

PHÂN TÍCH ỔN ĐỊNH CỦA TẤM FGM SỬ DỤNG LÝ THUYẾT BIẾN DẠNG CẮT BẠC CAO

Ngày nhận bài: 01/12/2013

Ngày nhận lại: 18/02/2014

Ngày duyệt đăng: 10/03/2014

Ngô Phát Đạt¹

Ngô Thành Phong²

Trần Trung Dũng³

TÓM TẮT

Trong bài báo này, phương pháp phần tử hữu hạn được tích hợp với lý thuyết biến dạng cắt bậc cao loại C^0 để phân tích ổn định cơ và nhiệt của tấm vật liệu biến đổi chức năng (tấm FGM). Trong tấm FGM, thuộc tính vật liệu được giả định phân bố khác nhau dọc theo chiều dày bởi một luật phân phối đơn giản các thành phần thể tích. Ổn định của tấm FGM chịu tác động của tải cơ và nhiệt sẽ được phân tích số chi tiết. Độ chính xác và tin cậy của phương pháp hiện tại được kiểm chứng bằng cách so sánh với kết quả của những lời giải khác đã công bố trước đây.

Từ khóa: Tấm FGM, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao (HSĐT), phân tích ổn định.

ABSTRACT

In this paper, the finite element method is intergated with the C^0 -type higher-order shear deformation theory (HSĐT) for mechanical and thermal buckling analyses of functionally graded material plates (FGM). In the FGM, the material properties are assumed to vary through the thickness by a simple power rule of the volume fractions of the constituents. The buckling behavior of FGM plates under mechanical and thermal loads is numerically analyzed in detail. The accuracy and reliability of the present method is verified by comparing with those of other published solutions in the literature.

Keywords:

TỔNG QUAN

Năm 1984, một nhóm nhà khoa học Nhật Bản [1] đã tìm ra một mô hình vật liệu mới với những thuộc tính vượt trội so với các vật liệu trước đây và được gọi là vật liệu biến đổi chức năng (functionally graded material - FGM). Mặt trên FGM thường được làm từ gốm và mặt dưới là kim loại. Gốm cách nhiệt rất tốt và chịu được nhiệt độ cao, trong khi đó kim loại

chịu được tác động cơ học khá tốt. Vì vậy FGM có thể làm việc trong môi trường nhiệt độ cao và rất phù hợp cho các cấu trúc trong hàng không vũ trụ, nhà máy điện hạt nhân hay công nghiệp bán dẫn, v.v.

Với những thuộc tính ưu việt của FGM trong nhiều ứng dụng thực tiễn, FGM đã được các nhà khoa học trên thế giới quan tâm và nghiên cứu bằng nhiều phương pháp khác nhau. Huang và Shen

¹ Trường Đại học Khoa học tự nhiên, Đại học Quốc gia Tp.HCM.

² Trường Đại học Khoa học tự nhiên, Đại học Quốc gia Tp.HCM.

³ Trường Đại học Mở Tp.HCM.

[2] đã nghiên cứu đáp ứng dao động phi tuyến của tấm FGM trong môi trường nhiệt. Yang và Shen [3] đã phân tích dao động tự do tấm FGM trong môi trường nhiệt. Najafizadeh [4] đã phân tích ổn định tấm tròn FGM dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc cao. Vel và Batra [5] đã sử dụng lời giải 3D để phân tích đáp ứng lực của tấm FGM bằng nhiều lý thuyết tấm khác nhau. Matsunaga [6,7] đã sử dụng lý thuyết bậc cao và mô hình 2D để phân tích dao động tự do và ổn định của tấm FGM. Thêm vào đó, một số phương pháp phần tử hữu hạn [8-26] hoặc phương pháp không lưới (meshfree methods) [27-29] cũng đã được nghiên cứu để giải cho tấm và tấm FGM.

Tuy nhiên phần lớn các nghiên cứu trên đều sử dụng lý thuyết biến dạng cắt bậc cao liên tục C^1 (xấp xỉ phần tử hữu hạn bậc cao). Bên cạnh đó, hầu hết các lý thuyết tấm đều bắt buộc phần tử liên tục C^1 vì phương trình vi phân của tấm là phương trình vi phân bậc bốn. Vì vậy, việc chia lưới và xấp xỉ trường chuyển vị sẽ khá phức tạp, đòi hỏi chi phí tính toán khá cao. Để khắc phục vấn đề trên, lý thuyết biến dạng cắt bậc cao loại C^0 (C^0 -HSDT) [30, 28] đã được đề xuất. Tuy nhiên, phần tử tam giác tuyến tính kết hợp C^0 -HSDT cho phân tích ổn định cơ nhiệt của tấm FGM vẫn còn hạn chế.

