

**DAY HỌC KHÁI NIỆM TÍCH PHÂN Ở TRƯỜNG PHỔ THÔNG
TỪ QUAN ĐIỂM LIÊN MÔN TOÁN – VẬT LÝ:
MỘT GIẢI PHÁP GIÚP VƯỢT QUA NHỮNG BẤT CẬP
ĐẶT RA BỞI CÁC CÁCH TIẾP CẬN TRUYỀN THỐNG**

Lê Thị Hoài Châu và Ngô Minh Đức

Khoa Toán – Tin học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh

Tóm tắt. Nghiên cứu của chúng tôi được đặt trong bối cảnh mà các định hướng dạy học tích hợp, liên môn được hướng ứng, vì lợi ích của nó đối với mục tiêu giúp học sinh hiểu và sử dụng tri thức toán vào những vấn đề của thực tế và các khoa học. Trước hết, chúng tôi làm rõ những điểm bất cập của hai cách tiếp cận truyền thống trong việc trình bày khái niệm tích phân ở bậc phổ thông. Phân tích của chúng tôi cho thấy sự cần thiết của việc giới thiệu khái niệm này theo giới hạn của tổng Riemann. Thế nhưng, nó cũng chỉ ra rằng nếu chỉ gắn cách giới thiệu ấy với ngữ cảnh hình học thì chưa đủ. Nhằm đem lại nhiều lợi ích nhất cho việc hiểu khái niệm và giải thích được các ứng dụng của tích phân trong ngữ cảnh ngoài toán học, chúng tôi đề xuất một cách tiếp cận liên môn Toán – Vật lý. Cách tiếp cận này cho phép vượt qua những bất cập đã chỉ ra trong dạy học khái niệm tích phân.

Từ khóa: Tích phân, giới hạn tổng Riemann, liên môn.

1. Mở đầu

Trong dạy học toán, dù bước chuyển từ Số học vào Đại số có làm nảy sinh nhiều sai lầm của học sinh (HS), thì những sai lầm ấy cũng chỉ liên quan đến sự khái quát hoá, còn bản chất hữu hạn và rời rạc của đối tượng vẫn không thay đổi, và do đó phương pháp nghiên cứu không có sự khác biệt. Nhưng bước chuyển từ Đại số vào Giải tích lại hoàn toàn khác. Giải tích nghiên cứu các đại lượng, các quá trình vô hạn, biến thiên liên tục, và phải sử dụng những phương pháp khác hẳn với Đại số, bằng kỹ thuật xấp xỉ, đóng khung (chặn trên, chặn dưới). Nhiều nghiên cứu cho thấy những khái niệm cơ bản của Giải tích (như giới hạn, đạo hàm, tích phân) và kỹ thuật xấp xỉ rất khó hiểu không chỉ với HS phổ thông mà còn cả với sinh viên đại học.

Mặc dù vậy các phép toán lấy giới hạn, tính đạo hàm, tích phân lại có thể được thực hiện theo những quy trình đại số mà không bắt buộc phải hiểu khái niệm một cách đầy đủ. Về điểm này, Doorman và Van Maanen (2008) nhận định: “Giải tích là một trong những chủ đề toán học mà thao tác thuật toán trên các kí hiệu luôn dễ dàng hơn việc hiểu thấu bản chất khái niệm” [1; tr. 4].

Chính hai ghi nhận trên đã dẫn đến một xu hướng khá phổ biến trong dạy học Giải tích ở bậc phổ thông – xu hướng đại số hoá Giải tích. Theo xu hướng này, người ta bỏ qua yêu cầu hiểu khái niệm, chỉ tập trung vào các tính toán đại số (với những quy tắc như kiểu đạo hàm của tổng, hiệu, tích, thương và của hàm hợp), nhằm mục đích tránh cho HS phải đương đầu với những khó khăn của phương pháp giải tích.

Tuy nhiên, xu hướng dạy học này vấp phải sự phê phán của nhiều nhà toán học. Họ cho rằng đây không phải là dạy học Giải tích. Ấy là chưa nói kiểu dạy học này còn dẫn HS đến việc thao tác trên các đối tượng vô hạn như với các đối tượng hữu hạn của Đại số, từ đó phạm phải nhiều sai lầm.

Vậy giải pháp nào có thể giúp vượt qua những vấn đề đặt ra? Trong phần dưới chúng tôi sẽ đề xuất một câu trả lời cho trường hợp khái niệm tích phân.

2. Nội dung nghiên cứu

2.1. Hai cách định nghĩa khái niệm tích phân theo truyền thống và những vấn đề đặt ra

Trình bày khái niệm tích phân như thế nào là một câu hỏi không dễ trả lời, bởi lẽ đây là một khái niệm có nhiều cách hiểu mà thoạt nhìn thì rất khác nhau. Theo truyền thống, người ta tiếp cận khái niệm này bằng một trong hai cách: qua nguyên hàm hoặc qua giới hạn của tổng Riemann. Mỗi cách tiếp cận đều có những hệ lụy của nó.

2.1.1. Định nghĩa khái niệm tích phân qua nguyên hàm

Theo xu hướng đại số hoá giải tích, các sách giáo khoa (SGK) Giải tích lớp 12 sử dụng từ năm 2000 đến nay ở Việt Nam đưa vào khái niệm tích phân theo cách tiếp cận thứ nhất. Lí do giải thích cho sự lựa chọn này là vì cách tiếp cận thứ hai rất khó hiểu đối với HS phổ thông (thậm chí nhiều nhà nghiên cứu như Orton (1983) [2] và Jones (2015b) [3]) còn chỉ ra ngay cả sinh viên đại học cũng gặp khó khăn trong việc hiểu khái niệm tích phân theo giới hạn của tổng Riemann).

