

## ĐẶC TRƯNG HÌNH HỌC CỦA DIỆN TÍCH VÀ BÀI TOÁN CẮT GIẤY Ở TIỂU HỌC

Trần Đức Thuận

*Khoa Giáo dục Tiểu học, Trường Đại học Sư phạm Thành phố Hồ Chí Minh*

**Tóm tắt.** Những nghiên cứu trước đây đã chỉ ra diện tích của một hình có hai đặc trưng là hình học và số. Đối với bài toán cắt giấy thành các hình vuông ở lớp 4, cách giải ưu tiên là tính tỉ số diện tích các hình. Bài toán trở nên phức tạp hơn khi thay hình vuông bởi hình chữ nhật. Kết quả không phù hợp xuất hiện khi thiếu quan tâm đến đặc trưng hình học của diện tích. Dựa vào lí thuyết đồng dư, bài báo đề xuất thuật toán tìm kiếm phương án tối ưu cho bài toán cắt một mảnh giấy hình chữ nhật có kích thước  $a \times b$  thành các hình chữ nhật có kích thước  $c \times d$  trong trường hợp các đường cắt song song với các mép giấy. Từ bài toán cắt giấy ở trường hợp tổng quát hơn, ta có thể nhận ra đặc trưng hình học của khái niệm diện tích cần được quan tâm hơn trong dạy học ở tiểu học.

**Từ khóa:** Bài toán cắt giấy, diện tích, hình học, tiểu học.

### 1. Mở đầu

Khái niệm diện tích nhận được sự quan tâm của nhiều nhà nghiên cứu. Ở nước ngoài, các tác giả P. M. Baltar [1; tr. 80-81], M. J. Perrin-Glorian [2; tr. 32-35], A. Pressiat [3] đã có những nghiên cứu tri thức luận về khái niệm diện tích. Theo đó, khái niệm diện tích cần được phân biệt ở ba phương diện: phương diện hình học với các hình dạng, phương diện số với các số đo, phương diện đại lượng với các lớp tương đương. Phương diện đại lượng khác biệt với phương diện hình học và phương diện số. Cụ thể, hai hình có hình dạng khác nhau vẫn có thể có cùng diện tích và số đo diện tích của một hình thay đổi khi thay đổi đơn vị đo. Tuy nhiên, nếu ta chọn trước một đơn vị đo (ta thường chọn hình vuông làm đơn vị đo diện tích, nhưng về mặt lí thuyết có thể chọn một hình bất kì) và đồng nhất diện tích với số đo thì hai phương diện còn lại tạo thành đặc trưng hình học và đặc trưng số của khái niệm diện tích. Từ thời cổ đại, Euclid đã xây dựng hệ thống các mệnh đề hình học cho phép so sánh diện tích các hình đa giác, dựng hình vuông có cùng diện tích với hình đa giác cho trước dựa trên đặc trưng hình học của diện tích, kĩ thuật tách - ghép hình, không cần sử dụng các công thức hoặc tính toán ra số. Tuy nhiên, khái niệm diện tích của một hình bất kì chỉ được định nghĩa gắn với số qua hàm độ đo phù hợp từ thế kỉ XIX. Khi diện tích được định nghĩa gắn với số, tác giả V. Céli [4] cho rằng các qui tắc, công thức tính diện tích có vai trò cầu nối giữa hình học và số. Kết quả nghiên cứu của M. J. Perrin-Glorian cho rằng sự nhầm lẫn giữa độ dài, chu vi và diện tích có thể bắt nguồn từ việc đồng nhất quá sớm các đại lượng hình học như độ dài, diện tích với số, bỏ qua đặc trưng hình học của các đại lượng này. Kĩ thuật tách - ghép được tác giả Nguyễn Thị Xuân [5] sử dụng để giải bài toán cầu phương hình chữ thập cho trước, được tác giả Nguyễn Thị Kim Thoa [6] khai thác khi minh họa

hoạt động dạy học qui tắc tính diện tích hình tròn. Những bài báo đã công bố cho thấy bên cạnh đặc trưng số, đặc trưng hình học có ý nghĩa quan trọng trong việc dạy học, giải toán liên quan đến diện tích.

Nhằm bồi dưỡng, phát triển năng lực vận dụng toán học vào thực tiễn, năng lực thu thập và xử lý thông tin toán học, năng lực giải toán cho học sinh tiểu học, tác giả Nguyễn Tiến Trung [7] giới thiệu một số bài toán có nội dung hình học, đại lượng và đo đại lượng, thời gian, phép chia hết... Bài toán thực tiễn đầu tiên cho thấy nếu chỉ thay số vào các công thức tính diện tích, bỏ qua các hình vẽ minh họa thì kết quả có thể không phù hợp. Cụ thể:

**Bài toán 1.** Để chuẩn bị cho chương trình khai giảng, chào mừng năm học mới, cô giáo có một yêu cầu dành cho các nhóm học sinh như sau: Mỗi nhóm sẽ có một nửa tờ giấy A0 màu đỏ, với kích thước là  $40 \times 60$  cm. Hãy cắt tờ giấy A0 đã cho thành các lá cờ hình chữ nhật nhỏ với kích thước là  $9 \times 12$  cm sao cho được nhiều lá cờ nhất. [7; tr. 38].

Tác giả Nguyễn Tiến Trung đã giới thiệu hai cách giải bài toán trên. Cách đầu tiên là vẽ 4 hình minh họa (phương diện hình học) với phương án tốt nhất cắt được 21 lá cờ. Cách thứ hai gắn diện tích với số, tính tỉ lệ diện tích ra được 22 lá cờ. Tác giả nhận xét “có thể có được hình tối đa như vậy nhưng lại không cắt được số hình như tính toán!” [7; tr. 39]. Sự mâu thuẫn giữa kết quả tính toán và phương án tốt nhất chưa được giải thích đầy đủ, chưa làm rõ lí do tại sao chỉ minh họa với 4 trường hợp và không thể cắt được lá cờ thứ 22 trong bài báo. Ngoài 4 trường hợp được minh họa trong bài báo của tác giả Nguyễn Tiến Trung, tồn tại hay không phương án cho phép cắt được lá cờ thứ 22?