Trong bài báo này, chúng tôi đã áp dụng phương pháp trên (phần tử tam giác ba nút kết hợp lý thuyết biến dạng cắt bậc cao loại C^0) để phân tích lớp bài toán về ổn

định cơ nhiệt của tấm FGM. Ảnh hưởng của tải cơ và tải nhiệt đến độ ổn định của tấm FGM sẽ được khảo sát số chi tiết và so sánh với kết quả của các phương pháp khác đã được công bố trước đây để đánh giá độ chính xác và tin cậy của phương pháp. Các thuộc tính vật liệu dọc theo chiều dày tấm sẽ phụ thuộc vào luật phân phối tỉ lệ thể tích của các thành phần cấu tạo nên tấm FGM.

2. PHƯƠNG TRÌNH DẠNG YẾU VÀ CÔNG THỨC PHẦN TỬ HỮU HẠN

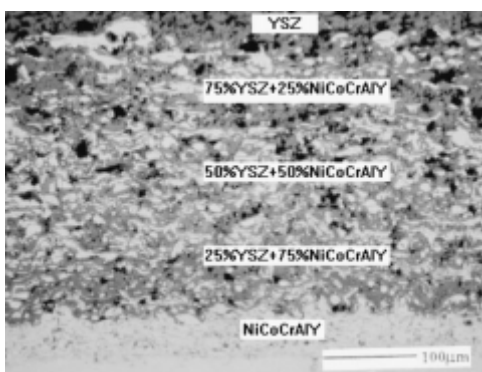
2.1. Vật liệu FGM

Vật liệu FGM thường được hình thành từ hai hay nhiều loại vật liệu khác nhau và được phân bố dọc theo chiều dày của tấm theo một tỉ lệ nhất định như thể hiện trong Hình 1a. Thuộc tính vật liệu FGM sẽ phụ thuộc vào tỉ lệ phân phối giữa các vật liệu và được cho bởi công thức sau [31]

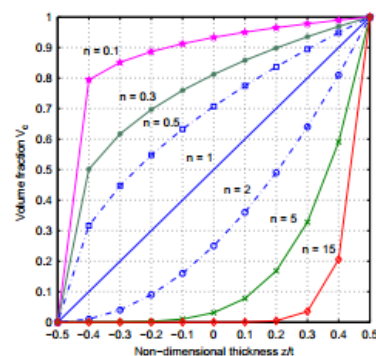
$$P(z) = (P_c - P_m)V_c + P_m ; V_c = \left(\frac{1}{2} + \frac{z}{t}\right)^n \quad (n \geq 0) \quad (1)$$

trong đó m và c là ký hiệu cho kim loại (metal) và gốm (ceramic); P là thuộc tính vật liệu bao gồm mô đun đàn hồi Young E , khối lượng riêng ρ , hệ số Poisson ν , hệ số dẫn nhiệt k và hệ số giãn nở nhiệt α ; P_c và P_m là ký hiệu thuộc tính của gốm và kim loại; V_c là tỉ lệ thể tích của gốm; z là tọa độ dọc theo chiều dày của tấm và nằm trong khoảng từ $-t/2$ đến $t/2$; n là hệ số tỉ lệ thể tích. Hệ số tỉ lệ thể tích phân bố dọc theo chiều dày được thể hiện trong Hình 1b.

Hình 1. (a) Vật liệu FGM; (b) Tỉ lệ thể tích V_c dọc theo chiều dày tấm



(a)



(b)

Khi $n = 0$, tấm sẽ hoàn toàn làm bằng gốm và khi $n \rightarrow \infty$, tấm sẽ hoàn toàn là vật liệu kim loại.

2.2. Phương trình dạng yếu và công thức phần tử hữu hạn cho tấm FGM

Trong lý thuyết tấm, phương trình vi phân của tấm là phương trình vi phân bậc bốn. Do vậy để xấp xỉ trường chuyển vị

của tấm đòi hỏi phải xấp xỉ phần tử bậc cao (liên tục C^1). Như thế rất khó khi áp dụng phần tử hữu hạn thông thường để xấp xỉ trường chuyển vị của tấm vì phần tử hữu hạn thông thường chỉ liên tục C^0 . Để khắc phục khó khăn này giáo sư Reddy [30,31] đã xây dựng mô hình liên tục C^0 cho phần tử tấm và trường chuyển vị của tấm sẽ được định nghĩa theo công thức sau

$$u = u_0 + \left(z - \frac{4z^3}{3t^2} \right) \beta_x - \frac{4z^3}{3t^2} \phi_x; \quad v = v_0 + \left(z - \frac{4z^3}{3t^2} \right) \beta_y - \frac{4z^3}{3t^2} \phi_y; \quad w = w_0 \quad (2)$$

trong đó t là chiều dày tấm, $\mathbf{u}_0 = \{u_0 \ v_0\}^T$ và w_0 là chuyển vị màng và độ võng tại mặt phẳng trung hòa; và $\boldsymbol{\beta} = \{\beta_x \ \beta_y\}^T$ là góc xoay xung quanh trục y và x .