Định nghĩa tích phân qua nguyên hàm làm cho việc tính tích phân được đưa về một quy trình dễ hiểu là đảo ngược phép lấy đạo hàm, thế hai cận rồi trừ chúng cho nhau. Nó tránh được những khó khăn khi phải làm việc với đại lượng vô hạn và biến thiên liên tục. Hơn thế, nó còn cho thấy ngay mối quan hệ đảo ngược giữa hai phép tính cơ bản của Giải tích.

Thế nhưng, cùng với những lợi thế trên, cách tiếp cận này làm nảy sinh hai vấn đề:

- Thứ nhất, như đã nói trên, nó đánh mất đặc trưng của Giải tích nói chung, bản chất của khái niệm tích phân nói riêng. Người học có thể thành thạo trong tính toán và giải một số bài toán theo quy trình có sẵn, nhưng chưa hẳn là đã hiểu khái niệm. Zandieh (2000) [4] đã đưa ra thuật ngữ “giả khái niệm” để chỉ hiện tượng này. Còn theo cách nói của Tall (1993) [5] thì việc hạ thấp cách hiểu khái niệm xuống thành các kĩ thuật tính toán đại số là một sự đánh tráo vấn đề trong dạy học Giải tích.

- Thứ hai, nó sẽ khiến người học không nhận ra được những ứng dụng đa dạng của tích phân trong các lĩnh vực ngoài toán học mà ở đó quan hệ giữa tích phân với đạo hàm không tác động. Về điểm thứ hai này chúng tôi sẽ làm rõ ở phần 2.2.

2.1.2. Định nghĩa tích phân theo giới hạn của tổng Riemann với bài toán tính diện tích

Các giáo trình ở trường đại học, thậm chí nhiều SGK phổ thông ở nước ngoài lại chọn cách tiếp cận tích phân qua tổng Riemann trong ngữ cảnh tính diện tích hình thang cong. Cách tiếp cận này hoàn toàn tách biệt khỏi khái niệm đạo hàm. Mối quan hệ giữa tích phân với đạo hàm sẽ được giới thiệu sau đó thông qua định lí cơ bản của Giải tích. Như vậy, với mong muốn giữ lại các kĩ thuật của giải tích và làm cho HS hiểu bản chất của khái niệm, người ta vẫn đặt người học trước những khó khăn. Nhưng cụ thể thì thế nào là hiểu bản chất của khái niệm và khó khăn đó là gì?

Khi phân tích sâu hơn thuộc tính của một khái niệm, Sfard (1991) đưa ra khung *quá trình – đối tượng* để nói về bản chất kép của các khái niệm toán học [6]. Tác giả cho rằng người học trước hết phải thông qua hoạt động để nắm được quá trình mà khái niệm là kết quả. Quá trình này sau đó mới có thể được trừu tượng hoá và kết tinh lại trong bản thân khái niệm đang bàn

đến. Mà mỗi khái niệm toán học lại có thể gắn với những hoạt động khác nhau, với những biểu diễn khác nhau và trong những ngữ cảnh hay phạm vi khác nhau. Như vậy, việc hiểu, cũng như việc dạy học một khái niệm phải được hình thành qua những lớp *quá trình – đối tượng* khác nhau, trong những bối cảnh khác nhau.

Theo quan điểm này, Habineza (2013) [7] và Sealey (2014) [8] đã đưa ra một khung lý thuyết đầy đủ cho khái niệm tích phân (Một khung lý thuyết đầu tiên trên tinh thần này được xây dựng bởi Zandieh (2000) [4] cho khái niệm đạo hàm). Chẳng hạn, qua bảng dưới đây, Habineza (2013) mô tả khung lý thuyết cho khái niệm này trong ngữ cảnh bài toán tìm diện tích dưới đường cong nhằm hướng đến cách hiểu nó như giới hạn của tổng Riemann [7; tr. 45]:

Lớp Quá trình - Đối tượng	Ngữ cảnh: Diện tích dưới một đường cong			
	Các biểu diễn			
	Lời (Vật lý)	Đồ thị - trực quan	Kí hiệu tượng trưng (sự khái quát)	Số (tính toán số)
Phân hoạch				
Lớp tích				
Lớp tổng				
Lớp giới hạn				

Với bảng trên tác giả đã chỉ ra bốn lớp *quá trình – đối tượng* trong cách hiểu về tích phân theo giới hạn tổng Riemann: lớp phân hoạch, lớp tích, lớp tổng và lớp giới hạn. Mỗi ô trống trong bảng hai chiều thể hiện một diện mạo của tích phân ứng với mỗi lớp và dạng biểu diễn theo một ngôn ngữ nào đó. Chẳng hạn với lớp tích, trong biểu diễn đại số là $f(x_i)\Delta x$, còn với biểu diễn hình học (đồ thị) là diện tích một dải hình chữ nhật với các cạnh $f(x_i)$ và Δx .

