

PHÂN TÍCH PHI TUYẾN KHUNG DÀN THÉP PHẪNG SỬ DỤNG PHƯƠNG PHÁP DẦM-CỘT

Ngày nhận bài: 11/12/2014

Ngày nhận lại: 02/03/2015

Ngày duyệt đăng: 26/03/2015

Đặng Thị Phương Uyên¹

Lê Thanh Cường²

Ngô Hữu Cường³

TÓM TẮT

Phi tuyến hình học là kể đến sự sai lệch hình học kết cấu tại từng thời điểm gia tăng lực tác dụng và phân tích phi tuyến vật liệu là kể đến sự biến đổi của vật liệu khi lực gia tăng. Phân tích phi tuyến hình học sử dụng phương pháp dầm-cột (beam-column method) dùng hàm ổn định và phân tích phi tuyến vật liệu kể đến sự chảy dẻo ở hai đầu phần tử để mô phỏng sự làm việc của phần tử cũng như của toàn bộ hệ kết cấu khung dàn khi chịu tác dụng của ngoại lực. Phần tử dầm-cột kể đến tác dụng của lực nén và uốn đồng thời, diễn tả kết hợp sự phân tích về sai lệch hình học của dầm và vấn đề ổn định của cột khi chịu lực tác dụng. Bài báo sử dụng phương pháp phân tích nâng cao phân tích mối quan hệ giữa lực và chuyển vị của hệ kết cấu khung dàn là đường cong bậc hai, kể đến sự làm việc đồng thời của hệ khi chịu lực tác dụng, phân tích mối quan hệ giữa lực-chuyển vị tại từng thời điểm lực gia tăng và tại thời điểm kết cấu đạt đến trạng thái giới hạn. Sử dụng hàm ổn định theo phương pháp dầm-cột giúp cho việc khai báo số phần tử ít hơn, giảm thiểu được thời gian phân tích bài toán và giảm bộ nhớ đệm máy tính rất nhiều.

Từ khóa: dàn thép, phi tuyến, hàm ổn định, dầm-cột.

ABSTRACT

Nonlinear geometric is mention of geometric error of structure at the point increasing force and the nonlinear material is mention of a change material. Nonlinear geometric analysis by using beam-column method and nonlinear materials that including plastic hinge of the ending elements for simulation the working of the elements as well as the entire the trusses system under the effect of external forces. Beam-column including the effects of compression and bending that describes the combining analysis of the deviation of the beam geometry and stability issues of the load-bearing column. The article uses advanced analytical methods to analyze the relationship between force and displacement of the trusses system through quadratic curve which including the combination of effects, Analysis the relationship between the force-displacement at each increasing force point and the point reaching structure's limit. Using the stability of beam-column method enables to reduce the declaration of element, reduce analysis time and reduce the problem of computer memorycache.

Keywords: Steel trusses, Nonlinear, Stability function, Beam-column.

1. Đặt vấn đề

Trong phân tích đàn hồi bậc nhất, quan hệ giữa lực và chuyển vị ở bất cứ thời điểm nào cũng là một đường thẳng. Các thanh dàn

chủ yếu chỉ chịu dọc trong thanh, không kể tác động do lực kéo (nén) và uốn đồng thời. Do vậy, phương pháp phân tích đàn hồi bậc nhất không xem xét sự làm việc đồng thời của các thanh, cũng như sự làm việc đồng thời của

¹ Công ty Tư Vấn Điện Miền Nam.Email: uyendang119@gmail.com

² Trường Đại học Mở TPHCM. Email: lthanhcuong@yahoo.com

³ Trường Đại học Bách khoa TPHCM, nhcuong@hcmut.edu.vn

toàn bộ hệ kết cấu dưới tác dụng của tải trọng.

Khi phân tích khung dàn nếu chỉ xét đến sự tác dụng của nén (hay kéo) dọc trục thanh mà bỏ qua các tác dụng của mô men thì chưa thể thể diễn tả hết được sự làm việc của hệ kết cấu khung dàn. Khi sử dụng phương pháp phân tích trực tiếp theo phương pháp phân tích nâng cao có thuận lợi lớn của phương pháp phân tích này là: (i) Phỏng đoán được hệ số chiều dài hữu hiệu; (ii) cung cấp kết quả nội lực toàn bộ kết cấu tại trạng thái giới hạn sử dụng được chính xác hơn; (iii) Áp dụng một cách hợp lý và phù hợp với tất cả các loại kết cấu khung phẳng bao gồm khung không giằng, khung có giằng và khung kết hợp.

