa trên tình huống được thiết lập và phát triển gắn chặt với tình huống được gọi là “*mô hình của*” tình huống cụ thể, sau đó, mô hình này được phát triển và khái quát hóa không còn phụ thuộc vào tình huống xuất phát nữa được gọi là “*mô hình cho*” không những tình huống xuất phát mà còn cho cả các tình huống khác.

- “Mô hình tự phát triển” (xem Hình 1a)

Ban đầu Gravemeijer đã đề xuất “mô hình tự phát triển” bằng cách phân biệt 4 cấp độ của mô hình bao gồm: cấp độ tình huống, cấp độ “mô hình của”, cấp độ “mô hình cho” và cấp độ toán học hình thức [19, tr. 101].



(1a)- Mô hình “tự phát triển”



(1b)- Mô hình “tự phát sinh” là tiền thân của mô hình Toán học

Hình 1. Mô hình “tự phát triển” và “tự phát sinh”

Về sau, ông dùng thuật ngữ “emergent models” (tạm dịch “mô hình tự phát sinh”, Hình 1b) và giải thích 4 cấp độ của “mô hình tự phát sinh” như sau [19, tr. 101]: cấp độ tình huống (kiến thức cụ thể gắn với tình huống và phương hướng giải quyết được sử dụng trong phạm vi bối cảnh của tình huống), cấp độ tham chiếu (trong đó các mô hình và các phương hướng giải quyết liên quan tới tình huống của vấn đề), cấp độ khái quát (ở đó trọng tâm được đặt vào các phương hướng giải quyết có tính khái quát không phụ thuộc vào tình huống) và cấp độ Toán học hình thức (trong đó người ta làm việc với những thủ tục và ký hiệu thông thường của Toán học).

- Mô hình trực quan, mô hình Toán học và “mô hình tự phát sinh”

Theo Gravemeijer [19, tr. 100-101], *mô hình trực quan* được dùng để cụ thể hóa toán học trừu tượng, hình thức. Mô hình này có điểm hạn chế là toán học gắn với nó tuy đã có tính cụ thể (đối với kiến thức), nhưng lại chưa chắc đủ cụ thể đối với HS, do đó cũng không thực sự đảm bảo giúp HS nắm được bản chất bên trong của toán học. Còn với *mô hình toán học*, mô hình toán học và tình huống được mô hình hoá lại thường được xem như 2 thực thể tách biệt một cách rõ rệt. Từ đó, ông đề xuất “*mô hình tự phát sinh*” có thể xem là tiền thân của mô hình toán học (Hình 1b).

(iii) *Sản phẩm và sự xây dựng của HS*

Theo RME, HS được khuyến khích phát minh lại toán học với sự hướng dẫn của GV và môi trường học tập. Trong quá trình học tập, HS được khuyến khích sáng tạo ra sản phẩm và sự xây dựng của bản thân để học có thể sử dụng để tiếp cận với những nhiệm vụ tiếp theo. Theo Treffers [10, p. 260], sản phẩm và sự xây dựng có liên quan chặt chẽ với nhau, nếu nhấn mạnh hành động thì đó là sự xây dựng, còn nếu nhấn mạnh sự phản ánh thì đó là sản phẩm. Treffers và Streefland đã phân tích chức năng của sản phẩm và sự xây dựng của HS trong quá trình DH và đưa ra nhiều ví dụ minh họa [10, tr 260-261; 21, tr. 33-35].

(iv) *Nguyên tắc tương tác*

HS cần được tạo cơ hội để tham gia, thảo luận, hợp tác... Tuy nhiên, điều đó không có nghĩa là việc học tập cá nhân không được coi trọng trong RME.

(v) *Nguyên tắc xoắn bện giữa các mạch kiến thức*

Freudenthal khẳng định không nên dạy các phần cô lập, việc liên kết các phần sẽ giúp việc học nhanh hơn và kiến thức được lưu lại lâu hơn [17, tr. 74-75]. Những GV ưa thích tính cấu trúc trong DH thường cho rằng việc xoắn bện giữa các mạch kiến thức không đảm bảo tính cấu trúc và dẫn tới sự “hỗn độn”. Tuy nhiên đối với RME, sự xoắn bện có vẻ như “hỗn độn” này lại được tổ chức tốt về mặt sư phạm và hỗ trợ đắc lực cho HS khi phát minh lại tri thức với sự hướng dẫn [14, p. 119].

2.1.2. RME tại Việt Nam

*** *Mối tương đồng giữa các triết lí, quan điểm chỉ đạo từ trước tới nay và chương trình giáo dục phổ thông (CTGDPT) môn Toán 2018 với lí thuyết RME***

Nguyên lí học đi đôi với hành, giáo dục kết hợp với lao động sản xuất, lí luận gắn liền với thực tiễn, giáo dục nhà trường kết hợp với giáo dục gia đình và giáo dục xã hội đã được nêu cao như kim chỉ nam cho nền giáo dục nói chung, GDTH nói riêng ở nước ta có nhiều điểm phù hợp với RME.

