

NHỮNG TRI THỨC CẦN THIẾT CHO GIÁO VIÊN TOÁN ĐỂ DẠY HỌC NỘI DUNG VECTOR Ở BẬC TRUNG HỌC PHỔ THÔNG

Trần Cường

Khoa Toán - Tin, Trường Đại học Sư phạm Hà Nội

Tóm tắt. Trong bài báo này, tác giả vận dụng khái niệm chuyển hóa sư phạm của lý thuyết tình huống và một số kết quả nghiên cứu gần đây về mô hình tri thức của người giáo viên Toán vào nội dung Vector ở trường Trung học phổ thông. Lược sử hình thành, nguồn gốc, ý nghĩa và vị trí của tri thức được trình bày một cách có hệ thống nhằm giúp người giáo viên toán vươn tới tầm tri thức “biết rộng, hiểu sâu, có tầm nhìn cao” khi dạy nội dung Vector. Đây là tiền đề cần thiết để có những bài dạy hiệu quả.

Từ khóa: chuyển hóa sư phạm, tri thức nội dung, tri thức nội dung dạy học, dạy học vector.

1. Mở đầu

Trong chương trình đào tạo giáo viên Toán tại Trường Đại học Sư phạm Hà Nội hiện nay, lượng kiến thức chuyên ngành về Toán trang bị cho sinh viên là rất lớn: khoảng 30 học phần toán cơ bản với gần 70 tín chỉ (nghĩa là xấp xỉ 1000 tiết học). Trong rất nhiều kiến thức toán học đó, phần nào thiết thực cho người giáo viên khi dạy học ở các bậc phổ thông? Câu trả lời thực sự triệt để và thuyết phục không hề dễ dàng. Cách tiếp cận tới tri thức từ hai góc độ: nội dung trong quá trình dạy học môn Toán và yếu tố quan trọng cấu thành năng lực sư phạm của người giáo viên Toán là một cách làm phù hợp, khả thi.

Trong hệ thống dạy học tối thiểu, theo lý thuyết tình huống, tri thức cùng với học sinh, giáo viên và môi trường là những thành phần cấu thành [1, tr. 152]. Tri thức dạy học sẽ được chuyển hóa thành kiến thức của học sinh thông qua tổ chức dạy học của giáo viên. Tiền thân của tri thức dạy học là tri thức chương trình: từ tri thức được quy định trong chương trình, sách giáo khoa, người giáo viên tiến hành hoàn cảnh hóa lại, thời gian hóa lại, cá nhân hóa lại để đặt học sinh vào một tình huống có dụng ý sư phạm. Muốn có tri thức chương trình, người ta xuất phát từ tri thức khoa học, sàng lọc - định mức độ yêu cầu - định cách thức diễn đạt phù hợp để đảm bảo sự tương hợp của hệ thống dạy học với môi trường của nó.

Tri thức khoa học, trong trường hợp này là tri thức toán học - đối tượng của nhận thức. Đặc biệt là trong khoa học toán học, để thông báo một *tri thức*, nhà nghiên cứu thường xóa bỏ lịch sử, không nêu lại tình huống cụ thể, bỏ qua những tìm tòi, dự đoán, sai lầm hay các mốc thời gian - tức là họ thường *phi hoàn cảnh hóa, phi cá nhân hóa, phi thời gian hóa*. Hai khâu sau của quá trình nói trên được gọi là *chuyển hóa sư phạm* [1, tr. 153].

Trong mô hình năng lực của người giáo viên Toán đề xuất bởi dự án COACTIV (tên đầy đủ là *Professional Competence of Teachers, Cognitively Activating Instruction, and the Mathematical Literacy*, triển khai ở CHLB Đức giai đoạn 2002 - 2009), tri thức nghề là một

thành tố cấu thành cùng với động lực, sự tự chủ, niềm tin - giá trị - lí tưởng. Dự án này do Viện nghiên cứu về nguồn nhân lực, Berlin kết hợp với viện đại học Goethe, Frankfurt cùng một số trường đại học khác tại Đức tiến hành, đã công bố chuyên khảo [2] (2013) được trích dẫn 201 lần trên chuyên trang học thuật Google Scholar (trong đó có những công trình “siêu ảnh hưởng” như sách [Stronge J.H, 2018, *Qualities of Effective Teachers*, ASCD Publishing] sở hữu 2191 trích dẫn trên cùng hệ thống).

Có tới 5 nhóm tri thức cần thiết là *tri thức nội dung* (CK: Content Knowledge), *tri thức sư phạm về nội dung* (PCK: Pedagogical Content Knowledge), *tri thức tâm lí - sư phạm về nội dung* (PPK: Pedagogical/Psychological Knowledge), *tri thức tổ chức* (OK: Organizational Knowledge) và *tri thức tư vấn* (CoK: Counseling Knowledge).

Nói riêng, CK được mô tả là sự hiểu biết sâu sắc về toán phổ thông; PCK có 3 phần chính yếu: cách giải thích, diễn đạt tri thức toán, hiểu biết về sự học tập của học sinh và hiểu biết về các nhiệm vụ học toán.