Theo phương pháp dầm-cột sử dụng hàm ổn định có phương trình hàm đơn giản nhưng

diễn tả tác động phi tuyến hình học của phần tử khi chịu lực tác dụng, mô tả được những ứng xử thực tế làm việc của kết cấu, đặc biệt là các kết cấu khung không dàn. Sự đơn giản trong phân tích, tốn ít bộ nhớ máy tính nhưng cho ra kết quả đáng tin cậy.

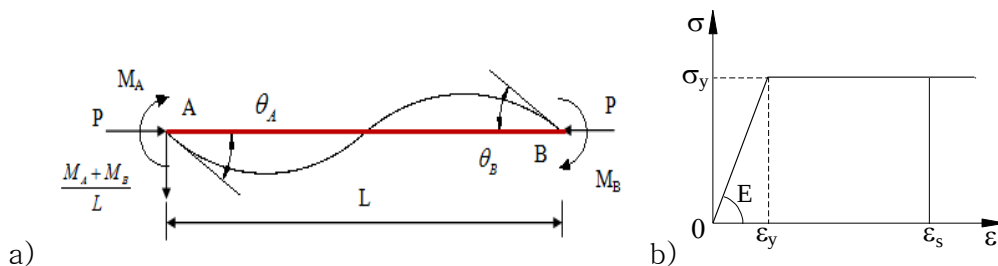
Bài báo này tác giả sử dụng hàm ổn định trong phân tích phi tuyến hình học kết hợp với phương pháp khớp dẻo thớ trong phân tích phi tuyến vật liệu để diễn tả tác động phi tuyến của khung dàn thép phẳng khi chịu lực tác dụng.

2. Cơ sở lý thuyết

2.1. Giả thuyết phần tử

Xét phần tử hữu hạn dầm-cột phẳng điển hình như Hình 1.

Hình 1. a) Phần tử dầm-cột điển hình trong mặt phẳng; b) Mô hình vật liệu của thép



Những giả thiết sau được sử dụng trong việc thành lập phần tử hữu hạn dầm-cột:

- (1) Phần tử ban đầu thẳng và có tiết diện đều;
- (2) Mặt cắt ngang trước và sau biến dạng luôn phẳng và vuông góc với trục thanh;
- (3) Không xét đến sự mất ổn định cục bộ và mất ổn định ngang;
- (4) Không có tải trọng ngang trong nhịp cấu kiện;
- (5) Mô hình vật liệu thép là đàn-dẻo tuyệt đối.

2.2. Phần tử dầm-cột do sự tác động của P-đ

Để kể đến tác động của sự sai lệch hình học do tác dụng của lực dọc trục gây ra. Theo W.F.Chen và E.M.Lui (P-E Austrell, O

Dahlblom, J Lindemann và các tác giả, 2006). đã đưa ra được mối quan hệ giữa lực và chuyển vị gia tăng theo phương trình sau:

$$\begin{Bmatrix} \dot{P} \\ \dot{M}_A \\ \dot{M}_B \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L} \begin{bmatrix} \frac{A}{I} & 0 & 0 \\ 0 & s_{ii} & s_{ij} \\ 0 & s_{ij} & s_{ii} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{e} \\ \dot{\theta}_A \\ \dot{\theta}_B \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Trong đó, I, L, A, E là mô men quán tính, chiều dài phần tử, diện tích tiết diện, mô đun đàn hồi vật liệu; $\dot{P}, \dot{M}_A, \dot{M}_B$ là lực dọc trục gia tăng, mô men gia tăng tại đầu A và B; $\dot{e}, \dot{\theta}_A, \dot{\theta}_B$ là chuyển vị dọc trục gia tăng, góc xoay gia tăng tại hai đầu phần tử A và B; s_{ii}, s_{ij} hay s_{ji} là hàm ổn định cho phần tử dầm-cột có dạng:

$$s_{ii} = \begin{cases} \frac{\pi\sqrt{\rho}\sin(\pi\sqrt{\rho}) - \pi^2\rho\cos(\pi\sqrt{\rho})}{2 - 2\cos(\pi\sqrt{\rho}) - \pi\sqrt{\rho}\sin(\pi\sqrt{\rho})} & \text{if } P < 0 \\ \frac{\pi^2\rho\cosh(\pi\sqrt{\rho}) - \pi\sqrt{\rho}\sinh(\pi\sqrt{\rho})}{2 - 2\cosh(\pi\sqrt{\rho}) + \pi\sqrt{\rho}\sinh(\pi\sqrt{\rho})} & \text{if } P > 0 \end{cases} \quad (2)$$

$$s_{ij} = \begin{cases} \frac{\pi^2\rho - \pi\sqrt{\rho}\sin(\pi\sqrt{\rho})}{2 - 2\cos(\pi\sqrt{\rho}) - \pi\sqrt{\rho}\sin(\pi\sqrt{\rho})} & \text{if } P < 0 \\ \frac{\pi\sqrt{\rho}\sinh(\pi\sqrt{\rho}) - \pi^2\rho}{2 - 2\cosh(\pi\sqrt{\rho}) + \pi\sqrt{\rho}\sinh(\pi\sqrt{\rho})} & \text{if } P > 0 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Với } \rho = \frac{P}{\frac{\pi^2 EI}{L^2}}.$$

P: lực dọc trục của phần tử.

2.3. Phi tuyến vật liệu do tác động của ứng suất dư

Để diễn tả sự suy giảm độ cứng, giá trị mô đun đàn hồi E thay thế bằng mô đun tiếp tuyến E_t theo quá trình lực gia tăng. E_t xác định dựa vào mô đun đàn hồi vật liệu E theo phương trình:

$$E_t = 1,0E \text{ khi } P \leq 0,5P_y \quad (4)$$

$$E_t = 4 \frac{P}{P_y} E \left(1 - \frac{P}{P_y}\right) \text{ khi } P > 0,5P_y \quad (5)$$

Với P_y là lực chảy dẻo của vật liệu thép.

2.4. Phi tuyến vật liệu do sự hình thành khớp dẻo

Ma trận độ cứng của phần tử phẳng suy biến từ trạng thái đàn hồi thuần túy đến trạng thái chảy dẻo hoàn toàn được đề xuất bởi Liew và cộng sự vào năm 1992 để xem xét quá trình chảy dẻo tại hai đầu của phần tử như sau:

$$\begin{pmatrix} \Delta M_A \\ \Delta M_B \end{pmatrix} = \frac{E_t I}{L} \begin{bmatrix} \eta_A \left[s_1 - \frac{s_2^2}{s_1} (1 - \eta_B) \right] & \eta_A \eta_B s_2 \\ \eta_A \eta_B s_2 & \eta_A \left[s_1 - \frac{s_2^2}{s_1} (1 - \eta_B) \right] \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \theta_A \\ \Delta \theta_B \end{pmatrix} \quad (6)$$

$\Delta M_A, \Delta M_B$ là mô men tác dụng gia tăng tại hai đầu phần tử A và B. $\Delta \theta_A, \Delta \theta_B$ là góc xoay gia tăng tại hai đầu phần tử.

η_A, η_B là các thông số vô hướng cho phép mô phỏng quá trình giảm độ cứng phi đàn hồi liên quan đến sự chảy dẻo của mặt cắt ngang tại hai đầu phần tử A và B.

$\eta = 1$: mặt cắt ngang tại đầu mút đang xét vẫn còn đàn hồi,

$\eta = 0$: mặt cắt ngang tại đầu mút đang xét đã chảy dẻo hoàn toàn,

$0 < \eta < 1$: mặt cắt ngang tại đầu mút đang xét đang trong quá trình chảy dẻo.