Dựa vào đặc trưng kép (hình học và số) của khái niệm diện tích, bài báo này làm rõ nguyên nhân dẫn đến kết quả khác biệt khi tính theo cách thứ hai (tính tỉ lệ diện tích) và tìm kiếm điều kiện thực hiện thành công theo bài toán, giúp các giáo viên tiểu học có được cái nhìn khái quát và sâu sắc hơn về bài toán liên quan đến diện tích, rút gọn quá trình mò mẫm, thử sai qua các hình vẽ minh họa.

## 2. Nội dung nghiên cứu

### 2.1. Bài toán cắt giấy, lát gạch trong sách giáo khoa Toán cấp tiểu học

Kết quả nghiên cứu bộ sách giáo khoa Toán cấp tiểu học Việt Nam hiện hành cho thấy bài toán cắt cờ mà tác giả Nguyễn Tiến Trung đã giới thiệu có dạng tương tự với bài toán cắt giấy, lát gạch trong các sách giáo khoa Toán 4 [8], Toán 5 [9] hiện hành. Tuy nhiên, các số liệu được cho trong sách giáo khoa Toán tiểu học đặc biệt hơn:

Một tờ giấy hình vuông có cạnh  $\frac{2}{5}$  m. [...] Bạn An cắt tờ giấy đó thành các ô vuông, mỗi ô

có cạnh  $\frac{2}{25}$  m thì cắt được tất cả bao nhiêu ô vuông? [8; tr. 169]

Đối với bài tập trên, sách giáo viên Toán 4 giới thiệu hai cách giải:

**Cách 1:** Lấy độ dài cạnh hình vuông  $\left(\frac{2}{5} \text{ m}\right)$  chia cho cạnh ô vuông  $\left(\frac{2}{25} \text{ m}\right)$ , ta được mỗi cạnh hình vuông gồm 5 ô vuông  $\left(\frac{2}{5} : \frac{2}{25} = 5\right)$ . Từ đó số ô vuông cắt được là:  $5 \times 5 = 25$  (ô vuông).

**Cách 2:** Tính diện tích một ô vuông  $\left(\frac{2}{25} \times \frac{2}{25} = \frac{4}{625} (\text{m}^2)\right)$ . Lấy diện tích hình vuông chia cho diện tích một ô vuông ta có: Số ô vuông cắt được là:  $\frac{4}{25} : \frac{4}{625} = 25$  (ô vuông).

**Lưu ý:**

- Có thể đổi  $\frac{2}{5} \text{ m} = 40 \text{ cm}$ ;  $\frac{2}{25} \text{ m} = 8 \text{ cm}$  (số đo là số tự nhiên) rồi giải tương tự như trên sẽ thuận lợi hơn...

- Ở cách 2, cần nhận xét số ô vuông ở mỗi cạnh phải là số tự nhiên thì mới làm được. [10, tr. 299]

Điều kiện để thực hiện cách 2 như sách giáo viên Toán 4 lưu ý liên quan đến phương diện hình học của diện tích: hình lớn có thể lấp đầy bởi một số tự nhiên lần hình nhỏ. Tương ứng, đặc điểm này được thể hiện dưới dạng tỉ số các cạnh viết được dưới dạng số tự nhiên đối với phương diện số. Dù theo phương diện hình học hay phương diện số, đặc trưng hình học của cặp hình, đặc biệt là mối quan hệ giữa các cạnh và khả năng lấp đầy hình lớn bởi các hình nhỏ, có ý nghĩa quan trọng để tìm được lời giải phù hợp. Tuy nhiên, hàng loạt bài toán tương tự trong sách giáo khoa Toán tiểu học đều thỏa mãn tỉ số các cạnh là số tự nhiên nên việc kiểm tra trở nên không cần thiết và cách 2 được ưu tiên hơn. Chẳng hạn:

Đề lát nền một phòng học hình chữ nhật, người ta dùng loại gạch men hình vuông có cạnh 20 cm. Hỏi cần bao nhiêu viên gạch để lát kín nền phòng học đó, biết rằng nền phòng học có chiều rộng 5 m, chiều dài 8 m và phần mạch vữa không đáng kể? [8; tr. 173].

Hướng dẫn giải bài toán trên, sách giáo viên Toán 4 ưu tiên cách 2, tính tỉ số diện tích:

- Trước hết tính diện tích phòng học.
- Tính diện tích viên gạch lát.
- Suy ra số viên gạch cần dùng để lát toàn bộ nền phòng học.

**Chú ý:** Số viên gạch cần sử dụng tính được là một số tự nhiên. [10; tr. 306].

Như vậy, sách giáo viên Toán 4 có lưu ý đến phạm vi hợp thức của cách tính tỉ số diện tích là hình lớn phải được lấp đầy bởi một số tự nhiên lần hình nhỏ, thể hiện qua tỉ số các cạnh phải là số tự nhiên. Nếu tỉ số không là số tự nhiên, sẽ có những hình không còn nguyên vẹn mà cần chia nhỏ, chấp vá để có thể phủ kín hình lớn. Tuy nhiên, tất cả các bài tập thuộc dạng toán này trong sách giáo khoa Toán 4 và Toán 5 của Việt Nam đều có đặc điểm hình nhỏ là hình vuông, hình lớn là hình vuông hoặc hình chữ nhật thỏa số đo các cạnh của hình lớn là bội số của số đo cạnh của hình vuông nhỏ. Do đó, cách 2 luôn thực hiện được với các bài tập thuộc dạng toán này trong sách giáo khoa tiểu học của Việt Nam mà không cần quan tâm đến lưu ý trong sách giáo viên Toán 4.