Ba nhóm PPK, OK, CoK đòi hỏi mở rộng nghiên cứu tới một số lĩnh vực khác như tâm lí học, quản lí giáo dục, đánh giá trong giáo dục,... ít liên quan tới chương trình đào tạo chuyên ngành Sư phạm Toán, lại khó gắn kết với nội dung dạy học vectơ ở phổ thông. Để chuẩn bị CK - PCK cho người giáo viên là một vấn đề quá rộng lớn nên tác giả chủ động giới hạn phạm vi nghiên cứu là đề xuất yêu cầu về CK và một phần PCK, cần thiết cho người giáo viên Toán thực hiện những bước chuyển hóa sư phạm để có được tri thức dạy học tốt nhất cho giờ dạy của mình bằng khẩu hiệu: biết rộng, hiểu sâu, có tầm nhìn cao về toán phổ thông.

- *Biết rộng*: biết được nguồn gốc (ở đâu ra?), ứng dụng (để làm gì), các chi tiết lịch sử hình thành phát triển của tri thức (trải qua con đường dài khó khăn khúc khuỷu ra sao?). Biết *nguồn gốc* sẽ giúp người giáo viên có nhiều lựa chọn khi diễn đạt, giảng giải kiến thức, biết *ứng dụng* góp phần triển khai hoạt động dạy học bằng giao nhiệm vụ học tập tốt hơn, biết *lịch sử hình thành phát triển tri thức* chính là một chuẩn bị để dạy tri thức phù hợp với tư duy, nhận thức tự nhiên của học sinh.

- *Hiểu sâu*: giải đáp được cả câu hỏi “tại sao?” chứ không chỉ “cái gì? như thế nào?”, biết tường tận từng chi tiết, những biến thể hay ngoại lệ đặc biệt.

- *Có tầm nhìn cao*: biết cái chung, cái trừu tượng khái quát (thường là những tri thức cơ bản trong Toán Cao cấp hoặc Toán Phổ thông phần Nâng cao) để nhìn được cả hệ thống và thấy được mối quan hệ cũng như vai trò của từng tri thức trong hệ thống.

Từ góc độ một giảng viên sư phạm, tác giả tin rằng một giáo viên Toán giỏi phải biết rộng, hiểu sâu, có tầm nhìn cao về toàn bộ chương trình phổ thông. Nội dung Vectơ được lựa chọn ngẫu nhiên như một minh họa cho ý tưởng và một tài liệu tham khảo cho đồng nghiệp, sinh viên. Phần nội dung nghiên cứu chính trình bày hai nhóm kết quả: nguồn gốc, ý nghĩa của tri thức được thể hiện chân thực trong lịch sử hình thành và phát triển và sự phản ánh từ tri thức khoa học tới tri thức chương trình, vị trí của tri thức trong Chương trình giáo dục phổ thông môn Toán ban hành năm 2018.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Ý nghĩa thực sự của vectơ trong quá trình hình thành và phát triển

Bất kì tri thức toán học nào cũng được phát triển do nhu cầu của ít nhất một trong hai nguồn:

- *Từ thực tiễn*: Trong lao động sản xuất nghiên cứu các khoa học thực nghiệm khác vật lí, hóa học, sinh học, thiên văn,... luôn có nhu cầu đo đạc và biểu diễn (mô hình hóa), nếu các khái niệm, phương pháp đã có của lĩnh vực liên quan là chưa đủ, rất có thể những khái niệm, phương pháp mới của toán học sẽ ra đời.

- Từ nội bộ toán học: Trong nghiên cứu, giải quyết các vấn đề của nội bộ môn toán, các nhà toán học thường xuyên phải phát triển các công cụ, phương pháp mới để giải quyết các bài toán. Điều thú vị đáng chú ý là trong lịch sử toán, rất nhiều công cụ có nguồn gốc hoàn toàn lý thuyết lại quay trở lại thực tiễn, thể hiện những ứng dụng to lớn.

Đối với khái niệm vector, hai dòng chảy trên giao thoa với nhau theo thời gian, chủ yếu từ những nghiên cứu vật lý và sự hình thành, phát triển của khái niệm số phức.

Từ vector là từ gốc la tinh, danh từ của động từ mang đi, mang theo. Vậy nghĩa từ điển, nó là *cái mang* (chẳng hạn mang điểm A tới điểm B). Mặc dù thuật ngữ *radius vector* đã từng được sử dụng bởi các nhà thiên văn học khi khảo sát chuyển động của các hành tinh quanh mặt trời, nhưng Hamilton R.W. (1805-1865) được thừa nhận rộng rãi là người đầu tiên gán một nghĩa toán học cho từ vector (cùng đồng thời với từ scalar - vô hướng) trong công trình [3]. Trong tiếng Việt, tác giả Hoàng Xuân Hãn là người phiên âm từ gốc tiếng Pháp *vecteur* thành vec-tơ [4, tr. 187], ngày nay danh từ được viết sách giáo khoa trung học phổ thông không dùng *dấu cách* nữa mà viết liền thành *vector*.