Như khung lý thuyết của Habineza đã chỉ ra, để hiểu khái niệm người học phải hoạt động với nhiều lớp *quá trình – đối tượng* khác nhau trước khi đi đến kết quả cuối cùng được gắn kết vào một đối tượng là tích phân. Chính bản chất kép *quá trình – đối tượng* này gây khó khăn cho người học trong việc hiểu khái niệm. Người học cần hiểu tích phân như một quá trình gồm nhiều lớp (quan niệm quá trình) trước khi có thể nhận thức nó như một đối tượng (quan niệm cấu trúc), mà muốn vậy lại phải đặt quá trình này vào một ngữ cảnh nào đó. Ngữ cảnh mà Habineza đề xuất có nguồn gốc từ lịch sử hình thành khái niệm tích phân và thường được sử dụng trong các giáo trình đại học. Với ngữ cảnh này, lớp phân hoạch, lớp tích và lớp tổng thực hiện việc xấp xỉ diện tích cần tính bởi các tổng Riemann trước khi lớp giới hạn cho phép có một giá trị được thừa nhận là phản ánh tốt nhất cho diện tích đó. Ta thấy bốn lớp *quá trình – đối tượng* của Habineza phản ánh rõ các kỹ thuật của Giải tích ra sao và việc hiểu chúng không dễ dàng chút nào. Đặc biệt, trong lịch sử, việc hiểu khái niệm tích phân đã gặp phải chướng ngại từ quan niệm về các vô cùng bé hay các vi phân và chúng chỉ được vượt qua với sự ra đời của lý thuyết giới hạn. Thế là, cùng với việc hiểu các lớp quá trình – đối tượng phức tạp nói trên, người học sẽ còn phải đối diện với những chướng ngại gắn với một khái niệm khác - khái niệm giới hạn. Điều này cũng đã được Orton (1983) xác nhận trong công trình nghiên cứu của mình [2].

Tính toán tích phân theo giới hạn của các tổng Riemann rõ ràng là rất khó khăn và tốn nhiều công sức. Chính vì thế nên các nhà toán học mới nghiên cứu những quy tắc tính toán theo kỹ thuật của đại số. Trong dạy học, dù có chọn cách tiếp cận tích phân theo giới hạn của tổng Riemann để làm rõ bản chất của khái niệm và cho người học làm quen với phương pháp Giải tích, thì cuối cùng người ta cũng cần phải đưa vào những quy tắc này. Mối liên hệ giữa hai phép tính đạo hàm và tích phân sẽ phải được khai thác. Một khó khăn khác nảy sinh ở đây: chúng ta muốn giới thiệu cho người học tổng Riemann và giải thích kí hiệu $\int f(x)dx$ như một tổng của 108

các tích, nhưng trong thực hành lại luôn tính nó theo quy trình tìm nguyên hàm (vốn chẳng liên quan đến một tổng nào cả). Nói cách khác, nếu dạy tích phân theo giới hạn tổng Riemann thì ta lại gặp khó khăn trong việc gắn kết nó với phép toán ngược – phép lấy đạo hàm. Vấn đề cần giải quyết là làm thế nào để chỉ cho người học thấy sự tương đương của hai cách tính toán, một theo giới hạn tổng Riemann và một theo nguyên hàm. Như vậy, việc sử dụng bài toán tìm diện tích hình thang cong mặc dù có thể làm xuất hiện nhu cầu tính giới hạn của các tổng và đem đến ý nghĩa hình học cho tích phân, nhưng lại không giúp người học nhận ra mối quan hệ của tích phân với đạo hàm. Thật khó làm cho họ hiểu tại sao lại có thể dùng nguyên hàm để tính diện tích nếu không đưa vào định lý cơ bản của Giải tích về mối liên hệ giữa đạo hàm và tích phân. Mà việc chứng minh chặt chẽ định lý này thì rất khó và cần nhiều nỗ lực vốn không phù hợp với dạy học ở phổ thông.

2.2. Vấn đề sử dụng tích phân trong ngữ cảnh ngoài toán học

Những nghiên cứu của Bezuidenhout và Olivier (2000) [9], Jones (2015a) [10], và Jones (2015b) [3] đã chỉ ra rằng với các cách tiếp cận truyền thống người học thường chỉ sở hữu một cách hiểu hạn chế về khái niệm tích phân. Kiến thức điển hình mà họ biết thường gói gọn trong những quy trình tính toán theo hiệu giá trị nguyên hàm hoặc theo ý nghĩa hình học như là diện tích của một hình dưới đường cong.

Nhiều HS đã từng tự hỏi: tại sao lại phải học tích phân (cũng như học các khái niệm giới hạn, đạo hàm)? Để tính diện tích (và thể tích)? Nhưng những bài tập quen thuộc gặp trong SGK chỉ là những bài toán toán học thuần túy, phục vụ cho mục đích thi cử, và hầu như họ không gặp trong cuộc sống. Đây lại là một bằng chứng nữa cho thấy so với định nghĩa tích phân qua nguyên hàm thì việc giới thiệu khái niệm này theo giới hạn tổng Riemann sẽ thoả đáng hơn, khi mà trong thực tế nói chung là người ta không có sẵn hệ trục tọa độ và phương trình biên của hình phẳng cần tính diện tích. Tư tưởng xấp xỉ bằng việc chia nhỏ, lập tổng mới là quan trọng.

Nhưng dù vậy thì tiếp cận tích phân qua giới hạn của tổng Riemann trong ngữ cảnh tính diện tích vẫn là chưa đủ, vì ứng dụng của tích phân rất đa dạng, có thể tìm thấy trong nhiều lĩnh vực của khoa học và thực tiễn. Vì lẽ đó việc dạy học không thể chỉ tập trung vào mục tiêu tính toán mà bỏ qua cơ hội cho người học thấy những ứng dụng hiệu quả của tích phân. Do khuôn khổ có hạn của bài báo, trong phần dưới chúng tôi chỉ bàn về việc làm sao để HS có thể sử dụng tích phân vào nghiên cứu Vật lí. Cụ thể hơn, chúng tôi sẽ phân tích xem cách hiểu nào về tích phân sẽ hữu ích cho việc sử dụng nó trong Vật lí – nói chính xác là Vật lí dạy ở trường phổ thông.