Sách Toán dành cho học sinh lớp 4 tại Singapore cũng có một bài tập thuộc dạng toán này:

Peilin có một tờ giấy hình chữ nhật dài 12 cm và rộng 8 cm. Trên tờ giấy này, cô ấy có thể vẽ được nhiều nhất bao nhiêu hình vuông không chồng chéo nhau nếu cạnh hình vuông dài 3 cm [11; tr. 115]

Sách Toán của Singapore cho thấy có thể đưa vào bậc tiểu học bài toán cắt giấy với chiều rộng tờ giấy hình chữ nhật không chia hết độ dài cạnh của hình vuông. Tương ứng với hai cách giải trong sách giáo viên Toán 4 của Việt Nam, ta có thể tìm được hai kết quả khác biệt như sau:

**Cách 1:** Lấy độ dài từng cạnh của tờ giấy hình chữ nhật chia cho độ dài cạnh của hình vuông, ta được cạnh dài tờ giấy gồm 4 hình vuông ( $12 : 3 = 4$ ) và cạnh ngắn tờ giấy gồm 2 hình vuông ( $8 : 3 = 2$ , dư 2). Từ đó, số hình vuông vẽ được là  $4 \times 2 = 8$  (hình vuông). Kết quả này phù hợp với số hình vẽ được trong thực tiễn.

**Cách 2:** Diện tích tờ giấy:  $12 \times 8 = 96 \text{ (cm}^2\text{)}$ . Diện tích hình vuông:  $3 \times 3 = 9 \text{ (cm}^2\text{)}$ . Phép chia có dư  $96 : 9 = 10$  (dư 6) có thể đưa đến kết luận vẽ được nhiều nhất 10 hình vuông không chồng chéo nhau. Kết quả vẽ được 10 hình vuông không phù hợp với thực tiễn.

Nguyên nhân của kết quả khác biệt giữa hai cách làm trên là vì độ dài cạnh hình vuông

không là ước số của chiều rộng tờ giấy hình chữ nhật. Đặc trưng hình học của diện tích, điều kiện ràng buộc các hình vuông không được chồng chéo lên nhau và không thể tách - ghép tờ giấy đã khiến cách 2 (tính tỉ số diện tích) cho kết quả không phù hợp với thực tiễn. Tuy nhiên, với hình nhỏ là hình vuông có các cạnh bằng nhau, bài toán trong sách Singapore vẫn chưa phức tạp như trường hợp hình nhỏ là hình chữ nhật. Trong bài toán cắt cờ mà tác giả Nguyễn Tiến Trung đã giới thiệu, cả 40 và 60 đều không là bội số của 9, không thỏa mãn điều kiện được lưu ý ở trang 299 sách giáo viên Toán 4. Do đó, cách 2, lấy diện tích hình lớn ( $40 \times 60$ ) chia cho diện tích hình bé ( $9 \times 12$ ) cho kết quả 22 lá cờ là không chính xác do vượt ra khỏi phạm vi hợp thức của cách lập tỉ số như lưu ý trong sách giáo viên Toán 4. Hơn nữa, cách 1, lấy độ dài cạnh hình lớn chia cho độ dài cạnh của hình nhỏ rồi nhân các thương với nhau cũng cho nhiều kết quả (18 lá cờ hoặc 20 lá cờ) và đều không là kết quả phù hợp với thực tiễn (21 lá cờ). Như vậy, trong trường hợp tổng quát hơn mà bài toán cắt cờ giới thiệu bởi tác Nguyễn Tiến Trung là một ví dụ điển hình, những hình vẽ minh họa cho phép tìm kiếm, kiểm chứng kết quả phù hợp với thực tiễn và các cách làm chỉ đơn thuần tính toán, không chú ý đến đặc trưng hình học không chắc cho kết quả chính xác.

## 2.2. Dạng tổng quát hơn của bài toán cắt giấy

Chúng ta có bài toán tổng quát hơn cho dạng toán cắt giấy, cắt cờ, lát gạch như sau:

**Bài toán.** Cắt tờ giấy hình chữ nhật lớn với kích thước  $a \times b$  thành các lá cờ hình chữ nhật nhỏ với kích thước  $c \times d$  sao cho thu được nhiều lá cờ nhất. Trong đó,  $a, b, c, d$  là các số tự nhiên khác 0, có cùng đơn vị đo và lá cờ hình chữ nhật không được tạo bằng cách chấp vá, ghép nối.

Trong trường hợp  $a, b, c, d$  là các phân số thập phân lớn hơn 0, ta có thể đổi đơn vị đo để độ dài các cạnh là các số tự nhiên khác 0.

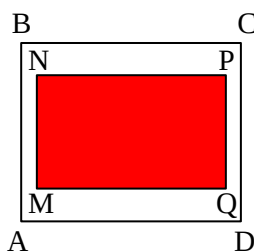
## 2.3. Điều kiện cần để cắt được ít nhất một lá cờ

Giả sử hình chữ nhật ABCD là tờ giấy có kích thước  $a \times b$  và hình chữ nhật MNPQ là lá cờ hình chữ nhật nhỏ có kích thước  $c \times d$ . Khi đó, ABCD có chiều rộng là  $\min(a; b)$ , chiều dài là  $\max(a; b)$ .