Trong chuyên khảo [5], hầu hết các sự kiện chính trong lịch sử giải tích vector đã được liệt kê khá đầy đủ. Tác giả đã đối sánh thông tin ở đó với các tài liệu gốc liên quan để *rút ra một số kết luận* (từ 2.1.1. đến 2.1.7.) với đủ *cơ sở và bằng chứng lịch sử*. Nội dung những kết luận này chính là những tri thức cần trang bị cho giáo sinh, nhất là trong khuôn khổ chương trình đào tạo ở trường Đại học sư phạm.

2.1.1. Vector là công cụ hiệu quả để biểu diễn các đại lượng có hướng

Nếu như các số đặc trưng cho lượng, các hình biểu diễn cho hình dạng không gian của thế giới khách quan là hai đối tượng nghiên cứu cơ bản của khoa học toán học từ thời kì phát sinh đến đầu giai đoạn toán học cao cấp cổ điển thì do nhu cầu của các khoa học tự nhiên, đặc biệt là vật lý học, các đại lượng liên quan tới chuyển động, biến thiên cũng đòi hỏi phải có một mô hình biểu diễn tối ưu. Nhiều đại lượng như vận tốc, gia tốc, lực, moment,... đều chung nhau một thuộc tính phổ quát là tính *có hướng*.

Sơ đồ của *quy tắc hình bình hành* là một hình vẽ tự nhiên, quen thuộc được cho là đã xuất hiện từ trước công nguyên trong một tác phẩm đã thất truyền của Aristotle (384-322 tr.CN) hay trong các thiết kế cơ khí của Héron (thế kỷ II) [5, tr. 2]. Ở thế kỉ 17, *những đại lượng có hướng* với khá đầy đủ các đặc tính của vector trong vật lý như vận tốc, lực đã được nghiên cứu tương đối đầy đủ, hệ thống bởi Newton I. (1642-1727) trong tác phẩm kinh điển *Principia Mathematica* (Nguyên lý toán học của tự nhiên, 1687). Sách có đoạn viết: “Một vật chịu tác động của đồng thời hai lực sẽ có trạng thái giống như khi nó chịu một lực đặt trên đường chéo của hình bình hành dựng trên hai lực nói trên” [6, tr. 14].

Đây là quy tắc tổng hợp lực mà học sinh phổ thông ngày nay được học ở lớp 10, tất nhiên gọn gàng, trong sáng hơn nhiều với sự trợ giúp của kí hiệu vector.

2.1.2. Vector “sinh ra từ -” và “giúp giải quyết -” nhu cầu đại số hóa hình học

Có thể coi một trong những mầm mống của giải tích vector là những ý niệm đầu tiên của Leibniz G.-W. (1646 - 1716) về một ngôn ngữ được gọi là *hình học vị trí* (Geometry of Situation), đề cập tới trong thư gửi Huygens [7]. Cùng một số bài luận khác, Leibniz đã diễn tả trong sáng, rõ ràng nhu cầu chính đáng của một nhà toán học *muốn có một ngôn ngữ mới để biểu diễn và giải quyết các vấn đề hình học*. Bản thân các đối tượng truyền thống của hình học như điểm, đường thẳng, mặt phẳng,... không cho phép tiến hành được các biến đổi hình thức thuận tiện như trong đại số, ngược lại các số và các biến có thể cộng, trừ, nhân chia một cách máy móc, hình thức (và do đó thuận tiện) trong đại số lại chỉ biểu diễn được độ lớn (cường độ, mức độ) mà không mang được các thông tin về phương vị [5, tr. 03].

Mặc dù chưa tới được đích đến nhưng những mô tả đầu tiên về *hình học vị trí* đã đặt ra chính xác những yêu cầu mà một ngôn ngữ cần làm được để có thể làm việc với các đối tượng hình học như trong đại số. Vai trò của hình học vị trí được nhắc tới trong bình luận của Couturat về công trình được cho là hoàn chỉnh đầu tiên về giải tích vectơ của Grassmann ([8], 1901): Tóm lại, phép tính giải tích vectơ của Grassmann dường như được sinh ra để đáp ứng tương tượng của Leibniz!

Ngày nay, có thể nói các giáo trình toán cơ bản đều khá thống nhất sử dụng vectơ để xây dựng hệ trục tọa độ, chương trình toán phổ thông ở Việt Nam cũng làm như vậy.

