

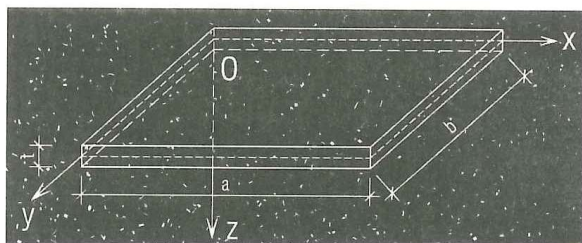
PHÂN TÍCH KẾT CẤU TẤM DÀY THEO PHƯƠNG PHÁP LỚP HỮU HẠN

LÊ VĂN BÌNH (*)

1. GIỚI THIỆU

Khi phân tích các dạng kết cấu tấm chịu uốn theo lý thuyết tấm mỏng (thin plate), người ta giả thiết rằng các đoạn thẳng vuông góc với mặt trung bình của tấm vẫn thẳng và vuông góc với mặt trung bình trong quá trình biến dạng. Điều này có nghĩa là khi tấm chịu uốn các lớp vật liệu không bị trượt lên nhau và tấm không bị co giãn theo phương vuông góc với tấm. Nếu dùng hệ trục tọa độ như hình H1, ta sẽ có:

$$\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0 \text{ và } \varepsilon_z = 0$$



Hình H1

Tuy nhiên với các loại tấm chịu uốn có bề dày tương đối lớn thì giả thiết này không còn đúng nữa, và ảnh hưởng của sự trượt lên nhau của các lớp

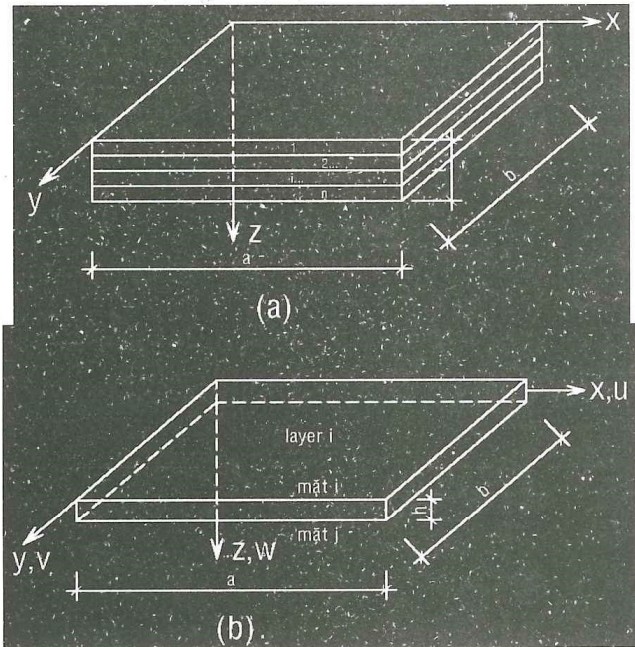
vật liệu là đáng kể và cần phải xét đến. Đã có nhiều lời giải cho bài toán tấm dày như các lời giải giải tích của lý thuyết đàn hồi hay các phương pháp số. Nếu phân tích phần tử hữu hạn cho bài toán tấm dày, người ta thường sử dụng phần tử tấm chịu uốn không tương thích (incompatible), nên thường dẫn đến một loạt các khó khăn về việc xây dựng ma trận độ cứng, vectơ tải cho loại phần tử này, đồng thời kéo theo những thủ tục rắc rối trong lập trình. Hơn nữa, phần tử tấm không tương thích cho kết quả không liên tục trên biên tiếp giáp giữa các phần tử [1]. Bài này trình bày một phương pháp phân tích kết cấu tấm dày bằng cách chia thành hữu hạn các lớp (layer) được kết nối với nhau bởi các mặt phẳng tạm gọi là phương pháp lớp hữu hạn (finite layer method – FLM). Phương pháp này có ưu điểm là cho kết quả rất tốt, đảm bảo tính liên tục của các thành phần chuyển vị, ứng suất và biến dạng trong kết cấu, xét đến đầy đủ các yếu tố của tấm nhưng lại đơn giản và dễ dàng lập trình tính toán.