**\*Trường hợp 1.** Chiều rộng của hình chữ nhật ABCD nhỏ hơn chiều rộng của hình chữ nhật MNPQ. Khi đó, ta không thể vẽ được hình chữ nhật MNPQ nằm trong hình chữ nhật ABCD, nghĩa là không thể cắt được lá cờ hình chữ nhật MNPQ từ tờ giấy hình chữ nhật ABCD ban đầu mà không chấp vá.

**\*Trường hợp 2.** Chiều rộng của hình chữ nhật MNPQ nhỏ hơn hoặc bằng chiều rộng của hình chữ nhật ABCD.

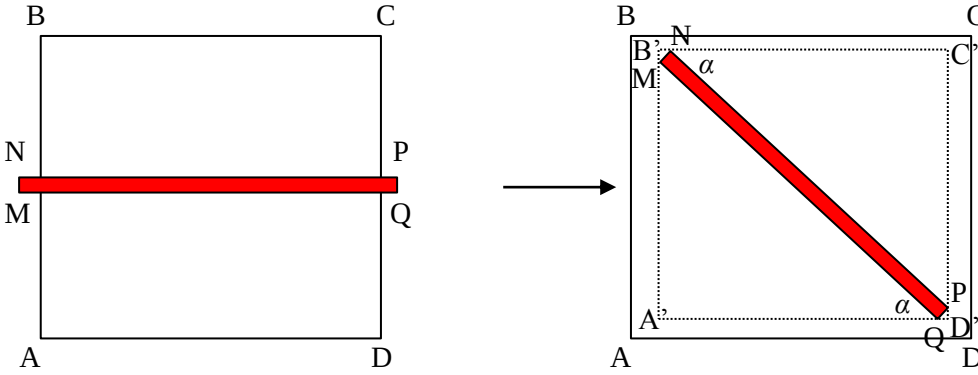
**Trường hợp 2.1.** Chiều dài của hình chữ nhật MNPQ nhỏ hơn hoặc bằng chiều dài của hình chữ nhật ABCD. Khi đó, ta có thể dễ dàng vẽ được hình chữ nhật MNPQ nằm hoàn toàn bên trong hình chữ nhật ABCD (hình 1), nghĩa là ta có thể cắt được ít nhất một lá cờ hình chữ nhật MNPQ từ tờ giấy hình chữ nhật ABCD ban đầu.



**Hình 1.** Chiều dài của ABCD lớn hơn chiều dài của MNPQ và đồng thời chiều rộng của ABCD lớn hơn chiều rộng của MNPQ

*Trường hợp 2.2.* Chiều dài của hình chữ nhật MNPQ lớn hơn chiều dài của hình chữ nhật ABCD. Khi đó, việc vẽ hình chữ nhật MNPQ nằm hoàn toàn bên trong hình chữ nhật ABCD có thể thành công hoặc thất bại, nghĩa là từ tờ giấy hình chữ nhật ABCD ban đầu, ta có thể cắt được ít nhất một lá cờ hình chữ nhật MNPQ hoặc không thể cắt được tùy theo từng trường hợp cụ thể.

Trong trường hợp sau phép dời hình phù hợp, hình MNPQ nằm hoàn toàn bên trong hình chữ nhật ABCD. Khi đó, qua các điểm M, N, P, Q, ta vẽ các đường thẳng song song với các cạnh của hình chữ nhật ABCD và nối những giao điểm bởi các đoạn thẳng, ta sẽ nhận được hình chữ nhật A'B'C'D'. Hình chữ nhật A'B'C'D' cũng nằm hoàn toàn bên trong hình chữ nhật ABCD, có các cạnh lần lượt song song với các cạnh của hình chữ nhật ABCD và chứa các đỉnh M, N, P, Q (Hình 2).



**Hình 2. Chiều dài của MNPQ lớn hơn chiều dài của ABCD nhưng sau phép dời hình, MNPQ nằm hoàn toàn bên trong ABCD**

Gọi  $\alpha$  (nằm trong khoảng từ  $0^0$  đến  $90^0$ ) là góc tạo bởi hai đoạn thẳng QM và QA'. Trường hợp góc  $\alpha$  bằng  $0^0$  hoặc góc  $\alpha$  bằng  $90^0$ , ta có hình chữ nhật ABCD và hình chữ nhật MNPQ bằng nhau (có thể hoán đổi vị trí tên đỉnh, nếu cần). Góc  $\varphi$  tạo bởi hai đoạn thẳng PN và PM thỏa mãn

$\operatorname{tg}\varphi = \frac{MN}{NP}$  là một hằng số. Khi đó, ta có:

$$NP = MP.\cos\varphi; MN = MP.\sin\varphi;$$

$$B'N = MN.\sin\alpha = MP.\sin\varphi.\sin\alpha; NC' = NP.\cos\alpha = MP.\cos\varphi.\cos\alpha;$$

$$A'M = MQ.\sin\alpha = NP.\sin\alpha = MP.\cos\varphi.\sin\alpha; MB' = MN.\cos\alpha = MP.\sin\varphi.\cos\alpha;$$

$$A'B' = A'M + MB' = MP.\cos\varphi.\sin\alpha + MP.\sin\varphi.\cos\alpha = MP.\sin(\alpha + \varphi) = \sqrt{c^2 + d^2}.\sin(\alpha + \varphi)$$

$$B'C' = B'N + NC' = MP.\sin\varphi.\sin\alpha + MP.\cos\varphi.\cos\alpha = MP.\cos(\alpha - \varphi) = \sqrt{c^2 + d^2}.\cos(\alpha - \varphi)$$