2.1.3. Vectơ góp phần giúp “giải mã” sự bí hiểm của số phức

Trong [9], Cardano G. (1501 - 1576) đã trình bày phương pháp giải trọn vẹn các phương trình bậc ba. Phương pháp này, (có một lịch sử tranh chấp phức tạp, ngày nay thường được gán tên kép Cardano - Tartaglia) mặc dù rất hiệu quả nhưng lại gợi ra vấn đề cần suy nghĩ cho

Bombelli R. (1526 - 1572): khi áp dụng cho nhiều phương trình, chẳng hạn $x^3 - x = 0$, tập nghiệm rõ ràng $\{0 \pm 1\}$ chỉ có thể được tìm thấy nếu chấp nhận hiện tượng có hai số nào đó tổng bằng 0, tích bằng 1, tức là bình phương của một trong hai số đó bằng -1. Bombelli đã mạnh dạn đề xuất những quy tắc làm tính với loại “số” mới này mà ông gọi là số giả ([10], 1572) “Số giả” của Bombelli gây nghi ngờ cho giới toán học vì nó đi ngược lại trực giác, chưa hề có một mô hình trực quan khả dĩ nào mà hoàn toàn thuộc về giả định. Chính Descartes R. (1596 - 1650) đã gọi những “số mới” này là “số ảo” như ngày nay: là “số” nhưng nó không gắn với bất cứ “lượng” nào, không thể “tưởng tượng nổi”, tất nhiên cũng không thể “nhìn thấy được” ([11, tr. 380], 1637).

Wessel C. (1745-1818) rồi Argand J.-R. (1768-1818) dùng các điểm trên mặt phẳng tọa độ Oxy để biểu diễn thì các số phức, phép toán cộng, trừ các số phức cùng cách làm tính với chúng mới có thể “được trông thấy” trên các vectơ. Số phức mới được thừa nhận rộng rãi, đề rồi *đại số trên tập số phức* được định nghĩa chặt chẽ bởi Hamilton, giải phóng tư duy con người khỏi một định kiến nặng nề hàng trăm năm và mở ra một chương mới trong lịch sử toán học [5, tr.34].

2.1.4. Vectơ là công cụ để tìm trọng tâm hệ điểm

Lần theo dấu vết khái niệm vectơ, không thể bỏ qua Möbius A.-F với công trình *Giải tích trọng tâm* [11]. Trong chương đầu tiên, tác giả đã bắt đầu định nghĩa “đoạn thẳng AB” và “đoạn thẳng BA = -AB cùng quy tắc cộng hai “đoạn thẳng” cùng phương. Tiếp theo còn có sự mở rộng quy tắc về dấu, quy tắc cộng tới trường hợp nhiều điểm (chẳng hạn cho tam giác hay tứ diện),... phép cộng và phép nhân với số thực trên các “đoạn thẳng” hoàn toàn phù hợp các phép toán vectơ ngày nay, thậm chí định lý quan trọng nhất được phát biểu như sau [11, tr. 10]:

Cho các điểm phân biệt A, B, C,..., N cùng các hệ số a, b, c,..., n có tổng khác 0, luôn tồn tại duy nhất tâm S sao cho khi chiếu song song A, B, C,..., N, S lên bất kỳ mặt phẳng (P) nào ta cũng có:

$$a.AA' + b.BB' + c.CC' + \dots + n.NN' = (a + b + c + \dots + n).SS'$$

đặc biệt khi (P) đi qua S thì $a.AA' + b.BB' + c.CC' + \dots + n.NN' = 0$

Tiếc là ở thời điểm ra đời, công trình vượt thời đại này không gây được tiếng vang lớn.

2.1.5. Giải tích vectơ phát triển từ những nhu cầu nghiên cứu các hiện tượng tự nhiên

Một phần lớn cơ sở của Giải tích vectơ (Vector Analysis) được xây dựng như cơ sở toán học của nghiên cứu về hiện tượng thủy triều [5, tr. 63]. Trong bài luận đầu tiên *Lí thuyết về thủy triều* ([12], 1840), Grassmann khẳng định đã đổi chiều, thừa hưởng và cải tiến mạnh mẽ các kết quả kinh điển trong các công trình *Cơ học giải tích* ([13], 1788) của Lagrange J.-L. (1736 – 1813 và *Cơ học thiên thể* ([14], 1799 - 1825) của Laplace P.-S. (1749 - 1827). Phiên bản hoàn thiện nhất trình bày đầy đủ phát minh của Grassmann, cuốn *Lí thuyết khai triển tuyến tính, một ngành toán học mới* ([15], 1844) có đoạn tựa: “Những nghiên cứu đầu tiên về lí thuyết thủy

triều bất buộc tôi phải tham khảo Cơ học giải tích của Lagrange, để vui mừng nhận thấy những cải tiến của mình cho phép biểu diễn và tính toán tốt hơn ông ta hàng chục lần. Nó thúc giục tôi tiếp tục phát triển những khái niệm để áp dụng vào những bài toán khó khăn phức tạp hơn nữa..." Những trình bày từ định nghĩa tôi xây dựng không gian tuyến tính, số chiều, không gian con, tích vector,... đã giúp tác giả cuốn sách được tôn vinh như nhà sáng lập quan trọng nhất của chuyên ngành Đại số tuyến tính (Linear Algebra).