Trong phương trình (2) giáo sư Reddy đã cộng thêm hai biến góc xoay $\boldsymbol{\phi} = \{\phi_x \ \phi_y\}^T$ để chuyển vector chuyển vị có 5 bậc tự do tại nút cho phần tử liên tục C^1 thành vector chuyển vị có 7 bậc tự do mỗi nút cho phần tử liên tục C^0 phù hợp với lý thuyết phần tử hữu hạn $\mathbf{u} = [u_0 \ v_0 \ w_0 \ \beta_x \ \beta_y \ \phi_x \ \phi_y]^T$.

Biến dạng trong mặt phẳng cho tấm Mindlin cho bởi công thức sau

$$[\varepsilon_{xx} \ \varepsilon_{yy} \ \gamma_{xy}]^T = \boldsymbol{\varepsilon}_0 + z\boldsymbol{\kappa}_1 + z^3\hat{\mathbf{e}}_2 \quad (3)$$

trong đó biến dạng màng được tính bởi

$$\boldsymbol{\varepsilon}_0 = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} \ \frac{\partial v_0}{\partial y} \ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} \right\} = \nabla_s \mathbf{u}_0 \quad (4)$$

và biến dạng uốn được tính theo công thức sau

$$\boldsymbol{\kappa}_1 = \frac{1}{2} \{ \nabla \boldsymbol{\beta} + (\nabla \boldsymbol{\beta})^T \}; \quad \boldsymbol{\kappa}_2 = \frac{\lambda}{6} \{ (\nabla \boldsymbol{\phi} + (\nabla \boldsymbol{\phi})^T) + (\nabla \boldsymbol{\beta} + (\nabla \boldsymbol{\beta})^T) \} \quad \text{với } \lambda = -\frac{4}{t^2} \quad (5)$$

và biến dạng cắt được tính bởi

$$[\gamma_{xz} \ \gamma_{yz}]^T = \hat{\mathbf{a}}_s + z^2 \hat{\mathbf{e}}_s; \quad \hat{\mathbf{a}}_s = \nabla w + \boldsymbol{\beta}; \quad \hat{\mathbf{e}}_s = c(\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\phi}) \quad (6)$$

với $\nabla = [\partial / \partial x \ \partial / \partial y]^T$ là toán tử đạo hàm.

Quan hệ ứng suất và biến dạng từ định luật Hook

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{E(z)}{1-\nu(z)^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu(z) & 0 \\ \nu(z) & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu(z)}{2} \end{bmatrix} (\hat{\mathbf{a}}_0 + z\boldsymbol{\kappa}_1 + z^3\boldsymbol{\kappa}_2); \quad \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{E(z)}{2(1+\nu(z))} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\hat{\mathbf{a}}_s + z^2 \hat{\mathbf{e}}_s) \quad (7)$$

với $E(z)$ là mô đun đàn hồi Young; $\nu(z)$ là hệ số Poisson phụ thuộc luật phân phối cho bởi phương trình (1).

Phương trình dạng yếu cho phân tích ổn định tấm FGM được cho bởi

$$\int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_p^T \mathbf{D}^* \boldsymbol{\varepsilon}_p d\Omega + \int_{\Omega} \delta \boldsymbol{\gamma}^T \mathbf{D}_s^* \boldsymbol{\gamma} d\Omega + t \int_{\Omega} \nabla^T \delta w \hat{w}_0 \nabla w d\Omega + t \int_{\Omega} \left[\nabla^T \delta u_0 \quad \nabla^T \delta v_0 \right] \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla u_0 \\ \nabla v_0 \end{bmatrix} d\Omega + \frac{t^3}{12} \int_{\Omega} \left[\nabla^T \delta \beta_x \quad \nabla^T \delta \beta_y \right] \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla \beta_x \\ \nabla \beta_y \end{bmatrix} d\Omega + \frac{t^3}{12} \int_{\Omega} \left[\nabla^T \delta \phi_x \quad \nabla^T \delta \phi_y \right] \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 & 0 \\ 0 & \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nabla \phi_x \\ \nabla \phi_y \end{bmatrix} d\Omega = 0 \tag{8}$$