Cách hiểu tích phân theo nguyên hàm cho thấy ngay mối quan hệ đảo ngược giữa tích phân với đạo hàm. Vì lẽ đó, ứng với mỗi bài toán Vật lí có thể giải bằng cách áp dụng đạo hàm – chúng tôi gọi là bài toán thuận – luôn có thể đặt ra một bài toán ngược lại – gọi là bài toán nghịch, ở đó tích phân mang lại một công cụ giải quyết. Chẳng hạn như vì vận tốc được tính bằng cách lấy đạo hàm hàm số quãng đường nên có thể xác định quãng đường bằng cách lấy tích phân hàm vận tốc trong khoảng thời gian chuyển động (Với điều kiện hàm vận tốc $v(t)$ phải luôn dương trong khoảng thời gian này, nếu không đại lượng tính được là độ dời chứ không phải quãng đường), hay gia tốc có thể tính được bằng cách lấy đạo hàm hàm vận tốc nên khi biết hàm gia tốc thì lại có thể dùng tích phân để tìm vận tốc, v.v... Tuy nhiên quan niệm này về tích phân chỉ đem lại một số ứng dụng hạn chế (ứng với các bài toán thuận giải được nhờ đạo hàm). Thực ra thì trong nhiều tình huống khác, mặc dù không có một mối quan hệ đảo ngược như vậy, tích phân vẫn được sử dụng. Đơn cử như bài toán xác định công của lực biến đổi.

Đối với cách hiểu tích phân như diện tích dưới đường cong, nghiên cứu của Thompson và Silverman (2008) [11], rồi của Jones (2015a) [10] đã cho thấy là nó không đủ để giải thích những ứng dụng của tích phân trong ngữ cảnh ngoài toán học. Họ đã chỉ ra rằng trong những bài

toán xác định các đại lượng Vật lí dựa trên đồ thị, người học thường không nhận ra được diện tích dưới đường cong biểu diễn cho đại lượng Vật lí nào.

Trong nhiều vấn đề của Vật lí mà có sử dụng công cụ tích phân, phương pháp giải quyết thường vẫn là lấy tổng các lượng nhỏ gia tăng tạo thành từ các tích. Do đó, có một sự đồng thuận chung đến từ nhiều nhà nghiên cứu, với ý kiến cho rằng để có thể hiểu được những ứng dụng đa dạng của tích phân trong Vật lí thì người học phải sở hữu quan niệm về tích phân theo giới hạn tổng Riemann. Một số tác giả đưa ra những cách diễn đạt khác nhau nhằm làm “mềm hóa” hơn định nghĩa chặt chẽ xuất hiện trong các giáo trình đại học. Jones (2015a) diễn đạt quan niệm về tích phân như một hành động “cộng dồn vào các mẫu nhỏ” [10]. Tương tự, Thompson và Silverman (2008) đưa ra một mô hình trong đó tích phân được hiểu như sự “tích lũy” các lượng nhỏ tạo thành từ tích hai đại lượng [11]. Còn theo phát biểu của Meredith và Marrongelle (2008) thì tích phân “*phải được nhìn nhận như việc cộng lại những tác động vi phân Vật lí để đạt được tác động Vật lí tổng cộng*” [12; tr. 576]. Những cách hiểu như vậy rõ ràng là không thể đạt được từ định nghĩa tích phân theo khái niệm nguyên hàm. Cách định nghĩa theo giới hạn tổng Riemann trong ngữ cảnh tính diện tích tạo thuận lợi cho cách hiểu trên, nhưng rõ ràng là chưa đủ để người học nhận ra những ứng dụng đa dạng của tích phân trong Vật lí.

2.3. Một giải pháp vượt qua những vấn đề đặt ra từ hai cách tiếp cận truyền thống

Hai vấn đề chính cần giữ lại từ các phân tích trên. Thứ nhất, nên cho HS tiếp cận khái niệm tích phân theo tổng Riemann nếu muốn họ hiểu bản chất của khái niệm và làm quen với các kĩ thuật của Giải tích. Sự cần thiết của kĩ thuật này vượt ra khỏi phạm vi Toán học. Thứ hai, cũng vì để hiểu và sử dụng khái niệm đang bàn đến nên việc giới thiệu tích phân qua ngữ cảnh hình học là chưa đủ. Ngữ cảnh này mang lại ý nghĩa hình học cho tích phân (diện tích dưới đường cong) và làm xuất hiện đầy đủ bốn lớp quá trình – đối tượng (phân hoạch, tích, tổng, giới hạn). Tuy nhiên nó không giúp giải quyết được hai vấn đề:

- HS không thấy được mối liên hệ giữa tích phân với đạo hàm.
- HS gặp khó khăn khi sử dụng phương pháp lập tổng Riemann trong những ngữ cảnh ứng dụng khác ngoài hình học. Ở đây, như nghiên cứu của Jones et al. (2017) [13] và Sealey (2006) [14] đã chỉ ra, HS thường có xu hướng xem việc lập tổng Riemann chỉ như một quy trình tính toán diện tích, thay vì như một nguồn tiềm năng cho việc hiểu được bản chất khái niệm và vận dụng được nó trong những ngữ cảnh khác.

Từ những phân tích trên chúng tôi cho rằng để vượt qua những vấn đề đặt ra bởi hai cách tiếp cận truyền thống về tích phân, cần phải xem xét khái niệm này theo quan điểm liên môn trong dạy học.