2.1.6. Lí thuyết giải tích vector được hoàn thiện bởi một chuyên gia về nhiệt động lực học

Ngày nay *Giải tích vector* được hoàn thiện bởi Willard Gibbs J.-W. (1839-1903) trong công trình *Cơ sở giải tích vector* ([16], 1881 - 1884). Là giáo sư, chuyên gia về nhiệt động lực học ở đại học Yale, Gibbs nhận ra sức mạnh to lớn của công cụ quaternion của Maxwell và Grassmann trong lĩnh vực của mình nên đã nhiệt thành truyền bá phương pháp này trong những bài giảng cho sinh viên. Cuốn sách kinh điển này được tái bản cho tới năm 1960, có thể xem là giáo trình cơ sở đầu tiên, đầy đủ, tương đối hoàn thiện vẫn còn giá trị lớn trong đào tạo toán cao cấp ngày nay.

Được phát triển như một sản phẩm kết hợp giữa việc nghiên cứu các đại lượng có hướng trong vật lí với giải quyết các vấn đề hoàn thiện đại số các quaternion, khi đến lượt mình, *giải tích vector* cũng thể hiện vai trò một công cụ quan trọng để nghiên cứu toán học hiện đại. "Trái ngọt" đầu tiên, phải kể đến các nghiên cứu kinh điển về các đường và mặt thuộc lĩnh vực hình học vi phân, do Frenet J.-F. (1816 - 1900) thực hiện. Ngày nay lĩnh vực này vẫn là một nhánh toán học tiếp tục phát triển mạnh mẽ [17].

2.1.7. Tích vector là mô hình toán học phù hợp với nhiều hiện tượng vật lí

Tích vector chính là khái niệm cốt lõi sau bản thân khái niệm vector cùng hai phép toán cộng và nhân với vô hướng. Không giống như nhân các vô hướng, việc xây dựng phép toán lấy tích trên các đại lượng có hướng khó khăn và trắc trở hơn nhiều. Trong lịch sử Giải tích vector, những tiền thân của tích vector hiện đại xuất hiện khá nhiều trong thời đại của Grassmann

Bảng 1. Chuỗi sự kiện chính liên quan tới sự hình thành tích vector
(tổng hợp 2 mục từ dot product và cross product [5, tr. 266])

Tác giả	Năm	Tên công trình	Tích vô hướng	Tích có hướng
Lagrange	1773	Giải pháp phân tích một số vấn đề trên hình chóp tam giác	một dạng	một dạng
Gauss	1831	Mặt hình học của các dạng Ternären	scalar p.	chưa có
Grassmann	1844	Lí thuyết khai triển tuyến tính	inner p.	outer p.
Hamilton	1866	Cơ sở quaternion	scalar p.	vector p.
Maxwell	1873	Chuyên luận về điện và từ	không có	không có
Clifford	1878	Động lực học cơ bản	scalar p.	vector p.
Gibbs	1881	Cơ sở của giải tích vector	direct p.	skew p.
Heaviside	1883	Liên hệ giữa lực từ và dòng điện	scalar p.	vector p.
Mobius	1887	Về phép cộng và nhân trong hình học	projective p.	geometrical p.
Burali Forti	1897	Giới thiệu hình học vi phân theo phương pháp Grassmann	internal p.	vectoriel p.

Nhìn vào chuỗi sự kiện nói trên, dường như tích vectơ ra đời hoàn toàn từ nội bộ toán học, nhờ trí tưởng tượng bay bổng của các nhà toán học, trong khi cố gắng tìm một phương tiện để biểu diễn và tính toán thuận tiện cho các vấn đề trong vật lí. Nếu đúng như vậy thì những tưởng tượng của Lagrange và Gauss phù hợp với những quy luật đã biết trong vật lí. Từ đó giúp vật lí lượng hoá được các đại lượng chủ yếu phụ thuộc vào cảm tính.

Khi một người phải kéo một vật bằng một lực không đổi (có hướng song song với mặt đường) đi một quãng đường nào đó thì người kéo sẽ mất công (sức) nhưng đến mức nào? Mất sức "đến bao nhiêu sức" hay "sinh ra bao nhiêu công"? Nếu không kéo theo phương song song với mặt đường mà lại kéo "hơi chếch lên trên" thì sinh nhiều hơn hay ít "công" hơn? Rõ ràng kéo "đi xa" mệt hơn kéo "đi gần", "kéo mạnh" mất sức hơn "kéo nhẹ". Tuy nhiên nhận định cảm tính như vậy là chưa đủ cho tính toán, dự liệu, tối ưu hóa hoạt động lao động sản xuất. Trong trường hợp này, chỉ cần sử dụng tích vô hướng:

$$A = \vec{F} \cdot \vec{S}$$

ta thu được ngay đại lượng số phù hợp với những quan sát của vật lí: kéo cùng hướng với hướng chuyển động là lực có "công to" nhất; vuông góc với chuyển động là những lực "vô tích sự", thậm chí "trái hướng" với chuyển động còn là những lực "có hại". "Công" tính như trên, tất nhiên cũng tỉ lệ thuận với quãng đường và cường độ lực khi giữ nguyên hướng của chúng.