Để tính toán sự chảy dẻo một phần, Liew et al (1992) đã đưa ra ba mức chảy dẻo hiệu chỉnh như sau:

$$\text{Khi } 0,5 \leq \alpha \leq 1,0: \eta = 4\alpha(1 - \alpha); \quad (7)$$

$$\text{Khi } \alpha < 0,5 \text{ thì } \eta = 1;$$

Khi $\alpha = 1$ thì $\eta = 0$;

Hàm chảy dẻo của mặt cắt ngang theo AISC-LRFD (2005) cho thép chữ I hoặc chữ H khi phần tử thanh dàn chịu kéo mặt chảy dẻo có dạng:

$$\alpha(p, m_x) = \frac{P}{P_y} + \frac{8M_y}{9M_{yp}} = 1 \text{ khi } \frac{P}{P_y} \geq 0,2 \quad (8)$$

$$\alpha(p, m_x) = \frac{P}{2P_y} + \frac{M_y}{M_{yp}} = 1 \text{ khi } \frac{P}{P_y} \leq 0,2$$

Mặt chảy dẻo trong mặt phẳng của Orbison:

$$\alpha = 1,15p^2 + m_y^2 + 3,67p^2m_y^2 \quad (9)$$

$$\text{Với } p = \frac{P}{P_y}; m_z = \frac{M_y}{M_{py}};$$

Trong đó, M_{py} là mô men cực hạn của vật liệu thép.

Khi phần tử thanh dàn chịu lực nén, thay

$P_y = P_{cr}$. P_{cr} theo tiêu chuẩn AISC-LRFD (2005) được xác định theo công thức:

$$\frac{P_{cr}}{P_y} = \begin{cases} \exp(-0.419\lambda_c^2), \lambda_c \leq 1.5 \\ \frac{0.877}{\lambda_c^2}, \lambda_c > 1.5 \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (11)$$

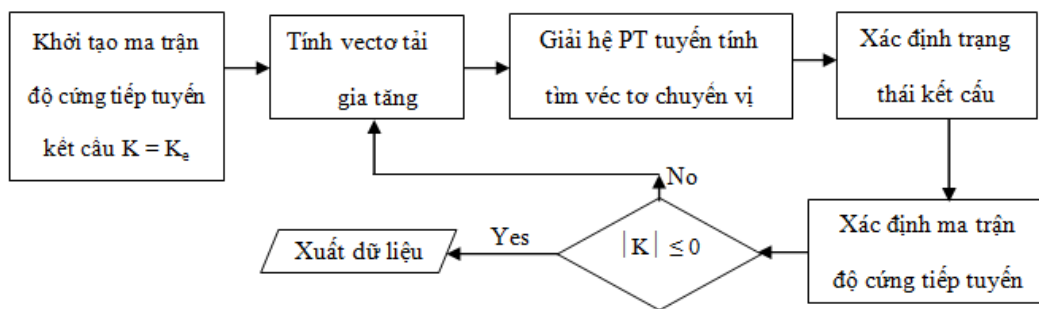
Trong đó, $c=\cos(\psi)$, $s=\sin(\psi)$; với ψ là góc hợp bởi trục tọa độ Oxy với hệ trục tọa độ Ox'y'.

2.5. Chuyển đổi hệ trục tọa độ phần tử

Ma trận chuyển đổi hệ trục tọa độ từ địa phương sang hệ trục tọa độ tổng thể có dạng như sau:

2.6. Phương pháp giải và thuật toán

Hình 2. Sơ đồ khối phân tích hệ



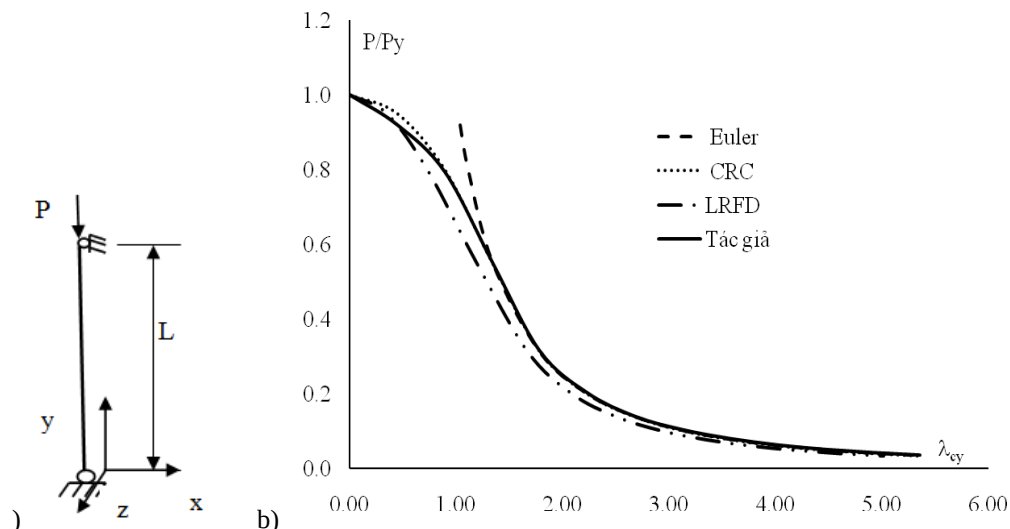
3. Kết quả số

Tác giả khảo sát ba kết cấu khung dầm thép phẳng để chứng minh được tính khả thi của phương pháp so với những phương pháp phân tích khác như sau: Bài toán cột hai đầu khớp chịu tải trọng tập trung, bài toán khung dầm thép phẳng ba thanh chịu tải tập trung và bài toán khung giằng thép phẳng chịu tải tập trung.

3.1. Bài toán cột hai đầu khớp chịu tải trọng tập trung

Bài toán cột thép có một đầu ngàm, một đầu khớp được cho như hình 3. Các thông số về vật liệu và hình học được cho như sau: Module đàn hồi vật liệu thép $E = 200GPa$; Ứng suất chảy dẻo $\sigma_y = 250MPa$; Tiết diện cột W8×31;

Hình 3. a) Sơ đồ cột hai đầu khớp chịu tải trọng tập trung;
b) Biểu đồ quan hệ giữa hệ số tải trọng-tham số độ mảnh cột hai đầu khớp



Bán kính quán tính cột $r_y = 51,2$ (mm). Theo lý thuyết Euler lực tới hạn của cột chịu nén đúng tâm được tính như sau:

$$P_{cr} = \frac{P_y}{\lambda_c^2} \quad (12)$$

Với $\lambda_c = \frac{KL}{r_y} \sqrt{\frac{\sigma_y}{\pi^2 E}}$: thông số độ mảnh trục yếu, $K=1$ (cột hai đầu khớp).

Theo kết quả nghiên cứu của Hội đồng Nghiên cứu Cột CRC, P_{cr} cho cột thép chữ I, hai đầu khớp, được tính theo công thức:

$$P_{cr} = \begin{cases} 1 - 0,25\lambda_c^2, & \lambda_c \leq \sqrt{2} \\ \lambda_c^{-2}, & \lambda_c > \sqrt{2} \end{cases} \quad (13)$$

Từ công thức và kết quả đạt được, tác giả có bảng so sánh sau:

Bảng 1. So sánh kết quả phân tích của cột hai đầu khớp chịu tải tập trung

L (mm)	P (kN)	Tác giả		Euler		CRC	LRFD		Tỷ lệ sai lệch CRC (%)
		P/Py	λ_c	P/Py	λ_c	P/Py	P/Py	λ_c	
0	0	1,00	0,00	1,00		1,00	1,00	0,00	0,00
3.500	1.353	0,92	0,45	0,92	1,04	0,95	0,95	0,35	-3,17
7.000	1.168	0,79	0,89	0,79	1,12	0,80	0,80	0,73	-0,80
10.500	813	0,55	1,34	0,55	1,35	0,55	0,55	1,19	0,24
14.000	463	0,31	1,79	0,31	1,78	0,31	0,31	1,67	0,37
17.500	298	0,20	2,23	0,20	2,22	0,20	0,20	2,09	0,88
21.000	205	0,14	2,68	0,14	2,68	0,14	0,14	2,51	0,10
24.500	153	0,10	3,13	0,10	3,10	0,10	0,10	2,93	1,35
28.000	118	0,08	3,57	0,08	3,54	0,08	0,08	3,35	2,00
31.500	93	0,06	4,02	0,06	3,99	0,06	0,06	3,76	1,62
35.000	75	0,05	4,47	0,05	4,43	0,05	0,05	4,18	1,72

Nhận xét:

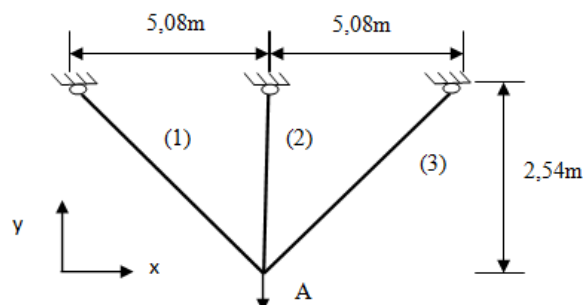
Dựa vào Bảng 1 và biểu đồ so sánh kết quả phân tích của tác giả với các kết quả Euler, CRC và LRFD, tác giả nhận thấy rằng kết quả phân tích đạt được khá gần với đường CRC với tỷ lệ sai lệch lớn nhất là 3,17%, khá nhỏ. Kết quả của LRFD có kể đến độ sai lệch hình học ban đầu nằm dưới kết quả phân tích của tác giả là hợp lý.