Thực ra thì khó khăn của HS trong việc nhận ra vai trò công cụ của tích phân không đến từ sự thiếu hụt kiến thức toán hay Vật lí, mà là từ dạng kiến thức “cô lập” do việc dạy học đã hình thành cho họ. Chẳng hạn, một phân tích các SGK hiện hành do chúng tôi (Ngô Minh Đức, 2017 [15]) thực hiện trước đây đã chỉ ra rằng trong khi phương pháp lập tổng Riemann đã xuất hiện trong các SGK Vật lí lớp 10, 11 (ban nâng cao) để giải quyết bài toán tính quãng đường và công, thì tích phân trình bày ở SGK toán 12 lại chỉ được định nghĩa theo hiệu giá trị của nguyên hàm. Điều này cho thấy đã có một sự ghép đôi không tương xứng giữa cái được dạy về tích phân trong thể chế dạy học toán và cái thật sự có ích nhất với người học trong việc ứng dụng nó vào Vật lí nói riêng, vào các ngữ cảnh thực tế nói chung. Như vậy, với việc không tính đến quan điểm tích hợp – liên môn như xu hướng đổi mới dạy học hiện nay thường nói đến, sự lựa chọn của thể chế dạy học toán ở phổ thông đã che dấu đi những ứng dụng hiệu quả của tích phân trong các khoa học khác, đặc biệt là Vật lí.

Theo quan điểm dạy học liên môn Toán - Vật lí thì ngoài những mục tiêu trong nội bộ môn toán, việc dạy học toán cần phải tính đến mục đích cung cấp các khái niệm, ý tưởng,

phương pháp là công cụ giải quyết các vấn đề của Vật lí. Ngược lại, Vật lí cung cấp những tình huống là động lực hình thành và đưa đến cho khái niệm toán học những ý nghĩa cụ thể trong mỗi ngữ cảnh ứng dụng. Nhờ sự gắn kết liên môn này mà những hiểu biết từ Vật lí thậm chí có thể quay trở lại giúp người học thấu hiểu hơn các kiến thức toán học vốn trừu tượng và thường đòi hỏi chứng minh chặt chẽ.

2.3.1. Khung lí thuyết cho khái niệm tích phân trong ngữ cảnh vật lí

Tán thành lựa chọn đưa khái niệm tích phân vào qua giới hạn của tổng Riemann, chúng tôi sử dụng khung lí thuyết tham chiếu của Habineza (2013) [7]. Tuy nhiên, chúng tôi không gắn khung lí thuyết này với ngữ cảnh hình học “tích diện tích” mà là ngữ cảnh Vật lí.

Cần phải nói là khá nhiều ứng viên (thuộc chương trình Vật lí dạy ở bậc phổ thông) có thể được lựa chọn để vận dụng khung lí thuyết này. Chẳng hạn như các bài toán tìm quãng đường, công của lực đàn hồi, công của khí lí tưởng, công của lực hấp dẫn và lực điện. Để giải quyết các bài toán ấy, SGK Vật lí sử dụng phương pháp chia nhỏ, lập tích để tính gần đúng đại lượng trên các khoảng nhỏ rồi lập tổng, và cuối cùng ngầm ẩn dùng khái niệm giới hạn để suy ra rằng đại lượng Vật lí cần tính bằng diện tích của hình phẳng dưới đồ thị. Các đại lượng Vật lí vừa nói đều sở hữu hai điều kiện. Một là chúng đều liên quan đến một quan hệ nhân nào đó, chẳng hạn quãng đường bằng tích của vận tốc và thời gian, hay công là tích giữa lực và quãng đường dịch chuyển,... Hai là những đại lượng này thỏa mãn tính chất cộng tính, chẳng hạn quãng đường cần tính bằng tổng các quãng đường nhỏ trên từng khoảng thời gian. Hai đặc trưng này mang lại thuận lợi cho việc tiếp cận tích phân theo khung lí thuyết của Habineza (2013). Chúng còn cho thấy tầm quan trọng của lớp tổng và lớp tích nói riêng cũng như cách hiểu tích phân theo cấu trúc tổng Riemann nói chung trong việc dạy học khái niệm tích phân với tinh thần quan tâm đến những ứng dụng của nó trong Vật lí và thực tiễn.

Trong các ứng viên nói trên, chúng tôi chọn bài toán “tính quãng đường chuyển động” (Tính quãng đường vật chuyển động với hàm số vận tốc và khoảng thời gian cho trước) và xây dựng một khung lí thuyết cho khái niệm tích phân đặt trong ngữ cảnh của bài toán Vật lí vừa nói.

Bảng 1. Khung lí thuyết của tích phân trong ngữ cảnh Vật lí

Lớp Đối tượng-quá trình	Ngữ cảnh: Tìm quãng đường chuyển động với hàm vận tốc và khoảng thời gian cho trước			
	Các biểu diễn			
	Vật lí	Đồ thị - trực quan	Kí hiệu tượng trưng (Sự khái quát)	Số (tính toán số)
Lớp phân hoạch	Chia thành các khoảng thời gian nhỏ		Δt	Δt nhỏ
Lớp tích	Quãng đường xấp xỉ trong từng khoảng thời gian nhỏ	Diện tích hình chữ nhật với hai cạnh là $v(t)$ và Δt	$v(t) \cdot \Delta t$	
Lớp tổng	Quãng đường xấp xỉ trong tổng thời gian	Tổng diện tích các hình chữ nhật nhỏ	$\sum_{i=1}^n v(t) \cdot \Delta t$	Tổng gần đúng
Lớp giới hạn	Quãng đường chính xác	Diện tích hình dưới đồ thị hàm số vận tốc	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n v(t) \cdot \Delta t$	Tổng gần đúng với sai số cho phép

Có ba lí do khiến chúng tôi muốn tận dụng bài toán nói trên.