Vì hình chữ nhật A'B'C'D' nằm hoàn toàn bên trong hình chữ nhật ABCD, có các cạnh lần lượt song song với các cạnh của hình chữ nhật ABCD nên: chiều dài của hình chữ nhật A'B'C'D' nhỏ hơn chiều dài của hình chữ nhật ABCD và đồng thời chiều rộng của hình chữ nhật A'B'C'D' nhỏ hơn chiều rộng của hình chữ nhật ABCD. Nghĩa là:

$$\begin{cases} \max(\sqrt{c^2 + d^2}.\sin(\alpha + \varphi); \sqrt{c^2 + d^2}.\cos(\alpha - \varphi)) \leq \max(a; b) \\ \min(\sqrt{c^2 + d^2}.\sin(\alpha + \varphi); \sqrt{c^2 + d^2}.\cos(\alpha - \varphi)) \leq \min(a; b) \end{cases} \quad (*)$$

Nếu  $\alpha = 0^0$  thì hệ trên trở thành  $\begin{cases} \max(c; d) \leq \max(a; b) \\ \min(c; d) \leq \min(a; b) \end{cases}$ , tương ứng với trường hợp 2.1.

Nói tóm lại, từ tờ giấy hình chữ nhật có kích thước  $a \times b$ , ta cần cắt các lá cờ hình chữ nhật có kích thước  $c \times d$  thì:

- Điều kiện cần đầu tiên để cắt được lá cờ là:  $\min(c; d) \leq \min(a; b)$ .
- Trường hợp  $\min(c; d) \leq \min(a; b) \leq \max(a; b) \leq \max(c; d)$ , chúng ta vẫn có khả năng cắt được lá cờ hình chữ nhật có kích thước  $c \times d$  nếu độ dài các cạnh của tờ giấy lần lượt lớn hơn  $\sqrt{c^2 + d^2} \cdot \sin(\alpha + \varphi)$  và  $\sqrt{c^2 + d^2} \cdot \cos(\alpha - \varphi)$ , trong đó  $c = d \cdot \tan \varphi$  và  $\alpha$  là góc tạo bởi một cạnh của lá cờ và một cạnh của tờ giấy.

Bài báo này sẽ chỉ xem xét giải bài toán trên trong trường hợp các cạnh của lá cờ hình chữ nhật có kích thước  $c \times d$  song song với các cạnh của tờ giấy hình chữ nhật có kích thước  $a \times b$ , chưa xem xét đến trường hợp hình nhỏ phải đặt nghiêng.

#### 2.4. Giải bài toán tổng quát với điều kiện cạnh của các lá cờ song song với cạnh của tờ giấy

Chúng ta sẽ giải bài toán tổng quát trong trường hợp toàn bộ các lá cờ được cắt có cạnh song song với mép giấy, không xét trường hợp cắt nghiêng ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ). Khi đó, mỗi cạnh của tờ giấy sẽ được chia thành nhiều đoạn tương ứng với chiều dài hoặc chiều rộng của lá cờ, và phần dư (nếu có). Ta có thể biểu diễn độ dài các cạnh của hình chữ nhật có kích thước  $a \times b$  như sau:

$$\begin{cases} a = k \cdot c + l \cdot d + r \\ b = m \cdot d + n \cdot c + s \end{cases} \quad (k, l, r, m, n, s \in \mathbb{N}; 0 \leq r < \min(c; d); 0 \leq s < \min(c; d))$$

Để cắt được nhiều lá cờ nhất thì phần giấy dư phải là ít nhất. Nghĩa là, chúng ta sẽ cần chọn các số tự nhiên  $k, l, m, n$  trong hệ thức ở trên sao cho  $r, s$  là những số tự nhiên nhỏ nhất có thể.

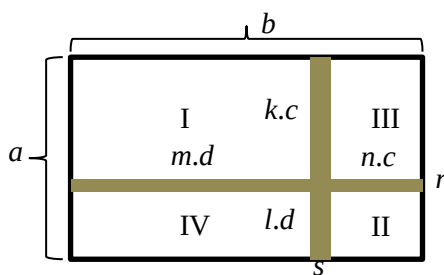
Đặt  $D = \text{UCLN}(c; d)$ , ta có:  $c : D$  và  $d : D$  nên:

$$\begin{cases} a - r = k \cdot c + l \cdot d : D \\ b - s = m \cdot d + n \cdot c : D \end{cases}$$

Như vậy, nếu chọn  $r_0$  là số dư khi chia  $a$  cho  $D$  và  $s_0$  là số dư khi chia  $b$  cho  $D$ , ta có:

$$\begin{cases} r = u \cdot D + r_0 \\ s = v \cdot D + s_0 \end{cases} \quad (u, v \in \mathbb{N}; 0 \leq r_0 < \min(c; d); 0 \leq s_0 < \min(c; d))$$

Hình chữ nhật có kích thước  $a \times b$  có khả năng chia được thành các vùng như hình sau:



**Hình 3. Các vùng chứa những hình chữ nhật nhỏ**

- Phần tô đen là phần giấy chắc chắn bỏ đi vì những hình chữ nhật có chiều rộng bằng  $r, s$  như đã chọn không thể cắt được các lá cờ có kích thước  $c \times d$ .
- Vùng I: có  $k \cdot m$  hình chữ nhật có kích thước  $c \times d$ .
- Vùng II: có  $l \cdot n$  hình chữ nhật có kích thước  $d \times c$  (hình chữ nhật có kích thước  $c \times d$  quay một góc  $90^\circ$ ).

- Vùng III: là hình chữ nhật có kích thước  $k.c \times n.c$ . Vùng III sẽ được xem xét chia thành  $\left\lceil \frac{k.c}{d} \right\rceil .n$  hình chữ nhật có kích thước  $d \times c$  hoặc chia thành  $k. \left\lceil \frac{n.c}{d} \right\rceil$  hình chữ nhật có kích thước  $c \times d$ .