(i) *Khi triển khai CTGDPT tổng thể*, có rất nhiều điểm thuận lợi cho việc áp dụng RME trong môn Toán:

- Theo CTGDPT năm 2018, các bộ sách giáo khoa (SGK) khác nhau là tài liệu tham khảo. Thay đổi này sẽ tạo điều kiện thuận lợi cho GV áp dụng RME trong DH môn Toán, không quá phụ thuộc vào SGK.

- Tính “mở” đã được nhấn mạnh trong xây dựng chương trình giáo dục phổ thông. Sự thay đổi này sẽ giúp cho việc áp dụng RME vào DH môn Toán thuận lợi hơn.

- Nguyên tắc “xoắn bện giữa các mạch kiến thức” của RME phù hợp quan điểm “tích hợp cao ở các lớp học dưới, phân hoá dần ở các lớp học trên” [22, tr. 5]. Nguyên tắc “tương tác” của RME cũng phù hợp với việc phát triển năng lực giao tiếp và hợp tác. RME cũng phù hợp với “phương pháp tích cực hóa hoạt động của HS”, “hoạt động khám phá vấn đề” và “trải nghiệm thực tế” [22, tr. 32].

(ii) CTGDPT môn Toán năm 2018 có nhiều điểm phù hợp với tinh thần của RME:

- Trong 4 quan điểm xây dựng chương trình, điều đầu tiên được nhấn mạnh là “tinh giản, thiết thực, hiện đại”: đáp ứng nhu cầu hiểu biết thế giới cũng như hứng thú, sở thích của HS; chú trọng tính ứng dụng, gắn kết với thực tiễn hằng ngày các môn học, hoạt động giáo dục khác, với xu hướng phát triển hiện đại của kinh tế, khoa học, đời sống xã hội,... [23].

- Trong xây dựng nội dung, tất cả các mạch đều hướng tới thực tiễn theo RME, đặc biệt chương trình dành thời lượng thích đáng cho các hoạt động thực hành trải nghiệm (xấp xỉ 35%) [23, 24].

- Trong chỉ đạo về phương pháp DH [23], cần chú ý cách tiếp cận dựa trên vốn kinh nghiệm và trải nghiệm của HS, tổ chức DH theo hướng kiến tạo, trong đó HS được tham gia tìm tòi, phát hiện, kết hợp các hoạt động DH trong lớp với các hoạt động thực hành, trải nghiệm, vận dụng kiến thức toán vào thực.

*** Những khó khăn, thách thức khi vận dụng RME vào DH môn Toán ở Việt Nam**

(i) Thói quen/ kinh nghiệm của HS, GV và nhà quản lý giáo dục

Một số thói quen và kinh nghiệm của HS, GV và nhà quản lý giáo dục có thể chưa thuận lợi cho việc áp dụng RME trong DH môn Toán ở Việt Nam, chẳng hạn việc chưa sẵn sàng chấp nhận *toán học tiên chính thức* hoặc *chưa chính thức* ở cấp Trung học cơ sở và Trung học phổ thông, GV và HS thường có khuynh hướng chuyển nhanh sang làm việc với toán học hình thức.

(ii) Sự hiểu biết của GV và nhà quản lý về RME

RME chưa được giới thiệu rộng rãi ở Việt Nam: RME chủ yếu được biết đến trong cộng đồng các nhà nghiên cứu về GDTH, chưa được nhiều GV và nhà quản lý biết đến.

(iii) Một số cách hiểu chưa thống nhất về một số điểm của RME

- Đồng nhất RME với việc liên hệ, vận dụng Toán học vào thực tiễn hoặc ứng dụng Toán học. Một số nhà nghiên cứu tiêu biểu về RME đã phân biệt RME với việc liên hệ hoặc vận dụng Toán học vào thực tiễn, cũng như ứng dụng Toán học. Đã có nhiều công trình nghiên cứu ở một số nước, thậm chí ở cả Hà Lan đã xem việc liên hệ, vận dụng Toán học hoặc ứng dụng Toán học là tư tưởng chính của RME.

- Đồng nhất mô hình trong lý thuyết RME với mô hình hóa toán học. Như đã trình bày trong nguyên tắc sử dụng mô hình, mô hình được sử dụng trong RME khác về bản chất với mô hình Toán học hoặc mô hình hóa toán học.

2.2. Đề xuất một số biện pháp vận dụng RME trong dạy học môn Toán ở Việt Nam

2.2.1. Bắt đầu bài dạy bằng nhiệm vụ gắn với ngữ cảnh để giúp HS khám phá lại tri thức

“Bài dạy”, có thể hiểu là một đơn vị kiến thức ở quy mô bất kỳ: chương, bài, mục hoặc một tình huống điển hình (khái niệm, định lý hoặc quy tắc - phương pháp, ở đây không đề cập tới tình huống DH giải bài tập toán học).

Để thực hiện biện pháp này, GV có thể tìm kiếm và thiết kế các nhiệm vụ gắn với ngữ cảnh phù hợp với bài dạy nhờ luận điểm “Hiện tượng học trong DH” và tất cả các tình huống xuất hiện tri thức môn Toán cần dạy. Nhiệm vụ này không nhất thiết phải là những bài toán thực tiễn (theo nghĩa hẹp), tuy nhiên cần được HS cần chấp nhận và thấy cần thiết phải giải quyết. Các nhiệm vụ này được thiết kế và cài đặt để tạo cơ hội cho HS khám phá lại tri thức Toán học (từ chưa chính thức tới chính thức) xuất phát từ vốn sống, kinh nghiệm, tri thức trong cuộc sống và

tri thức môn Toán của bản thân. Các câu trả lời hoặc giải pháp của HS ban đầu có thể giải quyết vấn đề cụ thể trong tình huống (“mô hình của”), sau đó có thể được khái quát hóa, phát triển, điều chỉnh để giải quyết các vấn đề khác (“mô hình cho”). GV có thể linh hoạt tổ chức cho HS làm việc cá nhân và hợp tác.