Thứ nhất, tính quãng đường khi vận tốc không đổi là một kiểu nhiệm vụ quen thuộc với HS ngay từ tiểu học. Trong trường hợp này, nếu đặt trong hệ trục tọa độ thì hàm vận tốc có đồ thị là đường thẳng song song với trục hoành (biểu thị thời gian), và theo công thức đã biết ($S = v \cdot t$) ta có thể cho HS liên hệ ngay quãng đường với diện tích hình chữ nhật. Cách nhìn này sau đó được vận dụng để nghiên cứu trường hợp vận tốc biến đổi theo một hàm số $v(t)$, tất nhiên là với phương pháp mới, phương pháp xấp xỉ. Cụ thể, để tính gần đúng quãng đường, người ta chia thời gian chuyển động thành những khoảng nhỏ Δt mà ở đó có thể xem vận tốc là không đổi để áp dụng công thức $S = v \cdot t$, trước khi lấy tổng tất cả những quãng đường nhỏ này với nhau. Một giá trị tốt nhất có thể đạt được từ quá trình lấy giới hạn các tổng vừa lập khi khoảng thời gian Δt ngày càng nhỏ (tiến về không). Như vậy ở đây đã xuất hiện đầy đủ bốn lớp *quá trình – đối tượng* mà cuối cùng kết tinh lại trong cái gọi là tích phân. Ngữ cảnh Vật lí này đem lại một lí do cho sự xuất hiện quan niệm giới hạn tổng Riemann khi nó đóng vai trò là công cụ giải quyết vấn đề. Nó được kết thúc bởi việc đưa vào khái niệm tích phân.

Thứ hai, như khung của chúng tôi đã chỉ ra, quá trình giải bài toán “tính quãng đường chuyển động” cho phép thiết lập một sự chuyển đổi giữa nhiều biểu diễn khác nhau của khái niệm tích phân. Cụ thể, ứng với biểu diễn hình học trên đồ thị thì việc nhân vận tốc với khoảng thời gian Δt trong lớp tích chính là diện tích hình chữ nhật có kích thước là hai đoạn thẳng biểu thị hai đại lượng này. Sự chuyển đổi từ biểu diễn Vật lí sang biểu diễn hình học sẽ giúp nối kết quãng đường với diện tích dưới đường cong hàm số vận tốc và mang lại nghĩa hình học cho khái niệm tích phân mà giáo viên sẽ chế hoá sau đó.

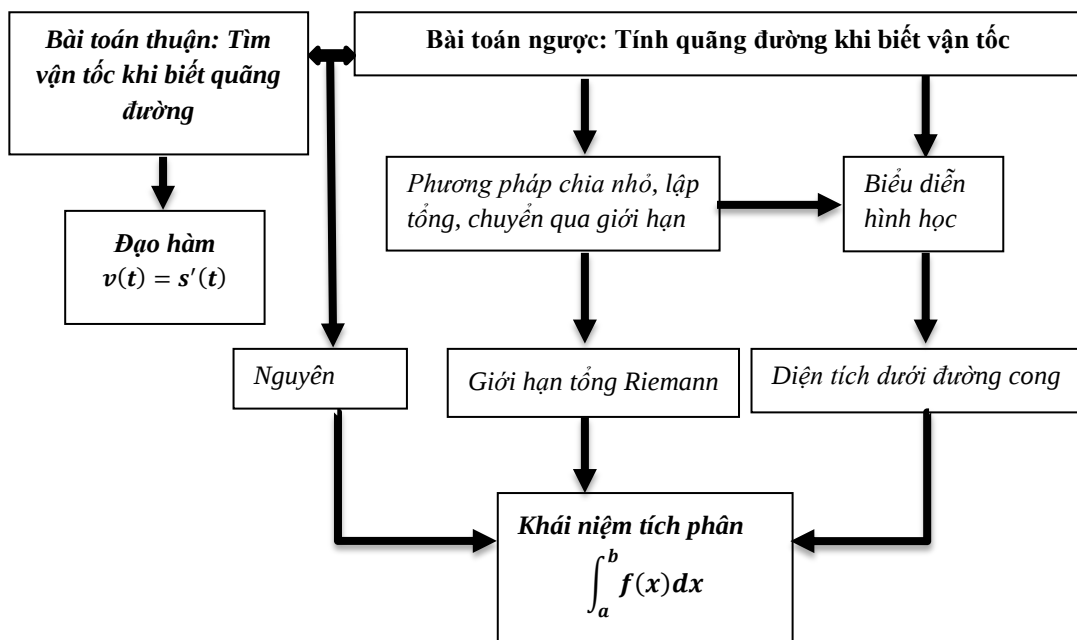
Cuối cùng, tình huống do chúng tôi đề xuất giúp vượt qua khó khăn lớn nhất khi dạy tích phân theo giới hạn tổng Riemann trong ngữ cảnh bài toán tính diện tích. Nó có thể giúp gọi ra mối quan hệ đảo ngược giữa tích phân và đạo hàm từ cách hiểu Vật lí. Cụ thể là trước đó HS đã biết công thức $v(t) = s'(t)$ cho phép sử dụng đạo hàm để giải quyết bài toán tìm vận tốc tức thời khi biết hàm số quãng đường. Từ đó ta có thể giúp HS nhận ra rằng để tính quãng đường khi biết hàm vận tốc cần thì cần tìm cách thực hiện phép toán ngược với đạo hàm. Sự liên kết giữa ghi nhận này với kết quả giải quyết bài toán nói trên sẽ tạo cơ hội đưa vào công thức Newton – Leibniz phản ánh mối quan hệ đảo ngược giữa đạo hàm và tích phân.