với $\boldsymbol{\varepsilon}_p, \mathbf{a}$ có dạng

$$\boldsymbol{\varepsilon}_p = \{ \boldsymbol{\varepsilon}_0 \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \}^T, \quad \mathbf{a} = \{ \boldsymbol{\varepsilon}_s \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_s \}^T \tag{9}$$

và ma trận hằng số vật liệu \mathbf{D}^* và \mathbf{D}_s^* được cho bởi

$$\mathbf{D}^* = [\mathbf{A} \quad \mathbf{B} \quad \mathbf{E}; \mathbf{B} \quad \mathbf{D} \quad \mathbf{F}; \mathbf{E} \quad \mathbf{F} \quad \mathbf{H}], \quad \mathbf{D}_s^* = [\mathbf{A}^s \quad \mathbf{B}^s; \mathbf{B}^s \quad \mathbf{D}^s] \tag{10}$$

trong đó

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_{ij}, \mathbf{B}_{ij}, \mathbf{D}_{ij}, \mathbf{E}_{ij}, \mathbf{F}_{ij}, \mathbf{H}_{ij}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z, z^2, z^3, z^4, z^6) \bar{Q}_{ij} dz \quad i, j = 1, 2, 6 \\ (\mathbf{A}_{ij}^s, \mathbf{B}_{ij}^s, \mathbf{D}_{ij}^s) &= \int_{-h/2}^{h/2} (1, z^2, z^4) \bar{Q}_{ij} dz \quad i, j = 4, 5 \end{aligned} \tag{11}$$

và

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 = \begin{bmatrix} \sigma_x^0 & \tau_{xy}^0 \\ \tau_{xy}^0 & \sigma_y^0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

Dưới tác động của tải cơ, các ứng suất có dạng

$$\sigma_x^0 = \frac{N_x^0}{t} \quad ; \quad \sigma_y^0 = \frac{N_y^0}{t} \quad ; \quad \tau_{xy}^0 = \frac{N_{xy}^0}{t} \tag{13}$$

Dưới tác động của tải nhiệt thì

$$N_x^0 = N_y^0 = \int_{-t/2}^{t/2} \frac{E(z)}{1-\nu(z)} k(z) \Delta T dz \quad ; \quad N_{xy}^0 = 0 \tag{14}$$

trong đó, $k(z)$ là hệ số dẫn nhiệt của tấm.

Trong phương pháp phần tử hữu hạn, miền bài toán Ω sẽ được rời rạc thành N_e phần tử sao cho $\Omega = \bigcup_{e=1}^{N_e} \Omega_e$ và $\Omega_i \cap \Omega_j \neq \emptyset, i \neq j$. Trường chuyển vị cho tấm FGM được cho bởi $\mathbf{u}^h = [u_0 \quad v_0 \quad w_0 \quad \beta_x \quad \beta_y \quad \phi_x \quad \phi_y]^T$ và được xấp xỉ theo công thức sau

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i=1}^{N_n} \text{diag}(N_i, N_i, N_i, N_i, N_i, N_i, N_i) \mathbf{d}_i = \mathbf{N} \mathbf{d} \tag{15}$$

với N_n là tổng số nút trong miền bài toán được rời rạc; N_i là hàm dạng tuyến tính của phần tử tam giác ba nút tại nút thứ i ; $\mathbf{d}_i = [u_i \quad v_i \quad w_i \quad \beta_{xi} \quad \beta_{yi} \quad \phi_{xi} \quad \phi_{yi}]^T$ là vector chuyển vị tại nút i^{th} .

Thế phương trình (15) vào (3), (6), biến dạng trong công thức (9) có thể đợc viết lại nhý sau

$$\mathbf{a}^h = [\mathbf{a}_p \quad \mathbf{a}]^T = \sum_{i=1}^{N_n} \mathbf{B}_i^* \mathbf{d}_i \quad (16)$$

với \mathbf{B}_i^* là ma trận biến dạng chuyển vị đợc cho bởi

$$\mathbf{B}_i^* = [(\mathbf{B}_i^m)^T \quad (\mathbf{B}_i^h)^T \quad (\mathbf{B}_i^{b_2})^T \quad (\mathbf{B}_i^{s_0})^T \quad (\mathbf{B}_i^{s_1})^T]^T \quad (17)$$

trong đó

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_i^m &= \begin{bmatrix} N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{i,y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i^h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_i^{s_0} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{i,x} & N_i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_i^{s_1} = c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_i & 0 & N_i \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_i^{b_2} &= \frac{c}{3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{i,x} & 0 & N_{i,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & 0 & N_{i,y} \\ 0 & 0 & 0 & N_{i,y} & N_{i,x} & N_{i,y} & N_{i,x} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (18)$$

với $N_{i,x}$ và $N_{i,y}$ là các đạo hàm của hàm dạng theo hướng x và y .