Cách này khác về bản chất với cách GV hiện nay thường làm là đặt vấn đề ở đầu bài giảng bằng những nội dung có liên hệ với thực tiễn, dạy kiến thức toán học, rồi hướng dẫn HS vận dụng kiến thức vừa học để giải quyết vấn đề đặt ra ban đầu.

Biện pháp này đã thể hiện các luận điểm “Toán học như hoạt động của con người”, “Khám phá lại có hướng dẫn” và “Hiện tượng học trong DH” của Freudenthal và tuân thủ nguyên tắc sử dụng ngữ cảnh, sử dụng mô hình, sản phẩm của HS, nguyên tắc tương tác... của RME.

Ví dụ 1. Dạy Chương Đường thẳng và mặt phẳng trong không gian. Quan hệ song song, có thể bắt đầu bằng tình huống:

Đề quay video DH trực tuyến trong mùa dịch nCovid-19, thầy giáo Phụng đã phải thử phương án bố trí camera điện thoại đến lần thứ hai mới ưng ý: Khuôn hình lần một bị “méo”, khuôn hình lần hai ngay ngắn và đẹp. Đồng nghiệp hỏi kĩ thì thầy Phụng cho biết, phương án lần hai thầy ưng ý hơn nên đã sử dụng, với thiết bị được bố trí từ những vật dụng có sẵn rất đơn giản, dễ làm.

Em hãy thử giải thích những hiện tượng trong tình huống nói trên: Thiết bị có thể đã được bố trí ra sao mà lại tạo ra khung hình “méo”? Tại sao thầy Phụng không ưng với phương án này? Bố trí thiết bị như thế nào và tại sao làm như vậy có thể giúp thầy Phụng có được khung hình ưng ý?

Đây là tình huống không chỉ thân thuộc với kiến thức, kinh nghiệm của HS (realistic) mà còn có thật (authentic) trong công việc của tác giả (có thể xem các ảnh thực tế khung hình “méo” tại <https://bit.ly/3hz3CFE>, khung hình “ngay ngắn, đẹp” tại <https://bit.ly/2CPNuAD> và phương án bố trí điện thoại làm camera tại <https://bit.ly/2ByqLZb>). Các đồng nghiệp quan tâm có thể dễ dàng tạo những hình ảnh tương tự để sử dụng trên lớp học. Tình huống có tiềm năng sư phạm phong phú có thể giúp: gợi động cơ hoạt động - tích cực hóa hoạt động của HS, phát triển năng lực mô hình hoá toán học, năng lực.

2.2.2. Giải quyết hợp lí mối quan hệ giữa “toán học vị toán học” và “toán học vị nhân sinh”

Cuộc tranh luận giữa *toán học vị toán học* và *toán học vị nhân sinh* xuất hiện vào những năm 80 khi trào lưu *Toán học mới* lan rộng trên khắp thế giới. Theo quan điểm *vị toán học*, người ta dạy trong trường phổ thông từ rất sớm một nội dung *toán có sẵn, toán hình thức, theo tinh thần Bourbaki*.

Là một nhóm các nhà toán học hàng đầu ở Pháp (trong đó có Henri Cartan, André Weil, Jean Dieudonné, Lorent Schwartz, Jean-Pierre Serre, Alexander Grothendieck, Serge Lang, Jean-Christophe Yoccoz), Bourbaki chủ trương viết lại cho hoàn chỉnh toàn bộ cơ sở toán học hiện đại nhằm phục vụ cho đào tạo chuyên ngành toán ở bậc đại học. Đóng góp lớn lao, có tính cách mạng của nhóm Bourbaki đối với nghiên cứu toán học và GDTH ở bậc đại học là không thể phủ nhận. Tuy nhiên, dường như theo một cách *không chủ định*, vì nhiều lí do xã hội, lịch sử, tinh thần của Bourbaki lại trở thành nguồn khởi phát quan trọng của trào lưu *Toán học mới* trong GDTH bậc phổ thông.

Những *tín đồ* của *Toán học mới* có xu hướng phủ định con đường đi từ trực quan đến trừu tượng trong nhận thức của HS (dù từ những lớp rất nhỏ), ngược lại nhấn mạnh giá trị của hệ thống ký hiệu hoàn toàn hình thức cùng những phép suy diễn logic chặt chẽ, hoàn hảo. Các khái niệm đều phải được định nghĩa, các định lí đều phải được chứng minh - bắt đầu từ ngôn ngữ tập hợp, mệnh đề và các cấu trúc đại số. Dường như đối với họ, dạy toán ở phổ thông hoàn toàn không có chỗ cho mô tả, trực quan, thực nghiệm [25].