2.3.2. Sơ đồ tóm tắt chuỗi tình huống dạy học khái niệm tích phân trong ngữ cảnh Vật lí

Trong ngữ cảnh Vật lí đã đề xuất, và trong mối liên hệ với việc trình bày khái niệm đạo hàm ở trước, chúng tôi dùng sơ đồ Hình 1 để mô tả tóm tắt chuỗi tình huống dạy học tích phân có thể được xây dựng.

Theo sơ đồ này, xuất phát từ cùng một bài toán Vật lí – tìm quãng đường khi biết vận tốc – ta có thể đưa vào ba chiến lược khác nhau để giải quyết:

- Qua nguyên hàm: Tìm lại hàm số quãng đường $s(t)$ từ hàm số vận tốc $v(t)$ bằng cách đảo ngược phép lấy đạo hàm.
- Qua giới hạn tổng Riemann: Chia nhỏ khoảng thời gian, lập tích $v(t) \cdot \Delta t$, lập tổng Riemann rồi tìm giới hạn của tổng này khi $\Delta t \rightarrow 0$.
- Qua diện tích: Quãng đường đi được bằng diện tích hình phẳng dưới đồ thị hàm số vận tốc.
- Sơ đồ Hình 1 cho thấy ngữ cảnh mà chúng tôi lựa chọn là cơ hội để liên kết các cách hiểu khác nhau của tích phân. Phương pháp chia nhỏ, lập tích, tổng và chuyển qua giới hạn sau đó có thể áp dụng trở lại trong nhiều ngữ cảnh khác của Vật lí. Phương pháp này sẽ giải thích cho người học hiểu được những ứng dụng rộng rãi của tích phân trong Vật lí để tính toán nhiều đại lượng, như khối lượng, xung lực, thông lượng, năng lượng, công, áp lực, quãng đường hay vận tốc...



Hình 1. Sơ đồ tiếp cận khái niệm tích phân trong ngữ cảnh Vật lí

Vai trò của cách hiểu tích phân theo giới hạn tổng Riemann là giúp HS nhận ra những ngữ cảnh nào cần sử dụng đến công cụ tích phân, còn việc tính toán nó thì có thể sử dụng nguyên hàm hay diện tích cho thuận tiện. Như vậy, ngữ cảnh do chúng tôi đề xuất giúp hiểu bản chất của tích phân, làm quen với kỹ thuật nghiên cứu Giải tích, nhận ra ứng dụng đa dạng của khái niệm trong Vật lí, nghĩa là cho phép vượt qua những vấn đề mà hai cách tiếp cận truyền thống đặt ra.

3. Kết luận

Nghiên cứu của chúng tôi đã chỉ ra một quy trình cần đảm bảo để việc dạy học tích phân ở trường phổ thông có thể mang lại nhiều lợi ích nhất cho cả toán học và các khoa học khác mà đặc biệt là Vật lí. Đó là phải đưa vào cách hiểu tích phân theo giới hạn tổng Riemann với một sự nhấn mạnh vào lớp tích và lớp tổng. Ý nghĩa thật sự của cách hiểu tích phân là tư tưởng về phương pháp kèm theo (chia nhỏ, lập tổng Riemann, rồi xấp xỉ đại lượng cần tìm) và vai trò của phương pháp này trong việc giải thích các ứng dụng hiệu quả của tích phân với nhiều ngữ cảnh. Ý nghĩa này không được hình thành với cách định nghĩa tích phân qua nguyên hàm (làm mất đi bản chất của Giải tích), và chỉ đạt được một phần với cách đưa khái niệm vào qua bài toán “tính diện tích hình thang cong” (giới hạn vai trò công cụ của tích phân trong nội tại toán học). Phân tích của chúng tôi cũng chỉ ra những khó khăn phải đối mặt khi đi theo các cách tiếp cận truyền thống ở trường phổ thông.

Nhằm vượt qua những khó khăn và khiếm khuyết của hai cách trình bày tích phân theo truyền thống, chúng tôi đã chỉ ra một cách tiếp cận khái niệm với quan điểm liên môn toán – Vật lí, thông qua ngữ cảnh bài toán “tính quãng đường chuyển động”. Thực ra thì một vài giáo trình Giải tích của các tác giả khác cũng đã sử dụng bài toán tìm quãng đường để giới thiệu khái niệm tích phân thông qua các tính toán trên dữ liệu số (Finney et al., 2012 [16]; McCallum et al., 2012 [17]). Đóng góp mới của chúng tôi là kết hợp giải quyết hai bài toán thuận nghịch giữa quãng đường và vận tốc để hình thành nên mối quan hệ đảo ngược giữa đạo hàm và tích phân. Điều này giúp HS thấy được sự tương đương của hai cách tính tích phân, một theo phương pháp

chia nhỏ lập tổng và lấy giới hạn, một theo phép toán nguyên hàm, khi cả hai phương pháp này cùng giúp tìm ra quãng đường chuyển động của vật. Việc tiếp cận khái niệm tích phân nhờ vào sự gắn kết liên môn giữa Toán và Vật lý cho phép kết nối những cách hiểu khác nhau của tích phân. Thêm vào đó, nó giúp người học thấy được khả năng ứng dụng đa dạng của tích phân vào các bài toán của thực tiễn và khoa học bên ngoài ngữ cảnh toán học. Tuy nhiên cũng cần phải nói rõ thêm là cách tiếp cận này không đưa ra được một chứng minh thuần túy toán học cho định lý cơ bản của Giải tích về mối quan hệ giữa đạo hàm và tích phân. Thực ra nó chỉ sử dụng phiên bản Vật lý của mối quan hệ đảo ngược này nhằm đem lại một quan niệm đầy đủ hơn cho HS theo một cách “mềm hóa” nhằm tránh đi những khó khăn đến từ phép chứng minh toán học nghiêm ngặt.