Tác giả đã mô phỏng một phần tử cho cấu kiện cột hai đầu khớp chịu tải trọng tập trung tại đầu cột có xét đến sự thay đổi kích thước chiều dài cột và đã có kết quả khá tốt.

Đây chính là ưu điểm của phương pháp dầm-cột dùng hàm ổn định để mô phỏng tác động phi tuyến hình học.

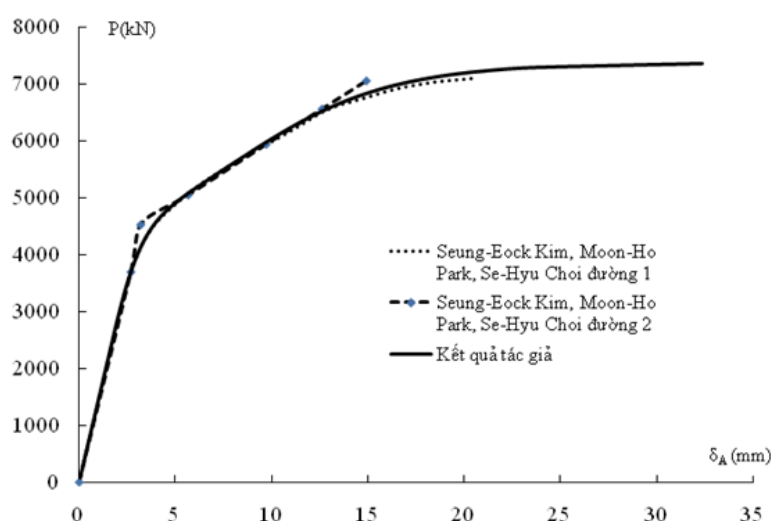
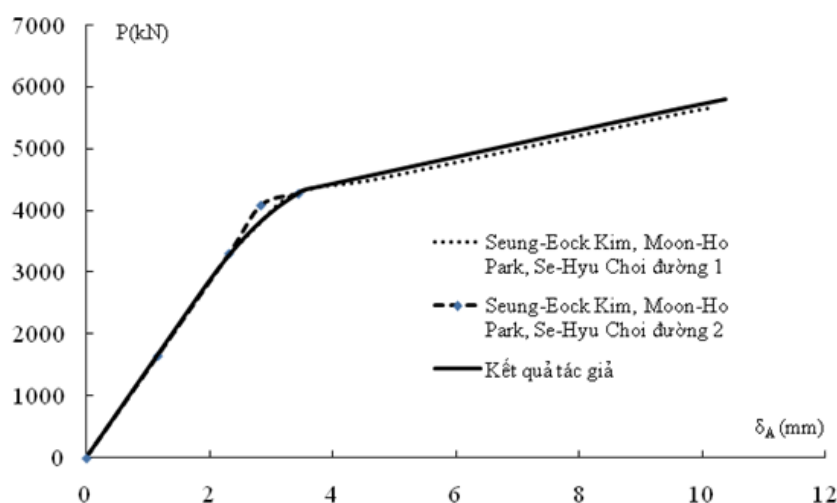
3.2. Khung dầm thép phẳng ba thanh chịu tải tập trung

Bài toán khung dầm thép phẳng ba thanh chịu tải tập trung được mô tả như Hình 4. Các thông số về vật liệu và hình học được cho như sau: Module đàn hồi vật liệu thép $E = 200GPa$; Ứng suất chảy dẻo $\sigma_y = 250MPa$; Sử dụng tiết diện thép W14×82 cho tất cả các thanh; hệ số poisson $\nu = 0,3$;