- Vùng IV: là hình chữ nhật có kích thước  $l.d \times m.d$ , sẽ được xem xét chia thành  $l. \left\lceil \frac{m.d}{c} \right\rceil$  hình chữ nhật có kích thước  $d \times c$  hoặc chia thành  $\left\lceil \frac{l.d}{c} \right\rceil .m$  hình chữ nhật có kích thước  $c \times d$ .

**Lưu ý:** Cách 1 (lấy độ dài mỗi cạnh tờ giấy chia cho độ dài mỗi cạnh lá cờ rồi nhân các thương) sẽ cho giá trị chặn dưới là  $\left\lceil \frac{a}{c} \right\rceil . \left\lceil \frac{b}{d} \right\rceil$  hoặc  $\left\lceil \frac{a}{d} \right\rceil . \left\lceil \frac{b}{c} \right\rceil$ . Cách 2 (lấy diện tích tờ giấy chia cho diện tích lá cờ) sẽ cho giá trị chặn trên  $\left\lceil \frac{a.b}{c.d} \right\rceil$  (xem [7, tr. 39]). Tùy theo vị trí và hướng của các lá cờ (phương diện hình học của diện tích), ta sẽ tìm được số lượng lá cờ cắt được tương ứng, hoặc có được phương án tối ưu trong thực tiễn, là một số tự nhiên trong khoảng từ  $\max\left(\left\lceil \frac{a}{c} \right\rceil . \left\lceil \frac{b}{d} \right\rceil; \left\lceil \frac{a}{d} \right\rceil . \left\lceil \frac{b}{c} \right\rceil\right)$  đến  $\left\lceil \frac{a.b}{c.d} \right\rceil$ . Trong đó,  $[x]$  là hàm lấy phần nguyên của số thập phân  $x$ .

## 2.5. Vận dụng tính số lá cờ cắt được khi có số đo độ dài các cạnh

**Bài toán 1.** Bài tập 4 trong sách giáo khoa Toán 4 có thể đưa về dạng:

Cắt tờ giấy hình vuông có kích thước  $40 \times 40$  thành các lá cờ hình vuông có kích thước  $8 \times 8$  sao cho thu được nhiều lá cờ nhất. (Hình vuông: hình chữ nhật đặc biệt; đơn vị đo: cm)

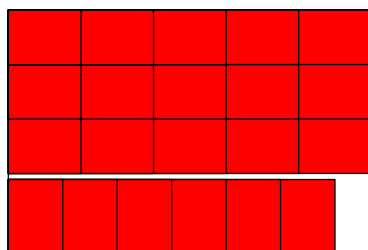
Ta có:  $a = b = 40$  và  $c = d = 8$ . Từ phân tích:  $40 = 5.8 + 0.8 + 0$ , ta xác định được  $k = m = 5$  và  $l = n = r = s = 0$ . Hình minh họa sẽ chỉ có vùng I với 25 hình vuông có kích thước  $8 \times 8$ .

**Bài toán 2.** Trong bài toán cắt cờ mà của tác giả Nguyễn Tiến Trung giới thiệu, chúng ta có thể xác định  $a = 40$ ;  $b = 60$ ;  $c = 9$ ;  $d = 12$ . Khi đó,  $D = \text{UCLN}(c; d) = 3$  là ước của  $b = 60$ . Lấy  $a = 40$  chia cho  $D$  được dư  $r_0 = 1$ . Ta có thể phân tích:  $40 = 3.9 + 1.12 + 1$  và  $60 = 5.12 + 0.9 + 0$  nên  $k = 3$ ;  $l = 1$ ;  $r = 1$ ;  $m = 5$ ;  $n = 0$ ;  $s = 0$ . Vì  $n = 0$  nên vùng II, vùng III trong hình 3 không tồn tại. Vùng I có  $k.m = 15$  lá cờ có kích thước  $9 \times 12$  (có 3 hàng, mỗi hàng có 5 lá cờ có kích thước  $9 \times 12$ ). Phần

giấy buộc phải bỏ với chiều rộng là 1. Vùng IV chia được thành  $l. \left\lceil \frac{m.d}{c} \right\rceil = 1. \left\lceil \frac{5.12}{9} \right\rceil = 6$  hình

chữ nhật có kích thước  $12 \times 9$  (tốt hơn phương án chia vùng IV thành  $\left\lceil \frac{l.d}{c} \right\rceil .m = \left\lceil \frac{1.12}{9} \right\rceil .5 = 5$

hình chữ nhật có kích thước  $9 \times 12$ ). Do đó, tất cả cắt được  $15 + 6 = 21$  (lá cờ).



**Hình 4. Phương án tối ưu cắt được 21 lá cờ**

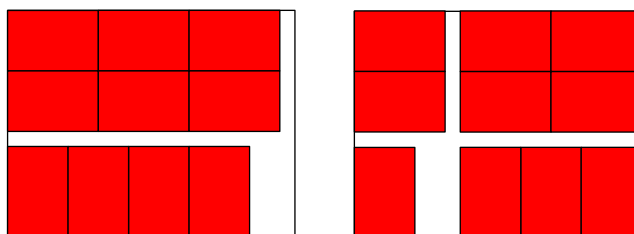
Thay đổi vị trí của các hình chữ nhật nhỏ trong hình 4, chúng ta sẽ có được hình minh họa như trong bài báo của tác giả Nguyễn Tiến Trung, hoặc có những phương án cắt khác cũng cho ra 21 lá cờ.