2. NỘI DUNG PHƯƠNG PHÁP LỚP HỮU HẠN

Để thực hiện tính toán theo FLM, kết cấu được chia thành một số hữu hạn

(*)Thạc sĩ, Giảng viên Khoa Kỹ thuật và công nghệ, Đại học Mở Bán công TP.HCM

các lớp mỏng hơn, mỗi lớp được giới hạn bởi 2 mặt phẳng được đánh số là l và j (hình H2). Trường chuyển vị bên trong



Hình H2

mặt phẳng tấm được biểu diễn ở dạng một chuỗi hàm được kết hợp với một đa thức xấp xỉ (cách làm này được phát triển từ phương pháp dải hữu hạn – finite strip method – FSM đã được tác giả trình bày trong tài liệu [2]). Đa thức xấp xỉ biểu diễn chuyển vị theo bề dày tấm w (trục z) và chuỗi hàm mô tả trường chuyển vị trong mặt phẳng tấm u và v (trục x và y), cụ thể:

$$\begin{cases} u = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [(1-\bar{z})u_{imn} + \bar{z}u_{jmn}] X'_n(x) Y_m(y) \\ v = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [(1-\bar{z})v_{imn} + \bar{z}v_{jmn}] X_n(x) Y'_m(y) \\ w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [(1-\bar{z})w_{imn} + \bar{z}w_{jmn}] X_n(x) Y_m(y) \end{cases}$$

Trong đó:

$$\bar{z} = \frac{z}{h}, \quad h \text{ là bề dày của một lớp}$$

$X_n(x)$, $Y_n(y)$ là các chuỗi hàm được chọn trước từ điều kiện biên của tấm (beam eigenfunctions), nhận được từ việc giải phương trình vi phân đạo động của bài toán dầm chịu uốn (xem thêm tài liệu [2]).

M , N là số các số hạng của chuỗi cần lấy để phân tích bài toán.

u_{imn} , v_{imn} , w_{imn} , u_{jmn} , v_{jmn} , w_{jmn} là các thông số chuyển vị của từng mặt phẳng l và j của một phần tử layer (finite layer displacement parameters), được tập hợp trong một vectơ $\{\delta_{mn}\}$ gọi là vectơ thông số chuyển vị bề mặt, chính là các ẩn số của bài toán.

Sau khi đã xấp xỉ chuyển vị, biến dạng của layer sẽ được xác định từ phương trình Cauchy của bài toán đàn hồi:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned}$$

Thực hiện các phép tính đạo hàm kết quả là nhận được phép tính biến dạng của phần tử qua vectơ thông số chuyển vị bề mặt $\{\delta_{mn}\}$, cụ thể:

$$\{\epsilon\} = \{\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\}^T = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [B]_{mn} \{\delta\}_{mn} \quad (2)$$

Trong đó $[B]_{mn}$ là ma trận tính biến dạng.

Sau khi tìm được biến dạng, ứng suất sẽ được tìm theo định luật Hooke. Trong trường hợp vật liệu đẳng hướng, quan hệ ứng suất – biến dạng là:

$$\{\sigma\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ & & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ & dx & & & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ & & & & & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \{\epsilon\} = [D]\{\epsilon\} \quad (3)$$

Thay (2) vào (3), ta sẽ có phép tính ứng suất phần tử thông qua vectơ thông số chuyển vị bề mặt:

$$\begin{aligned} \{\sigma\} &= [D][B]\{\epsilon\} \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [D][B]_{mn} \{\delta\}_{mn} \\ &= \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N [S]_{mn} \{\delta\}_{mn} \end{aligned} \quad (4)$$

Trong đó $[S] = [D][B]$ được gọi là ma trận tính ứng suất.

Hệ phương trình cơ bản của FLM cũng được thành lập từ nguyên lý biến phân về chuyển vị của hệ đàn hồi trong bài toán tấm chịu uốn [3]. Ma trận độ cứng và vectơ tải của phần tử layer được tìm ở dạng quen thuộc:

$$[K]_e = \int_{V_e} [B]^T [D][B] dV \quad (5)$$

và

$$\{F\}_m = \int_0^a \int_0^b \begin{Bmatrix} [N_1]_m^T \\ [N_2]_m^T \end{Bmatrix} \{q\} dx dy$$

Dạng tường minh của các ma trận này thường không thành lập được do

phép tính tích phân trong (5) không thực hiện được và thường chuyển sang tích cầu phương Gauss để tính.

Thực hiện lắp ghép ma trận độ cứng và vectơ tải cho toàn tấm, cuối cùng ta sẽ có hệ thống phương trình để giải của FLM có dạng:

Giải hệ thống phương trình (6) sẽ tìm được các thông số $\{\delta\}$, ứng suất được tính theo (4), biến dạng được tính theo (2) và chuyển vị được tính theo (1).

$$[\bar{K}]\{\delta\} = \{\bar{P}\} \quad (6)$$

3. ỨNG DỤNG

Xét một kết cấu tấm dày có dạng hình chữ nhật kích thước ab , bề dày t , tựa đơn trên 4 cạnh, chịu tải trọng phân bố đều q trên bề mặt tấm. Ta khảo sát chuyển vị w và ứng suất của điểm chính giữa của mặt trên (top surface) và mặt dưới (bottom) của tấm với các bề dày khác nhau và tỉ số a/b khác nhau. Việc tính toán được thực hiện theo chương trình **FSMISA™** của tác giả được viết bằng ngôn ngữ Matlab [3] và so sánh với lời giải của Y.K.Cheung (1976) [4]. Kết quả được thể hiện trong bảng:

$\frac{b}{a}$	Thành phần	t/a					
		0.1		0.25		0.5	
		Top	Bottom	Top	Bottom	Top	Bottom
1.0	w	491.9639	491.4200	37.7139	36.4321	9.0208	6.0001
	σ_x	-26.0287	25.9095	-4.2806	4.1699	-1.2427	1.0938
	σ_y	-26.0287	25.9095	-4.2806	4.1699	-1.2427	1.0938
1.5	w	924.2100	923.6643	67.4901	66.1891	13.0846	11.0972
	σ_x	-46.7853	46.7066	-7.6061	7.5305	-2.0725	1.9684
	σ_y	-24.1373	23.9917	-4.0081	3.8476	-1.1594	0.9990
2.0	w	1207.1999	1206.6533	86.6447	85.3310	16.5533	13.9514
	σ_x	-60.0407	59.9828	-9.7299	9.6724	-2.6056	2.5186
	σ_y	-20.0641	19.9060	-3.3642	3.1857	-1.0032	0.8134

Kết quả tính tương ứng với $a=10$, $E=1$, $\nu=0.15$, $q=1$. Khi $t/a = 0.1$ và 0.25 giải với lưới 3 layer, khi $t/a=0.5$ giải với lưới 5 layer. Số hạng chuỗi dùng trong phân tích là $m \times n = 5 \times 5 = 25$.

Nhận xét:

Khi tỉ số $t/a=0.1$ lời giải của bài toán tấm dày cho kết quả tương tự như lý thuyết tấm mỏng, các thành phần ứng suất và chuyển vị của mặt trên và mặt dưới gần như nhau. Tuy nhiên khi tỉ số t/a tăng lên (có nghĩa là tăng bề dày tấm) thì sẽ có sự khác biệt giữa lý thuyết tấm mỏng và tấm dày, các thành phần ứng suất chuyển vị của các mặt phẳng tấm là khác nhau và tồn tại sự trượt giữa các lớp.

4. KẾT LUẬN

(i) Khi phân tích các kết cấu tấm chịu uốn, cần lưu ý lựa chọn lý thuyết tấm phù hợp để đảm bảo kết quả chính xác, tỉ lệ đề nghị là:

Khi $\frac{t}{a} \leq \frac{1}{10} = 0.1$ có thể tính theo lý

thuyết tấm mỏng.

Khi $\frac{t}{a} > \frac{1}{10} = 0.1$ tính theo lý thuyết tấm dày.

t: bề dày tấm; a: cạnh bé nhất của tấm.

(ii) Khi tính tấm theo lý thuyết tấm dày, nên lựa chọn FLM làm phương pháp giải quyết để bài toán trở nên đơn giản nhưng tổng quát và khả năng tự động hóa cao. Ngoài ra FLM không chỉ phân tích bài toán tĩnh (static analysis) mà còn có thể phân tích các bài toán dao động và ổn định (dynamic and buckling analysis). Phương pháp này đặc biệt có hiệu quả đối với các loại vật liệu nhiều lớp, phân tích kết cấu cầu...

TÀI LIỆU THAM KHẢO:

- [1]. Chu Quốc Thắng, Phương pháp phần tử hữu hạn, NXB Khoa học và Kỹ thuật, 1998.
- [2]. Lê Văn Bình, Sử dụng dải hữu hạn bậc cao trong bài toán phẳng của lý thuyết đàn hồi, Đại học Bách Khoa TpHCM, 2003.
- [3]. Lê Văn Bình, Phân tích kết cấu tấm chịu uốn theo phương pháp dải hữu hạn, Đề tài NCKH cấp Trường, 2004.
- [4]. Y.K.Cheung, Finite Strip Method in Structural Analysis, Pergamon Press, 1976.

TÓM TẮT

Với kết cấu tấm dày, các đoạn thẳng vuông góc với mặt trung bình của tấm không còn thẳng và vuông góc với nó trong quá trình biến dạng, do đó cần phải phân tích tổng quát ở trạng thái 3 chiều vì lý thuyết tấm mỏng không còn áp dụng được. Bài viết này trình bày về nội dung của phương pháp lớp hữu hạn và các ưu điểm của nó để phân tích bài toán tấm dày.

SUMMARY

For a very thick plate structure, any line normal to the mid-plane does not remain straight or normal to the deformed surface during deformation. Therefore, the thin plate theory is no longer applicable and three-dimensional analysis is required. This article shows the contents and advantage of the finite layer method for analyzing the thick plate problem.