Hình 4. Sơ đồ cột hai đầu khớp chịu tải trọng tập trung

Bài toán này được Seung-Eock Kim, Moon-Ho Park, Se-Hyu Choi (2001) đã phân tích sử dụng phương pháp năng lượng. Tác giả sử dụng chương trình của mình và đánh số

phần tử các thanh như trên Hình 4. Kết quả phân tích lực tác dụng-chuyển vị được thể hiện như hình sau:

Hình 5. Quan hệ giữa lực tác dụng – chuyển vị điểm A khi P hướng lên**Hình 6. Quan hệ giữa lực tác dụng – chuyển vị điểm A khi P hướng xuống**

Bảng 2. So sánh tải trọng giới hạn P_u bài toán khung dàn thép phẳng ba thanh khi P hướng xuống

STT	Phương pháp phân tích	P_u (kN)	Sai số (%)
1	Phương pháp năng lượng - Seung Eock Kim và các cộng sự (2001) đường 1	7097	3,43
2	Phương pháp năng lượng - Seung Eock Kim và các cộng sự (2001) đường 2	7060	3,93
3	Tác giả (2014)	7350	

Bảng 3. So sánh tải trọng giới hạn P_u bài toán khung dàn thép phẳng ba thanh khi P hướng lên

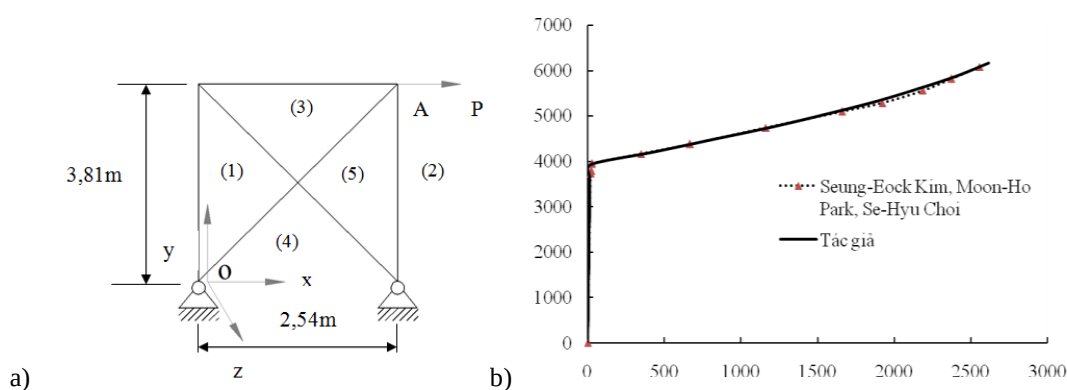
STT	Phương pháp phân tích	P_u (kN)	Sai số (%)
1	Phương pháp năng lượng - Seung Eock Kim và các cộng sự (2001) đường 1	5768	2,12
2	Phương pháp năng lượng - Seung Eock Kim và các cộng sự (2001) đường 2	4273	2,64
3	Tác giả (2014)	5810	

Qua xem xét Hình 5 và Hình 6 mô tả mối quan hệ giữa lực tác dụng-chuyển vị tại điểm A khi P hướng lên và khi P hướng xuống, tác giả nhận thấy rằng ứng xử của kết cấu khi chịu tải tại điểm A trong cả giai đoạn đàn hồi và giai đoạn chảy dẻo hoàn toàn trùng khớp với kết quả phân tích theo phương pháp năng lượng của Seung-Eock Kim khi lực P hướng xuống với sai số về tải tới hạn là 3,43% và 3,93%; và khi lực P hướng lên thì sai số về lực tới hạn giữa kết quả tác giả với kết quả phân tích theo phương pháp năng lượng của

Seung-Eock Kim là 2,12% và 2,64%.