Tích có hướng cũng giúp mô phỏng một cách trung thành những quy luật vật lí như sự phụ thuộc của momen lực trong chuyển động quay:

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

hay lực Lorentz sinh ra do từ trường tác động lên một điện tích

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

2.2. Nội dung vectơ: từ tri thức khoa học tới tri thức chương trình

Theo [18, tr. 7], nội dung Vectơ được đưa vào chương trình toán hiện hành (chương trình 2000) nhằm giới thiệu cho học sinh một phương pháp mới để nghiên cứu hình học Euclid, phục vụ cho các môn học khác như vật lí, hoá học và giúp học sinh bước đầu tiếp cận với toán học hiện đại. Chương vectơ được xếp phần lớn ở chương đầu tiên Hình học ở lớp 10, sau đó xen kẽ dần một phần ở lớp 11 (vectơ trong không gian) trước khi chuyển hoàn toàn sang phương pháp toạ độ.

Chương trình toán 2018 [19] bố trí nội dung theo hướng tinh giản, thiết thực, hiện đại; bảo đảm thống nhất, nhất quán và phát triển liên tục; bảo đảm tích hợp - phân hóa; bảo đảm tính mở. Tiếp nối nội dung bậc học THCS mà chủ yếu là hình học trực quan, cuối cấp mới có hình học phẳng (kiến thức, kỹ năng về các quan hệ hình học một số hình phẳng thông dụng, kiến thức - kỹ năng ở mức độ suy luận logic), nội dung Vectơ được coi như một phần của phương pháp đại số (vectơ, toạ độ) trong hình học, cắt bớt khá nhiều và được xếp sau Hệ thức lượng trong tam giác ở đầu chương trình Hình học 10. Nội dung Vectơ không thấy trong chương trình lớp 11 và chỉ được giới thiệu lại rất sơ lược trước khi xây dựng hệ trục toạ độ trong không gian 3 chiều.

2.2.1. "Phương pháp vectơ" và "tính hiện đại" của nó

Có nhiều hệ tiên đề khác nhau được xây dựng để trình bày và nghiên cứu hình học của không gian vật lí (Euclid) quen thuộc nhất mà loài người đang sống.

"Phương pháp hình học tổng hợp", như cách gọi quen thuộc trước đây là cách xây dựng không gian Euclid bằng hệ tiên đề Hilbert (David, 1862-1943). Ở phổ thông, hệ tiên đề chỉ được

giới thiệu chứ không trình thực sự chi tiết, đầy đủ. Trong hệ tiên đề này, những khái niệm cơ bản gồm có *điểm, đường thẳng, mặt phẳng, liên thuộc, nằm giữa*. Ở cấp THCS, học sinh đã quá quen thuộc với cách xây dựng này.

“Phương pháp vector” và “phương pháp tọa độ” hiện đại ở chỗ, cùng dựa trên hệ tiên đề không gian vector, còn gọi là hệ tiên đề Weyl (Hermann, 1885-1955) với cùng một hệ tiên đề (gồm 15 tiên đề, trong đó có 8 tiên đề xác định không gian vector) và 2 mô hình khác nhau do chọn đối tượng cơ bản khác nhau: (i) hoặc gồm điểm và vector, với điểm theo mô tả thông thường, vector là đoạn thẳng có phân biệt điểm đầu - điểm cuối; hoặc (ii) gồm điểm và vector, với điểm là một bộ số, vector cũng là một bộ số.

Giáo viên đã được học ở trường đại học sự phạm: đoạn thẳng có hướng hay bộ (hai / ba) số thực chỉ là những mô hình khác nhau của một khái niệm hoàn toàn trừu tượng, để giúp trực quan hóa khái niệm đó. *Vector có thể là bất cứ cái gì, miễn là có thể cộng, nhân với vô hướng và hai phép toán đó thỏa mãn hệ 8 tiên đề không gian vector*.

Sắp xếp như trong chương trình cũng thể hiện tư tưởng *đại số hóa hình học*, một tư tưởng đột phá trong lịch sử toán. Trình tự tri thức chương trình được trình bày, về đại thể phản ánh trung thành tiến trình lịch sử:

Bảng 2. Phương pháp vector trong lịch sử toán và trong chương trình toán phổ thông

<i>Lịch sử toán</i>	<i>Chương trình toán phổ thông Việt Nam 2018</i>
1637, Descartes Xây dựng hệ trục tọa độ dựa trên hình học	Lớp 7: Xây dựng mặt phẳng tọa độ
1844, Grassmann Định nghĩa không gian vector tổng quát	Lớp 10: Xây dựng mô hình hình học bằng đoạn thẳng có hướng
1918, Weyl Xây dựng không gian Euclid bằng hệ tiên đề không gian vector	Lớp 11 & 12: Dùng mô hình hình học của không gian vector như một công cụ nghiên cứu hình học Euclid:
1957, Artin Xây dựng không gian Euclid tổng quát chỉ bằng các phép toán đại số, hoàn toàn không phụ thuộc vào hình vẽ	Lớp 10, lớp 12: Xây dựng mô hình đại số hóa hoàn toàn nhờ hệ trục tọa độ