**Bài toán 3.** Từ hình chữ nhật có kích thước  $15 \times 19$ , cắt các lá cờ có kích thước  $4 \times 6$ .

Ta có:  $a = 15$ ;  $b = 19$ ;  $c = 4$ ;  $d = 6$ . Khi đó,  $D = \text{UCLN}(c; d) = 2$ . Lần lượt chia  $a$  và  $b$  cho  $D$ , ta tính được các số dư  $r_0 = s_0 = 1$ . Ta có thể phân tích:

**Cách 1:**  $15 = 2.4 + 1.6 + 1$  và  $19 = 3.6 + 0.4 + 1$  nên  $k = 2$ ;  $l = 1$ ;  $r = 1$ ;  $m = 3$ ;  $n = 0$ ;  $s = 1$ . Vì  $n = 0$  nên không có vùng II, vùng III. Vùng I có  $k.m = 6$  hình chữ nhật  $4 \times 6$ . Vùng IV chia được thành  $l \cdot \left[ \frac{m.d}{c} \right] = 1 \cdot \left[ \frac{3.6}{4} \right] = 4$  hình chữ nhật có kích thước  $6 \times 4$  (tốt hơn phương án chia vùng IV thành  $\left[ \frac{l.d}{c} \right] \cdot m = \left[ \frac{1.6}{4} \right] \cdot 3 = 3$  hình chữ nhật có kích thước  $4 \times 6$ ). Do đó, tất cả cắt được  $6 + 4 = 10$  (lá cờ).

**Cách 2:**  $15 = 2.4 + 1.6 + 1$  và  $19 = 1.6 + 3.4 + 1$  nên  $k = 2$ ;  $l = 1$ ;  $r = 1$ ;  $m = 1$ ;  $n = 3$ ;  $s = 1$ . Vùng I có  $k.m = 2$  hình chữ nhật có kích thước  $4 \times 6$ . Vùng II có  $l.n = 3$  hình chữ nhật có kích thước  $6 \times 4$ . Vùng III chia được thành  $k \cdot \left[ \frac{n.c}{d} \right] = 2 \cdot \left[ \frac{3.4}{6} \right] = 4$  hình chữ nhật có kích thước  $4 \times 6$  (tốt hơn phương án chia vùng III thành  $\left[ \frac{k.c}{d} \right] \cdot n = \left[ \frac{2.4}{6} \right] \cdot 3 = 3$  hình chữ nhật có kích thước  $6 \times 4$ ). Vùng IV chia được thành  $l \cdot \left[ \frac{m.d}{c} \right] = 1 \cdot \left[ \frac{1.6}{4} \right] = 1$  hình chữ nhật có kích thước  $6 \times 4$  (cùng kết quả với phương án chia vùng IV thành  $\left[ \frac{l.d}{c} \right] \cdot m = \left[ \frac{1.6}{4} \right] \cdot 1 = 1$  hình chữ nhật có kích thước  $4 \times 6$ ). Do đó, tất cả cắt được:  $2 + 3 + 4 + 1 = 10$  (lá cờ).



**Hình 5. Hai phương án cắt tối ưu tương ứng với hai cách phân tích**

Hai phương án cắt trong hình 5 tương ứng với hai cách phân tích các cạnh của hình lớn thành tổng hợp các cạnh của hình nhỏ sao cho phần dư là nhỏ nhất. Hai hình minh họa tương ứng chẳng qua là sự dịch chuyển, thay đổi vị trí của các hình nhỏ mà không làm thay đổi số lượng lá cờ được cắt.

Như vậy, sự chú ý đến đặc trưng hình học của diện tích cho phép giáo viên tiểu học có được cái nhìn khái quát hơn, sâu sắc hơn về bài toán, rút ngắn quá trình mò mẫm, tìm kiếm các phương án tối ưu cho bài toán trong trường hợp tổng quát hơn. Từ đó, giáo viên có thể tổ chức cho học sinh tiểu học phát hiện ra sai lầm khi chỉ thực hiện các tính toán số học mà không quan tâm đến phương diện hình học bằng cách tổ chức đối chiếu kết quả với thực tiễn, kiểm chứng qua hàng loạt các hình vẽ minh họa như tác giả Nguyễn Tiến Trung giới thiệu. Do học sinh tiểu học chưa học về lý thuyết đồng dư, cách giải, qui trình tìm kiếm phương án tối ưu được xây dựng trong bài báo này có thể phù hợp với giáo viên tiểu học nhưng không phù hợp với học sinh tiểu học. Tuy rằng các bài toán cắt giấy, lát gạch trong sách giáo khoa Toán tiểu học Việt Nam có thể giải được bằng các tính toán đơn thuần, giáo viên vẫn nên tổ chức cho học sinh vẽ hình minh họa, khai thác phương diện hình học của diện tích.



### 3. Kết luận

Trong sách giáo khoa Toán tiểu học, dạng toán cắt giấy, lát gạch cho sẵn hình nhỏ là hình vuông thỏa điều kiện hình lớn có thể lấp đầy bởi các hình vuông đó. Với dạng toán này, sách giáo viên Toán 4 đề xuất hai cách giải dựa vào các tính toán số học. Cách 1 là chia các cạnh hình lớn cho cạnh hình nhỏ rồi nhân các kết quả với nhau. Cách 2 là tính diện tích của mỗi hình rồi lập tỉ số diện tích. Sách giáo viên Toán 4 cũng lưu ý rõ điều kiện để thực hiện cách thứ hai liên quan đến khả năng lấp đầy hình lớn bởi các hình nhỏ. Do đó, để học sinh quan tâm hơn đến đặc trưng hình học của diện tích và điều kiện thực hiện được cách 2, khi dạy học dạng toán cắt giấy, lát gạch, giáo viên nên vẽ hình minh họa, thậm chí là thay đổi kích thước của hình chữ nhật lớn sao cho ít nhất độ dài một cạnh của hình chữ nhật lớn không là bội số của độ dài cạnh hình vuông nhỏ như trong sách Toán dành cho học sinh lớp 4 tại Singapore.