3.3. Khung giằng thép phẳng chịu tải tập trung

Bài toán khung giằng thép phẳng có liên kết hai đầu khớp cố định ở gối tựa và chịu tải tập trung ngang tại nút được mô tả như Hình 4. Các thông số về vật liệu và hình học được cho như sau: Module đàn hồi vật liệu thép $E = 200GPa$; Ứng suất chảy dẻo $\sigma_y = 250MPa$; Sử dụng tiết diện thép W14×82 cho tất cả các thanh; hệ số poisson $\nu = 0,3$;

Hình 7. a) Sơ đồ khung giằng thép phẳng;**b) Quan hệ giữa lực tác dụng – chuyển vị điểm A.**

Bài toán này được Seung-Eock Kim, Moon-Ho Park, Se-Hyu Choi (2001) đã phân tích sử dụng phương pháp năng lượng. Tác giả sử dụng chương trình của mình và đánh số

phần tử các thanh như trên Hình 7. Kết quả phân tích lực tác dụng tới hạn của tác giả so với Seung Eock Kim như sau:

Bảng 4. So sánh tải trọng giới hạn P_u bài toán khung giằng thép phẳng

STT	Phương pháp phân tích	P_u (kN)	Sai số (%)
1	Phương pháp năng lượng - Seung Eock Kim và các cộng sự (2001)	6078	1,34
2	Tác giả (2014)	6160	

Nhận xét:

Qua xem xét Hình 4 mô tả mối quan hệ giữa lực tác dụng-chuyển vị, tác giả nhận thấy rằng ứng xử của kết cấu khi chịu tải tại điểm A trong cả giai đoạn đàn hồi và giai đoạn chảy dẻo hoàn toàn trùng khớp với kết quả phân tích theo phương pháp năng lượng của Seung-Eock Kim với sai số về tải tới hạn là 1,34%.

4. Kết luận

Từ các kết quả của bài báo, các kết luận được thể hiện như sau:

Sử dụng phương pháp phân tích nâng cao đã phân tích được những ứng xử của hệ kết cấu khung dàn khi có lực tác dụng mà không cần phải sử dụng hệ số uốn dọc và kể đến sự không tường minh thông qua việc kiểm tra độ mảnh, tải tới hạn Euler cho từng trường hợp thanh. Và tất cả những việc kiểm tra này đã được kể đến trong phương pháp phân tích nâng cao sử dụng phương pháp dầm-cột, và đây cũng là điểm thuận lợi lớn nhất cho người

thiết kế, đã có thể nhìn thấy được khả năng chịu tải cực hạn cũng như chuyển vị của toàn bộ hệ khi kết cấu đạt đến tải tới hạn.

Sử dụng phương pháp dầm-cột để diễn tả tác động phi tuyến hình học cho kết quả gần giống với những phương pháp phân tích phi tuyến khác. Nhưng việc sử dụng phương pháp dầm-cột giúp cho việc chia nhỏ số phần tử ít hơn, ít tốn bộ nhớ phân tích, giảm thiểu được thời gian phân tích bài toán.

Đối với bài toán cột, kết quả sử dụng phương pháp của tác giả so với phương pháp ASD và AISC-LRFD sai khác khá nhỏ. Vì vậy, khi sử dụng phương pháp dầm-cột dùng hàm ổn định của tác giả có thể chấp nhận được.

Sử dụng phương pháp dầm-cột dùng hàm ổn định đã phân tích được những ứng xử của hệ và xác định được tải tới hạn của toàn bộ hệ kết cấu khi chịu lực tác dụng gia tăng. Và đây cũng là điểm (quan trọng) nổi bật của phương pháp này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- Chu Quốc Thắng. (1997). Phương pháp phần tử hữu hạn. Nhà xuất bản Khoa học và Đại học Kỹ thuật.
- W.F. Chen, E.M. Lui. (1987). Structural Stability – Theory and Implementation, Elsevier.
- P-E Austrell, O Dahlblom, J Lindemann và các tác giả. (2006). Calfem – A finite Element Toolbox (version 3.4). The Division of Structural Mechanics.
- Cuong Ngo-Huu, Seung-Eock Kim, Jung-Ryul Oh. (2006). Nonlinear analysis of space steel frames using fiber plastic hinge concept. ScienceDirect.

-
- McGuire and H.Gallagher, D. Ziemian. (2000). Matrix Structural Analysis. John Wiley & Sons, Inc.
- Seung-Eock Kim, Moon-Ho Park, Se-Hyu Choi. Direct design of three-dimensional frames using practical advanced analysis. Journal of Constructional Steel Research 57 (2001) 907-923.
- Cho Suk Han. (2006). Second-order analysis and design of Angle Trusses and Frames. Thesis.
- P-E Austrell, O Dahlblom, J Lindemann và các tác giả. (2006). Calfem – A finite Element Toolbox (version 3.4). The Division of Structural Mechanics.