2.2.2. Sự phản ánh từ tri thức khoa học đến tri thức chương trình, tri thức dạy học

Mỗi đơn vị tri thức được đưa vào chương trình toán phổ thông thường là một trường hợp đặc biệt hoặc mô hình cụ thể của một kiến thức tổng quát, trừu tượng hơn trong khoa học toán học. Ngược lại, bản thân nó lại có thể có những cách biểu diễn khác nhau và những ví dụ cụ thể khác nhau. Dưới đây là một bảng gợi ý tổng thể sự phản ánh các mức độ khác nhau, từ tri thức khoa học tới tri thức chương trình, tri thức dạy học trong nội dung vector. Cột giữa của bảng gồm hầu hết những đơn vị được quy định trong chương trình toán phổ thông 2018. Cột bên phải là một số đề xuất về những cách biểu diễn khác nhau có thể tham khảo sử dụng trên lớp học, nhằm góp thêm vào tri thức sự phạm về nội dung cho người giáo viên toán.

Bảng 3. Sự phản ánh từ tri thức khoa học, tri thức chương trình tới tri thức dạy học về vector

Tri thức khoa học	Tri thức chương trình	Ví dụ cho tri thức sư phạm về nội dung (PCK)
Phần tử của tập hợp V	Vector (Lớp 10)	- Đoạn thẳng có hướng, cột số, bộ số, đa thức - Giá trị của vector phải đủ bộ 3 thông tin: phương, chiều, độ dài
Hai phần tử của cùng lớp tương đương	Vector bằng nhau (lớp 10)	- Cùng phương, cùng chiều, cùng độ dài, - Ví dụ có thể lấy trên một đoạn thẳng chia thành nhiều phần bằng nhau, một lưới vuông hoặc một hình bình hành, trên cửa sổ phần mềm hình học
Phần tử trung hòa của phép toán cộng, tồn tại theo hệ tiên đề	Vector không (lớp 10)	- Điểm đầu và điểm cuối trùng nhau - Độ dài bằng 0 - Cùng phương với mọi vector
Định nghĩa phẳng một chiều trong không gian Euclid	Điều kiện thẳng hàng cho ba điểm (lớp 10)	- Vẽ hai vector cùng, phương cùng điểm đặt - Ví dụ lấy trên một hình vẽ cụ thể
Phép toán hai ngôi trên V	Tổng hai vector: quy tắc ba điểm, quy tắc hình bình hành (lớp 10)	- Tổng hợp 2 chuyển động: đi từ A đến B rồi đi tiếp từ B đến C chính là đi từ A đến C - Tổng hợp hai lực cùng điểm đặt - Hiện tượng thuyền buồm “chạy ngược gió” trong sách giáo khoa hiện hành
Ảnh xạ $\times: K \times V \rightarrow V$	Tích của vector với số thực (lớp 10)	Ví dụ lấy trên lưới vuông hoặc hình vẽ cụ thể
Tâm của hệ điểm	Trung điểm, trọng tâm (lớp 10)	- Trọng tâm một vật là điểm đặt của trọng lực; phương pháp thực nghiệm để tìm trọng tâm của một tấm bìa phẳng trong vật lí có thể là (1) cân bằng nó trên một diện tích nhỏ (mũi nhọn) hoặc dùng dây treo nó tại 2 điểm để xác định 2 đường thẳng đi qua trọng tâm - Với một vật thể hình đa giác, trọng tâm có thể xác định bằng phương pháp hình học (giao các trọng tuyến) hoặc bằng hệ thức vector
Dạng song tuyến tính đối xứng xác định dương trên không gian vector	Tích vô hướng (lớp 10)	- Dùng để lượng hóa công của một lực - Định nghĩa được bằng hình học: tích độ dài với cosin góc xen giữa - Là chỉ số chỉ báo mức độ vuông góc giữa hai vector đơn vị: càng gần 0 càng gần góc vuông
Tọa độ của vector nhờ định lí biểu diễn vector theo hệ cơ sở	Tọa độ của vector (lớp 10)	Trên một lưới vuông: - Xác định bằng quy tắc chiếu lên hai trục - Chỉ ra sự cùng tọa độ của hai vector bằng nhau
Không gian con liên kết	Vector chỉ phương (lớp 10), cặp vector chỉ phương (lớp 12)	- Ví dụ trên hình vẽ cụ thể - Tương quan không phải là một - một giữa đường thẳng (mặt phẳng) và vector (cặp vector) chỉ phương của nó

3. Kết luận

- Thông qua tiếp cận một số tác phẩm kinh điển, được coi là quan trọng nhất trong quá trình hình thành, phát triển của giải tích vector, bài báo đã đưa ra những nhận định có hệ thống và bằng chứng, căn cứ lịch sử về ý nghĩa thực sự của vector và các khái niệm liên quan trong chương trình toán phổ thông.

Những hiểu biết này, theo lí thuyết tình huống và mô hình năng lực sư phạm đưa ra bởi dự án COACTIV, là hết sức cần thiết đối với người giáo viên Toán nói riêng, cộng đồng giáo dục toán học nói chung.