Bài toán cắt cờ giới thiệu bởi tác giả Nguyễn Tiến Trung phức tạp hơn bài toán cắt giấy trong sách giáo khoa Toán 4 khi các mảnh giấy hình vuông được thay thế bởi các lá cờ hình chữ nhật. Kích thước các hình được chọn nằm ngoài phạm vi hợp thức của cách thứ hai, đồng thời, sự khác biệt về kích thước hai cạnh của lá cờ khiến từ các cách làm đơn thuần tính toán số học, bỏ qua đặc điểm hình học đưa đến kết quả không phù hợp với thực tiễn. Vì thế, các hình minh họa là cần thiết để tìm được phương án tối ưu nhưng bài báo của tác giả Nguyễn Tiến Trung chưa tạo ra được sự biện luận chặt chẽ.

Dựa trên lý thuyết đồng dư, lượng giác và xuất phát từ đặc trưng hình học của diện tích, bài báo này đã xây dựng một qui trình tìm kiếm phương án tối ưu và giới thiệu một số ví dụ minh họa cho tính khả thi của qui trình này. Cụ thể, bài báo có được một số kết quả đáng chú ý như sau:

- Không thể cắt được lá cờ theo đề bài nếu chiều rộng tờ giấy nhỏ hơn chiều rộng lá cờ;
- Tìm được điều kiện cắt được lá cờ theo phương nghiêng khi chiều dài tờ giấy nhỏ hơn chiều dài lá cờ;
- Xác định qui trình tìm kiếm phương án tối ưu với các bước: xác định ước chung lớn nhất; phân tích chiều dài, chiều rộng của tờ giấy theo chiều dài, chiều rộng của lá cờ sao cho phần dư là nhỏ nhất; chia tờ giấy thành các vùng với hướng cắt cụ thể; thực hiện các thay đổi vị trí những hình nhỏ nếu muốn tìm các phương án tương đương.

### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Baltar P. M., 1996. *Enseignement et apprentissage de la notion d'aire de surfaces planes: une étude de l'acquisition des relations entre les longueurs et les aires au collège*. Thèse pour obtenir le titre de Docteur de l'Université, Université Joseph Fourier - Grenoble 1.
- [2] Perrin-Glorian M. J., 1989. *L'aire et la mesure*. Petit x, Số 24, tr. 5-36.
- [3] Pressiat A., 2001. *Grandeurs et mesures: Evolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition*. Actes de la 11e École d'Été de Didactique des Mathématiques 2001, tr. 283-297.
- [4] Céli V., 2005. *Les formules de calcul d'aires planes : un trait d'union entre le géométrie et le numérique*. 13ème Ecole d'été de didactique des mathématique, Ste Livrade.
- [5] Nguyễn Thị Xuân, 2012. *Phát triển năng lực tư duy và trí tưởng tượng không gian cho học sinh tiểu học qua bài học Toán về cắt - ghép hình*. Tạp chí Giáo dục, Số 289 (1-7/2012), tr. 42-44.
- [6] Nguyễn Thị Kim Thoa, 2015. *Dạy Toán ở tiểu học theo hướng phát triển năng lực người học*. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm TPHCM, Số 6 (71), tr. 89-96.
- [7] Nguyễn Tiến Trung, 2015. *Bồi dưỡng và phát triển năng lực Toán học cho học sinh tiểu học*. Tạp chí Khoa học Trường Đại học Sư phạm Hà Nội. Số 60 (8A), tr. 35-43.

- [8] Đỗ Đình Hoan, Nguyễn Áng, Vũ Quốc Chung, Đỗ Tiến Đạt, Đỗ Trung Hiệu, Trần Diên Hiền, Đào Thái Lai, Phạm Thanh Tâm, Kiều Đức Thành, Lê Tiến Thành, Vũ Dương Thụy, 2012. *Toán 4*. NXB Giáo dục Việt Nam.
- [9] Đỗ Đình Hoan, Nguyễn Áng, Đặng Tự Ân, Vũ Quốc Chung, Đỗ Tiến Đạt, Đỗ Trung Hiệu, Đào Thái Lai, Trần Văn Lý, Phạm Thanh Tâm, Kiều Đức Thành, Lê Tiến Thành, Vũ Dương Thụy, 2012. *Toán 5*. NXB Giáo dục Việt Nam.
- [10] Đỗ Đình Hoan, Nguyễn Áng, Vũ Quốc Chung, Đỗ Tiến Đạt, Đỗ Trung Hiệu, Trần Diên Hiền, Đào Thái Lai, Kiều Đức Thành, Lê Tiến Thành, Phạm Thanh Tâm, Vũ Dương Thụy, 2012. *Toán 4 - Sách giáo viên*. NXB Giáo dục Việt Nam.
- [11] Kheong F. H., Ramakrishnan C., Soon G. K., 2008. *My PALS are HERE! Maths 4B*. Marshall Cavendish Education.

## **ABSTRACT**

### **Geometric characteristics of area and the problem of paper partitioning in primary schools**

Tran Duc Thuan

*Faculty of Primary Education, Ho Chi Minh City University of Education*

Previous studies showed that the area of a figure has two characteristics: geometry and arithmetic. For the problem of paper partitioning into squares in grade 4, the preferred solution is calculating the area ratio of the figures. The problem becomes more complicated when squares is substituted by rectangles. Inappropriate result appears due to a lack of interest in geometric characteristics. Based on the theory of congruence, this article proposes an algorithm to find the optimal plan for partitioning a rectangular piece of paper of size  $a \times b$  into rectangles of size  $c \times d$  in the case of partitioning lines in parallel with the edges of paper. From the problems of paper partitioning in a more general case, we realize that the geometric characteristics of the concept of area need to be more attentive in teaching mathematics in primary schools.

**Keywords:** Problem of paper partitioning, area, geometry, primary school.