Ngược lại, các nhà viết sử của RME đã nhận định, lí thuyết này đã giúp cho GDTH Hà Lan tránh được ảnh hưởng cực đoan của Toán học mới [26]. Lí thuyết RME tất nhiên không phủ định hoàn toàn giá trị “toán học vị toán học” của New Math nhưng mềm dẻo hơn nhiều, có thể nói là đề cao hơn “toán học vị nhân sinh”, có thể hiểu là dạng toán học xuất phát từ cuộc sống thường nhật của con người, giải quyết nhu cầu của cuộc sống và do đó hữu ích một cách trực tiếp.

- Khi cố gắng đo chiều cao một cái cây để quyết định xem có thể dùng nó làm cột nhà hay không, người thợ mộc đang tiến hành một hoạt động sống, thông thường anh ta ngay lập tức sẽ bị cuốn vào hoạt động tiếp theo là chặt hạ cái cây đó (nếu ưng ý) hoặc đi tìm cái cây khác (nếu không ưng). Mọi kiến thức, kinh nghiệm mà người thợ huy động (mặc dù chưa phải tri thức tinh tuý của nhân loại) đều là dạng toán trong hoạt động sống, tuy không được phép tuyệt đối hoá nhưng cũng cũng có giá trị về giáo dục và đáng tôn trọng trong lí thuyết RME.

- Giả sử chúng ta có một người thợ mộc thông minh. Trong khi tất cả các phương pháp ước lượng, đo trực tiếp đều thất bại, thì ngược lại óc quan sát tinh tường lại giúp người thợ để ý thấy có thời điểm, cái bóng và chiều cao của mình đang xấp xỉ nhau. Anh ta đo ngay bóng của cái cây, phỏng đoán chiều cao của nó thấy phù hợp, quyết định chặt hạ nó và thành công (kiểm tra lại thấy ưng ý). Người thợ có một kinh nghiệm mới nhờ phát minh lại tính chất của tam giác đồng dạng một cách ẩn tàng, mà hoàn toàn không dùng đến các khái niệm toán học như song song, tam giác, vuông góc, đồng dạng, cũng không hề có một phép chứng minh để đảm bảo thu được một định lí toán học

- Câu chuyện giả định về người thợ mộc ở đây phù hợp với quan niệm về hiện tượng học trong DH của lí thuyết RME.

Một GV toán quyết định sử dụng ngữ cảnh câu chuyện về người thợ mộc để dạy tam giác đồng dạng, nếu dùng lại sau khi đã giải quyết được vấn đề đo cây, dĩ nhiên chưa dạy được tri thức toán học thực sự (vị toán học). Bù lại, có thể tin người thầy đã xuất phát từ học trò với kinh nghiệm, hiểu biết của họ để tới rất gần được đáp án của câu hỏi cốt lõi do Freudenthal đặt ra: Tại sao cần DH môn Toán theo cách thực sự có ích? [13, p. 10], dạy được một dạng toán học “vị nhân sinh”. Chúng tôi tin rằng, muốn đảm bảo thực hiện mục tiêu phát triển năng lực người học của GDTH phổ thông, cần phải giải quyết hợp lí mối quan hệ giữa “toán học vị toán học” và “toán học vị nhân sinh”.

**** Chấp nhận mô tả thay cho định nghĩa chặt chẽ trong một số trường hợp***

Ví dụ 2. Khái niệm *Tọa độ của điểm* (Hình học 12) được định nghĩa kiến thiết dựa trên định lí biểu diễn vectơ. Hiểu được phát biểu và ý nghĩa của định lí này là một chương ngại thật sự, ngay cả đối với sinh viên ngành toán.

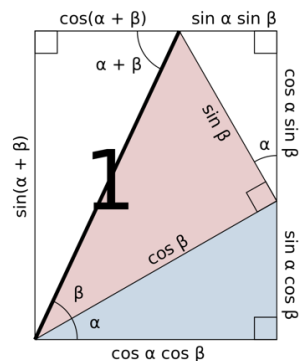
Dùng phương tiện trực quan truyền thống hoặc video được tạo bởi phần mềm mô phỏng, (có sẵn và rất phong phú trên Internet, chẳng hạn: Extramarks, <https://www.youtube.com/watch?v=LCYisXSpio>; Designmate, https://www.youtube.com/watch?v=3dNL_aOVuQ4) có thể giúp HS dễ dàng tiếp cận được khái niệm “tọa độ của điểm trong không gian” theo một cách hoàn toàn tự nhiên. Theo chúng tôi, cách sử dụng phương tiện trực quan để mô tả là hoàn toàn có thể chấp nhận được, không nhất thiết dạy kỹ định lý biểu diễn vectơ (mà thực chất là một tính chất của không gian vectơ hữu hạn chiều ở đại học).

**** Vận dụng hợp lí các phép “chứng minh không lời”***

Chứng minh không lời (PWW: Proof Without Words) là khái niệm được đưa ra bởi tác giả Brown JR ([27], 1999) dùng để chỉ những cách biểu diễn toán học bằng tập hợp dữ liệu (thiên về kênh hình: ảnh, hình vẽ minh hoạ, sơ đồ, video,...) với ít (thậm chí không có) kí hiệu, biểu thức toán học, diễn giải bằng lời, do đó người xem có thể hiểu được thông điệp ẩn chứa mà không cần quá nhiều kiến thức chuẩn bị về toán. Tự cách sắp xếp, liên kết các dữ liệu trong biểu diễn, nếu phiên dịch ra ngôn ngữ toán học sẽ thu được một phản tương đối hoàn chỉnh của một phép chứng minh.