Tất nhiên, để HS lĩnh hội được những cách hiểu khác nhau về tích phân từ ngữ cảnh Vật lý này thì cần phải xây dựng các tình huống thích hợp để làm xuất hiện ba chiến lược giải tương ứng như chúng tôi đã chỉ ra ở trên: Chiến lược lập tổng Riemann, chiến lược diện tích dưới đường cong và chiến lược tìm nguyên hàm. Một dãy tình huống dạy học khái niệm tích phân trong sự gắn kết liên môn toán – Vật lý đã được chúng tôi xây dựng và triển khai thực nghiệm. Do khuôn khổ có hạn của mỗi công bố trên Tạp chí, chúng tôi sẽ giới thiệu thực nghiệm đó trong một bài báo tiếp theo như sự tiếp nối hợp lý cho hướng nghiên cứu này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Doorman, M., & Van Maanen, J., 2008. *A historical perspective on teaching and learning calculus*. Australian Senior Mathematics Journal, 22(2), 4.
- [2] Orton, A., 1983b. *Students' understanding of integration*. Educational studies in mathematics, 14(1), 1-18.
- [3] Jones, S. R., 2015b. *The prevalence of area-under-a-curve and anti-derivative conceptions over Riemann sum-based conceptions in students' explanations of definite integrals*. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 46(5), 721-736.
- [4] Zandieh, M., 2000. *A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative*. CBMS Issues in Mathematics Education, 8, 103-127.
- [5] Tall, D., 1993. *Students' difficulties in calculus*. In proceedings of working group (Vol. 3, pp.13-28).
- [6] Sfard, A., 1991. *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin*. Educational studies in mathematics, 22(1), 1-36.
- [7] Habineza, F., 2013. *A case study of analyzing student teachers' concept images of the definite integral*. Rwandan Journal of Education, 1(2), 38-54.
- [8] Sealey, V., 2014. *A framework for characterizing student understanding of Riemann sums and definite integrals*. The Journal of Mathematical Behavior, 33, 230-245.
- [9] Bezuidenhout, J., & Olivier, A., 2000, July. *Students' conceptions of the integral*. In PME CONFERENCE (Vol. 2, pp. 2-73).
- [10] Jones, S. R., 2015a. *Areas, anti-derivatives, and adding up pieces: Definite integrals in pure mathematics and applied science contexts*. The Journal of Mathematical Behavior, 38, 9-28.
- [11] Thompson, P. W., & Silverman, J., 2008. *The concept of accumulation in calculus*. Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics, 73, 43-52.

- [12] Meredith, D. C., & Marrongelle, K. A., 2008. *How students use mathematical resources in an electrostatics context*. American Journal of Physics, 76(6), 570-578.
- [13] Jones, S. R., Lim, Y., & Chandler, K. R., 2017. *Teaching integration: How certain instructional moves may undermine the potential conceptual value of the Riemann sum and the Riemann integral*. International Journal of Science and Mathematics Education, 15(6), 1075-1095.
- [14] Sealey, V., 2006. *Definite integrals, Riemann sums, and area under a curve: What is necessary and sufficient?* In Proceedings of the 28th annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (Vol. 2, No. 1991, pp. 46-53).
- [15] Ngô Minh Đức, 2017. *Xem xét sự chuyển hóa sự phạm khái niệm tích phân trong sự gắn kết với Vật lí ở trường phổ thông Việt Nam*. Hội thảo quốc tế về Didactic toán lần thứ 6, 103-112.
- [16] Finney, R. L., Demana, F. D., Waits, B. K., Kennedy, D., & Bressoud, D. M., 1994. *Calculus: Graphical, numerical, algebraic* (p. 799). New York: Addison-Wesley.
- [17] McCallum, W. G., Hughes-Hallett, D., Gleason, A. M., Mumford, D., Osgood, B. G., Tecosky-Feldman, J.,... & Lock, P. F., 2012. *Calculus: multivariable*. John Wiley.

ABSTRACT

Teaching concept of integral in high school from the perspective of interdisciplinary mathematics and physics:

A solution to overcome the disadvantages posed by traditional approaches

Le Thi Hoai Chau and Ngo Minh Duc

Faculty of Mathematics and Computer Science, Ho Chi Minh City University of Education

Our research is set in the context that the perspective of integrated and interdisciplinary teaching is applied, for the sake of helping students to understand and apply mathematics knowledge in real life and science problems. First of all, we highlight the disadvantages of two traditional approaches in presenting the concept of integral in high school. Our analysis shows that the necessity of introducing the integral concept as the limit of Riemann sums. Furthermore, it also indicates that it is not sufficient to attach that introduction with geometric context. In order to bring more benefits of understanding concepts and explaining applications of integral in non-mathematics context, we propose an interdisciplinary Mathematics and Physics approach. This approach allows to overcome these disadvantages pointed out in teaching the concept of integral.

Keywords: Integral, the limit of Riemann sum, interdisciplinary.