- Tác giả đã rà soát nội dung một số học phần dành cho sinh viên sư phạm toán (Đại số tuyến tính, Hình học giải tích, Hình học AFIN và hình học Euclid, Hình học xạ ảnh, Hình học sơ cấp) để đưa ra một góc nhìn ở tầm cao, từ tri thức khoa học tới tri thức chương trình về vector.

- Như một khuyến nghị tham khảo, việc tổng hợp nghĩa của tri thức được thể hiện trong lịch sử hình thành phát triển với tri thức khoa học về vector cho phép tác giả đề xuất một số ví dụ tham khảo cho phương án thể hiện tri thức dạy học trong chủ đề vector cho các đồng nghiệp ở trường trung học phổ thông.

Kết quả được trình bày trong bài báo mở ra một chuỗi các vấn đề tương tự, có ý nghĩa, liên quan tới những chủ đề nội dung khác (ở trường phổ thông) là có thể xác định được những nội dung gần gũi, thiết thực nhất giúp cho sinh viên biết rộng, hiểu sâu, có tầm nhìn cao về toán phổ thông cho các học phần toán cơ bản tại trường sư phạm.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Bá Kim, 2017. *Phương pháp dạy học môn Toán*, NXB Đại học Sư phạm, Hà Nội.
- [2] Baumert J., Kunter M., 2013. The COACTIV model of teachers' professional competence, in Cognitive Activation in the Mathematics Classroom and Professional Competence of Teachers. *Mathematics Teacher Education* Vol. 8 (Peter-Koop A., Wilson P., series editor), Springer, pp. 25-48.
- [3] Hamilton R.-H., 1844. On quaternions, *The London, Edinburgh and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Sciences*, Vol. XXV (CLXIII), pp. 10-13.
- [4] Hoàng Xuân Hãn, 1948. *Danh từ khoa học*, Trường Thi xuất bản.
- [5] Crowe M.-J., 1967. *A History of Vector Analysis*, University of Notre Dame Press.
- [6] Florian Cajori (rédacteur), 1962. *Sir Isaac Newton's Mathematical Principles of Natural Philosophy and His System of the World*. University of California Press, 1962.
- [7] Leibniz G.W., 1989. *Studies in Geometry of Situation with a Letter to Christian Huygens*. In: Loemker L.E. (eds.) *Philosophical Papers and Letters*. The New Synthese Historical Library (Texts and Studies in the History of Philosophy), Vol. 2. Springer, Dordrecht.
- [8] Couturat, L., 1901. *La logique de Leibniz*, Paris, pp. 538.
- [9] Cardano Girolamo, 1545. *Ars magna or The Rules of Algebra*. Dover (published 1993).
- [10] Bombelli Rafael, 1572. *L'algebra*, Bologna.
- [11] Möbius, A.-F., 1827. *Der barycentrische Calcul: ein neues Hilfsmittel zur analytischen Behandlung der Geometrie*. Leipzig.
- [12] Grassmann H. G., 1840. *Theorie der Ebbe und Flut. Prüfungsarbeit*. In (Grassmann 1894-1911, III, 1).
- [13] Lagrange J.-L., 1788. *Mécanique Analytique*, Paris: Chez la Veuve Desaint.
- [14] Laplace, P.-S., 1799-1825. Marquis de. *Traité de mécanique céleste*, Paris.
- [15] Grassmann, 1844. *Die Lineale Ausdehnungslehre, ein neuer Zweig der Mathematik* (ed. 2012). Cambridge Library Collection - Mathematics.

- [16] Gibbs, J.-W., 1881 - 1884. *Elements of vector analysis*. Printed by Tuttle, Morehouse & Taylor, New Haven.
- [17] O'Connor J.-J., Robertson E.-F., *Jean Frédéric Frenet*, MacTutor History of Mathematics archive, University of St Andrews, url <http://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Frenet.html>.
- [18] Trần Văn Hạo (tổng chủ biên), Nguyễn Mộng Hy (chủ biên), Nguyễn Văn Đoàn, Trần Đức Huyền, 2012. *Hình học 10*, Sách giáo viên. Nxb Giáo dục Việt Nam.
- [19] Bộ GD&ĐT, 2018. Chương trình Giáo dục Phổ thông môn Toán.
- [20] Nguyễn Minh Hà, 2008. Tích ngoài của hai vectơ. *Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm Hà Nội*, Vol. 53, No. 8, pp 3-10.

ABSTRACT

Mathematics teachers' knowledge necessary for teaching vectors at high schools

Tran Cuong

Faculty of Mathematics, Hanoi National University of Education

This paper aims at applying the concept of didactic transposition proposed in the theory of situations and some recent research outcomes regarding the knowledge model of mathematics teachers for teaching vectors in high schools. History, origin, meaning and roles of knowledge are systematically presented in order to help mathematics teachers acquire a wider knowledge, a deeper understanding, and a higher vision. This is one of the most essential conditions for effective teaching.

Keywords: didactic transposition, content knowledge, pedagogical content knowledge, teaching vector.