Chứng minh không lời cùng với chứng minh tạo nhả là hai dạng thức mang nhiều vẻ đẹp toán học, mặc dù không chặt chẽ đầy đủ như chứng minh tiêu chuẩn cũng được nhưng đều có giá trị lớn trong DH hình học (Sigler, Segal, Stupel, [28]).

Một phép chứng minh không lời thích hợp không những mang vẻ đẹp của toán học mà chính là một bối cảnh mà định lí toán học thể hiện nghĩa (hình học trực quan) của nó; chính là một mô hình trực quan, một mô hình của định lí; nếu GV khéo léo tổ chức hoạt động phù hợp, định lí toán học cuối cùng có thể là một sản phẩm tự nhiên, tất yếu thu được nhờ hoạt động, hơn nữa còn có thể là những hoạt động rất giàu



Hình 2. Chứng minh không lời cho công thức cộng

(nguồn <http://trigonography.com/2015/09/28/angle-sum-and-difference-for-sine-and-cosine/>)

tính tương tác của HS, trên những nguyên liệu không chỉ trong môn Toán hay một phân môn riêng biệt, gắn gũi với trải nghiệm của họ; Việc vận dụng hợp lí phép chứng minh không lời, thậm chí trong một số trường hợp có thể chấp nhận thay cho chứng minh tiêu chuẩn (gọn gàng, chặt chẽ nhưng trừu tượng, khó hiểu hơn với đa số HS), theo chúng tôi có thể thể hiện được cả 5 nguyên tắc DH của lí thuyết RME.

Ví dụ 3. (Hình 2) Phép chứng minh không lời cho Công thức cộng (Đại số 10)

Có thể dùng những ô trống có đánh số che bớt các nhãn trên hình vẽ (chỉ để lại số 1) rồi yêu cầu HS dần hoàn thiện các ô đó theo thứ tự. Muốn sinh động hấp dẫn hơn có thể dưới dạng cuộc thi giữa các nhóm, hướng tới việc HS có thể tự nhận ra (tự phát biểu được) công thức cộng sau khi biểu diễn các cạnh đối diện bằng nhau của hình chữ nhật theo hai cách.

*** Trong một số trường hợp, chấp nhận “lời giải” bằng thực nghiệm hoặc trên máy tính điện tử**

Trong hàm ý của tính từ “*realistic*” của lí thuyết RME gắn với có thực trong suy nghĩ, trải nghiệm của người học, chúng tôi cũng chú ý tới trải nghiệm với những thiết bị số tràn ngập trong đời sống hiện nay: người học hàng giờ liên tục tiếp xúc với máy tính điện tử (laptop, PC), máy tính bảng, điện thoại thông minh. Với sự phát triển như vũ bão của các hệ tính toán hình thức (CAS: Computer Algebra System), máy tính điện tử có khả năng giải những lớp bài toán đã có thuật giải một cách nhanh chóng, hiệu quả. Những hệ thống này ngày càng trở nên dễ tiếp cận: với bất kỳ trình duyệt nào trên máy tính xách tay hoặc máy tính để bàn, đặc biệt là trên điện thoại thông minh. Hơn nữa, nếu trước đây các phần mềm chỉ có thể tính toán, cho kết quả thì ngày nay nhiều lớp bài toán (đặc biệt là ở phổ thông) đã có thể được CAS giải quyết trọn vẹn: không chỉ cho kết quả tính toán mà còn chi tiết từng bước giải; không chỉ cho đáp số gần đúng mà còn có thể cho kết quả hình thức. Chú ý dạy toán học *vị nhân sinh*, không thể bỏ qua tính thực dụng của những công cụ có thể giúp giải quyết nhanh chóng, hiệu quả hàng loạt vấn đề, tiết kiệm thời gian, công sức.

Chúng tôi cho rằng, không thể, và cũng không nên cấm HS sử dụng CAS. Vì vậy nếu vẫn tập trung quá nhiều vào dạy tính, GV dễ dàng trở nên lạc hậu. Điều nên làm hơn, cũng khó khăn vất vả hơn nhiều là hướng về dạy toán: giúp HS hiểu được ý nghĩa của bài toán, hiểu được khả năng, hạn chế và làm chủ được công cụ.

Tận dụng hợp lí CAS không mâu thuẫn với lí thuyết RME, trái lại còn là một biện pháp có triển vọng tăng cường hứng thú học tập cho HS, tạo động lực cho GV tự hoàn thiện mình khi phải cạnh tranh lành mạnh với thiết bị số và giúp tạo thêm không gian, thời gian tổ chức hoạt động học tập.

Ví dụ 4. *Tìm nguyên hàm (SGK Giải tích 12 nâng cao, tr. 145).*

Với phần mềm Photomath được cài đặt trên điện thoại thông minh, việc duy nhất phải làm là quét bài tập bằng camera điện thoại được mở bởi Photomath (video: <https://bit.ly/3g6wsNc>).

Theo quan điểm của chúng tôi, nên chấp nhận những lời giải bằng thực nghiệm kiểu này, có thể kết hợp với một số yêu cầu khác như: Nhận dạng được những tính chất đã được sử dụng trong từng bước giải (mặc dù một số đã có giải thích chi tiết trên phần mềm); Viết lại được lời giải hoàn chỉnh, ngắn gọn; Giải thích hợp lý được tại sao phần mềm lại cho lời giải như vậy; Nhận xét, bình luận, nghiên cứu sâu được lời giải.

2.2.3. Tăng cường nhiệm vụ, bài tập thực tiễn

Để tránh gây tranh cãi trong quan niệm về tính thực tiễn và bài tập thực tiễn, trong khi khảo sát bộ SGK THPT hiện hành (bộ cơ bản), chúng tôi chỉ thống kê một cách cơ học những bài tập có chất liệu ngoài môn Toán, nghĩa là trong đề bài có sử dụng dù chỉ một từ vựng không thuộc nội dung môn Toán. Kết quả cho thấy chương trình toán 2006 chỉ dành 9,6% hoạt động củng cố - luyện tập, thông qua giải bài tập toán học, cho những bài toán dạng này (Đại số 10: $39/188 = 20,7\%$; Hình học 10: $5/118 = 4,2\%$; Đại số và Giải tích 11: $37/182 = 20,3\%$; Hình học 11: $1/116 = 0,9\%$; Giải tích 12: $0/143 = 0,0\%$; Hình học 12: $0/107 = 0,0\%$!). Nói cách khác, trong 3 bình diện kỹ năng vận dụng tri thức toán học (trong nội bộ môn Toán, vận dụng thức trong môn học khác và vận dụng môn Toán trong thực tiễn), tới 90,4% dung lượng cơ học chỉ dành cho bình diện đầu tiên.

Có thể nói, bài tập và nhiệm vụ giao cho HS trong môn Toán hiện nay còn quá nặng về kỹ thuật tính toán, xa rời bản chất trong sáng của toán học và dễ gây cảm xúc tiêu cực, nhàm chán cho HS. Chúng tôi tin rằng cần tinh giản kiểu yêu cầu - nhiệm vụ nặng nề, hàn lâm như vậy, ngược lại phải đa dạng hóa các nhiệm vụ học tập của HS với sự tăng cường các yếu tố thực tiễn (realistic). Bài tập thực tiễn, Bài tập giải thích hiện tượng và Nhiệm vụ có thực hành - vận dụng là những gợi ý giàu tiềm năng, được minh họa dưới đây.

*** Tăng cường bài tập, nhiệm vụ với chất liệu ngoài môn Toán**

Các bài tập thực tiễn tuân thủ nguyên tắc của RME có thể gắn với tình huống cơ sở, nơi mà tri thức thể hiện nghĩa của nó, chắc chắn tồn tại theo một trong những giả thuyết xuất phát của lý thuyết tình huống.

Ví dụ 5. Bài tập thực tiễn về Hình không gian (lớp 11) hoặc Tọa độ trong không gian (lớp 12): *Trong một phòng học, chỉ với đồ dùng học tập thông thường (không dùng thước laser chuyên dụng!!!), hãy ước tính khoảng cách từ điểm chính giữa một (những) mặt bàn học tới điểm trung tâm mặt bảng theo đơn vị mét.*

Có thể hướng HS tới một trong hai giải pháp: theo phương pháp “hình học tổng hợp”, có thể sử dụng nhiều lần định lý Pythagore; cũng có thể gán một hệ tọa độ Descartes để áp dụng công thức khoảng cách.

Tình huống có thể triển khai trong phòng học thực tế hoặc trên bình đồ (GV tự chuẩn bị, hoặc khai thác trên Internet, chẳng hạn tại nguồn Alexandra Santiago <https://sites.google.com/site/classroomfordynamicliteracy/part-i>), cách nào cũng có những ưu thế, tiềm năng nhất định.

*** Bổ sung thích hợp dạng nhiệm vụ “giải thích hiện tượng thực tiễn bằng kiến thức toán học”**

Nhiều hiện tượng thực tiễn thường gặp tưởng chừng rất đơn giản, hiển nhiên nhưng dễ hiểu tới ngôn ngành, giải thích thực sự thấu đáo lại cần tới kiến thức toán học sâu sắc. Tình huống thoát nhìn thấy đơn giản mà nội dung (toán) cực kỳ sâu sắc thường rất thuận lợi để gợi động cơ học tập tích cực, giúp HS thấy được vẻ đẹp, ý nghĩa, giá trị của tri thức toán học.

Ví dụ 6. Hình ảnh đường ellipse trên cốc nước.

SGK Hình học 10 (bản cơ bản, NXB Giáo dục, 2010) mở đầu bài dạy bằng hình ảnh vệt nước in trên thành cái cốc và bóng của biển báo giao thông in trên mặt đường để giới thiệu về sự có mặt của hình ellipse trong thực tế (Hình 3.18 tr. 84, dưới đây gọi tắt là 3.18). Vấn đề là, ngay ở trang sau, đường ellipse được định nghĩa hoàn toàn trong mặt phẳng, không có yếu tố không gian như là tập hợp các điểm có tổng khoảng cách không đổi tới hai điểm cho trước.

Tại sao vệt nước trên thành cốc ở hình 3.18a có dạng ellipse? Hình ellipse trên thành cốc (3.18a) được tạo thành có cùng một cách với ellipse in bóng trên mặt đường (3.18b) hay không?

*** Tăng cường bài tập thực hành - vận dụng trong thực tiễn**

Không thể phủ nhận vai trò, giá trị của bài tập thực hành, vận dụng trong tất cả các môn học và môn Toán nói riêng. Sở dĩ chúng tôi vẫn *giữ lại, thậm chí nhấn mạnh loại nhiệm vụ liên quan tới thực hành vận dụng* trong khuyến cáo của mình vì mặc dù cộng đồng GDTH đã nhận thức được tầm quan trọng nhưng việc triển khai thực tế dạng nhiệm vụ này trong lớp học còn rất nhiều hạn chế, khó khăn, ngay từ bước đầu tiên: làm sao có được (lấy đâu ra) những bài tập thực hành - vận dụng có giá trị?

Ví dụ 7. Ứng dụng của tích phân (Giải tích 12) và / hoặc Mặt tròn xoay (Hình học 11)

GV phát cho mỗi nhóm (cặp) HS một chiếc cốc giấy dùng một lần (loại trắng không hoa văn, thường có hình dạng một hình nón cụt), yêu cầu các nhóm (i) kiểm tra dung tích chiếc cốc so với công bố của nhà sản xuất (ii) vạch một vạch đánh dấu một nửa dung tích chiếc cốc và (iii) báo cáo kết quả.

Dụng cụ cho phép sử dụng có thể hạn chế tùy theo dụng ý của GV nhưng nên yêu cầu HS làm nhiều phương án, lập bảng biểu để đối chiếu: dùng bình chia độ với nước (cát) hoặc chỉ dùng thước centimet và những đồ dùng học tập thông thường. Rất nhiều hoạt động có thể chuyển giao, nhiều hiện tượng có thể làm căn cứ để yêu cầu giải thích, tranh luận: tại sao và làm thế nào có thể chấp nhận hình chóp cụt như mô hình của chiếc cốc (chỉ vì thoát nhìn có vẻ giống?!); Làm thế nào đo được chính xác nhất chiều cao chiếc cốc khi ta hoàn toàn không có những “đường cao” vẽ sẵn trên mô hình? Làm thế nào đo được bán kính đáy và miệng cốc? Công thức nào là thích hợp? Tương quan nào giữa vị trí vạch trên thành cốc với dung tích nước chứa được tới đó?

3. Kết luận

RME là xu hướng DH có nhiều điểm tích cực, phù hợp với CTGDPT môn Toán năm 2018. Việc tiếp cận và triển khai những ý tưởng của lí thuyết GDTH thực tiễn ở nước ta trong thời điểm hiện nay là phù hợp, cần thiết. Tuy nhiên vẫn có một số vấn đề cần bàn thảo kỹ hơn như chuyển ngữ RME sang tiếng Việt, việc đồng nhất RME với vận dụng, liên hệ hoặc ứng dụng Toán học, đồng nhất mô hình hóa toán học với mô hình trong RME.

Bài báo này đã khảo cứu thư mục tài liệu gốc, nghiên cứu những công bố của các nhà khoa học trong nước để đưa ra một cách hiểu gần với nguyên bản lí thuyết RME. Xuất phát từ hiểu biết về lí thuyết RME, tư tưởng của CTGDPT môn Toán 2018, tổng kết kinh nghiệm nghiên cứu, đào tạo, đề xuất 7 biện pháp (được trình bày trong 3 nhóm với những ví dụ minh họa thuộc chương trình toán THPT) nhằm vận dụng đúng, hiệu quả tinh thần RME trong DH môn Toán.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Van den Heuvel-Panhuizen, M., 2000. *Mathematics education in the Netherlands: A guided tour*. Freudenthal Institute CD Rom for ICME 9. Utrecht: Utrecht University.

- [2] Van den Heuvel-Panhuizen, M. (Editors), 2020. *International Reflections on the Netherlands Didactics of Mathematics: Visions on and Experiences with Realistic Mathematics Education* (ICME-13 Monograph). Springer Open.
- [3] Nguyen Thuy Thanh, 2005. *Learning to teach Realistic Mathematics in Vietnam* (dissertation). University of Amsterdam.
- [4] Le Tuan Anh, 2006. *Applying Realistic Mathematics Education in Vietnam: Teaching middle school geometry* (dissertation). University of Potsdam.
- [5] Nguyen Phu Loc, Mai Hoan Hao, 2016. Teaching Mathematics based on “Mathematization” of Theory of Realistic Mathematics Education: A Study of the linear function $z = ax + b$. *The International Journal of Engineering and Science*, Volume 5, Issue 6, pp. 20- 23.
- [6] Trần Cường, Nguyễn Thùy Duyên, 2018. Tìm hiểu lí thuyết Giáo dục Toán học gắn với thực tiễn và vận dụng xây dựng bài tập thực tiễn trong dạy học môn Toán. *Tạp chí Giáo dục*, Số đặc biệt, kì 2, tháng 5.
- [7] Nguyen Tien Trung, 2018. Some suggestion on the application of the Realistic Mathematics Education and the Didactical situations in mathematics teaching in Vietnam. *HNUE Journal of Science*. Vol. 63, Issue 9, pp. 24-33.
- [8] Nguyen Tien Trung, Trinh Phuong Thao, Tran Trung, 2018. Realistic mathematics education (RME) and didactical situation in mathematics (DSM) in the context of education reform in Vietnam. *Journal of Physics: Conference Series*, Volume 1340, International Annual Meeting on STEM Education (I AM STEM) 2018 13-15, Avani Khon Kaen Hotel, Thailand.
- [9] Tien-Trung Nguyen, Thao Phuong Thi Trinh, Hang Thu Vu Ngo, Ngoc Anh Hoang, Trung Tran, Hiep Hung Pham, Van Nghi Bui, 2020. Realistic Mathematics Education in Vietnam: recent policies and practices. *International Journal of Education and Practice*, 8(1): 57-71.
- [10] Treffers, A., 1987. *Three dimensions: A model of goal and theory and theory description in mathematics instruction- The Wiskobas project*. Dordrecht: Kluwer.
- [11] De Lange, J., 1987. *Mathematics, insight and meaning: Teaching, learning and testing of mathematics for the life and social sciences*. Utrecht: OW & OC.
- [12] Van den Heuvel - Panhuizen, M., 2003. The didactical use of models in Realistic Mathematics Education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, 54 (1), 9-35.
- [13] Van den Heuvel - Panhuizen, M., 1996. *Assessment and Realistic Mathematics Education*. CD-β Press.
- [14] Hans Freudenthal, 1991. *Revisiting Mathematics Education: China Lectures*. Springer.
- [15] Freudenthal, H., 1983. *Didactical phenomenology of mathematical structures*. Dordrecht: Reidel.
- [16] Gravemeijer, K.; Doorman, M., 1999. Context problems in Realistic Mathematics Education: a calculus course as an example. *Educational Studies in Mathematics*, 39, 111-129.
- [17] Freudenthal, H., 1973. *Mathematics as an educational task*. Dordrecht: Reidel.
- [18] Meyer, M. R.; Dekker, T.; Querelle, N., 2001. Context in mathematics curricula. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 6 (9), 522-527.
- [19] Gravemeijer, K.P.E., 1994. *Developing Realistic Mathematics Education* (Dissertation). CD-β Press / Freudenthal Institute.
- [20] Gravemeijer, K.P.E., 2004. Emergent modeling as a precursor to mathematical modeling. In H. W. Henn; W. Blum (Eds.) *ICME 14: Applications and Modelling in Mathematics Education*, Pre-Conference Volume (pp. 97-102). Dortmund: University of Dortmund.

- [21] Streefland, L., 1990. Free productions in teaching and learning mathematics. In K. Gravemeijer; M. Van den Heuvel-Panhuizen; L. Streefland (Eds.). *Contexts, free productions, tests and geometry in Realistic Mathematics Education* (pp. 33-52). Utrecht: OW & OC.
- [22] Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018a. *Chương trình Giáo dục phổ thông. Chương trình tổng thể*.
- [23] Bộ Giáo dục và Đào tạo, 2018b. *Chương trình Giáo dục phổ thông môn Toán*.
- [24] Đỗ Đức Thái, Đỗ Đức Bình, 2019. Về hình học trực quan ở cấp trung học cơ sở trong chương trình môn Toán mới. *Tạp chí khoa học Trường Đại học Sư phạm Hà Nội*, số 4, tr. 111-120.
- [25] Jeremy Kilpatrick, 2012. The new math as an international phenomenon. *ZDM*, 44(4), pp. 563-571.
- [26] Marja Van den Heuvel-Panhuizen and Paul Drijvers, 2014. Realistic Mathematics Education, in S. Lerman (ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education*, Springer.
- [27] Brown JR, 1999. *Philosophy of mathematics: an introduction to the world of proofs and pictures*. New York, (NY) Routledge.
- [28] Avi Sigler, Ruti Segal & Moshe Stupel, 2016. The standard proof, the elegant proof, and the proof without words of tasks in geometry, and their dynamic investigation. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, Vol. 47(8), pp. 1226-1243.
- [29] Bui Van Nghi, 2010. Connecting mathematics with real life. *Journal of Science of HNUE*, Vol. 55, No. 1, pp. 3-7.

ABSTRACT

Approaching and proposing some measures for applying RME theory in teaching and learning mathematics in Vietnam

Le Tuan Anh and Tran Cuong

Faculty of Mathematics, Hanoi National University of Education

This article presents our theoretical research and experience-based results related to exploring and applying Realistic Mathematics Education (RME) in Vietnam. We approach original RME researches as well as recent RME literature to discuss the full understanding of RME and propose didactical measures for applying RME in teaching and learning mathematics so that they have been suitable for a fundamental and comprehensive innovation in mathematics education in Vietnam since 2018. Together with some well-selected illustrated examples, the measures expressing our ideas are useful and helpful for high school mathematics teachers who want to apply RME to their teaching.

Keywords: Realistic Mathematics education, teaching and learning mathematics, measures, realistic problems