Phương trình rời rạc cho phân tích ổn định của tấm FGM có dạng

$$(\mathbf{K} - \lambda_{cr} \mathbf{K}_g) \mathbf{d} = \mathbf{0} \quad (19)$$

trong đó λ_{cr} là tải tới hạn cơ hoặc nhiệt của tấm và \mathbf{K}_g là ma trận độ cứng hình học đợc tính bởi

$$\mathbf{K}_g = \int_{\Omega} \mathbf{B}_g^T \mathbf{m} \mathbf{B}_g d\Omega \quad (20)$$

với \mathbf{m} đợc cho bởi

$$\mathbf{m} = \begin{bmatrix} t\hat{\mathbf{0}}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & t\hat{\mathbf{0}}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & t\hat{\mathbf{0}}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{t^3}{12} \hat{\mathbf{0}}_0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & \frac{t^3}{12} \hat{\mathbf{0}}_0 & 0 & 0 \\ & & & & & \frac{t^3}{12} \hat{\mathbf{0}}_0 & 0 \\ sym & & & & & & \frac{t^3}{12} \hat{\mathbf{0}}_0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

và \mathbf{K} là ma trận độ cứng toàn cục đợc lắp ghép từ các ma trận độ cứng phần tử \mathbf{K}_e có dạng sau

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{N_e} \mathbf{K}_e = \sum_{e=1}^{N_e} \underbrace{\left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}_i^T \mathbf{D}^* \mathbf{B}_j d\Omega + \int_{\Omega_e} \mathbf{S}_i^T \mathbf{D}_s^* \mathbf{S}_j d\Omega \right)}_{\mathbf{K}_e} \quad (22)$$

trong đó \mathbf{B}_i và \mathbf{S}_i được xác định bởi

$$\mathbf{B}_i = \left[(\mathbf{B}_i^m)^T (\mathbf{B}_i^b)^T (\mathbf{B}_i^{b_2})^T \right] \quad (23)$$

$$\mathbf{S}_i = \left[(\mathbf{B}_i^{s_0})^T (\mathbf{B}_i^{s_1})^T \right] \quad (24)$$

VÍ DỤ SỐ

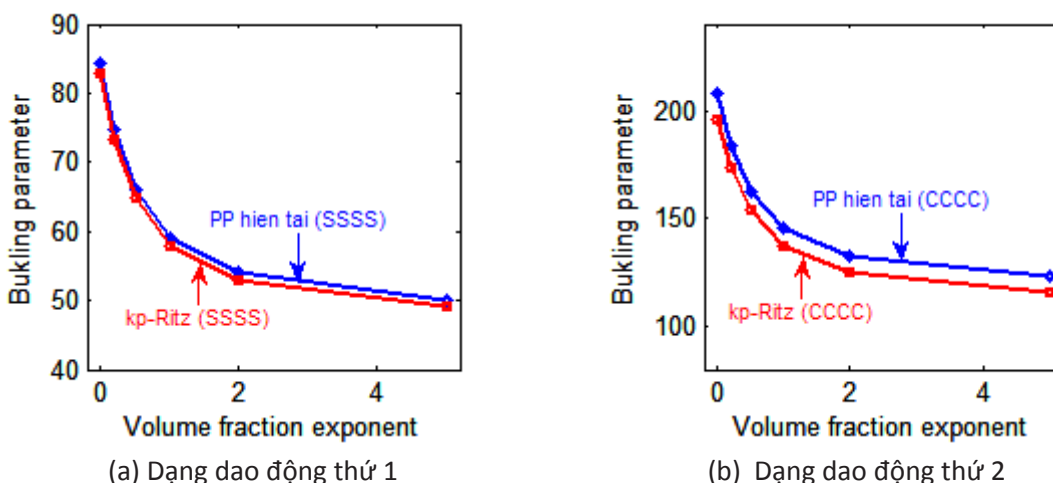
Trong phần này, chúng tôi khảo sát độ chính xác và tính hiệu quả của phương pháp hiện tại cho phân tích ổn định tấm FGM. Tấm có điều kiện biên gối tựa (simply supported – S) và ngàm (clamped – C). Ký hiệu CCCC và SSSS là điều kiện ngàm và gối tựa dọc theo 4 cạnh của tấm chữ nhật.

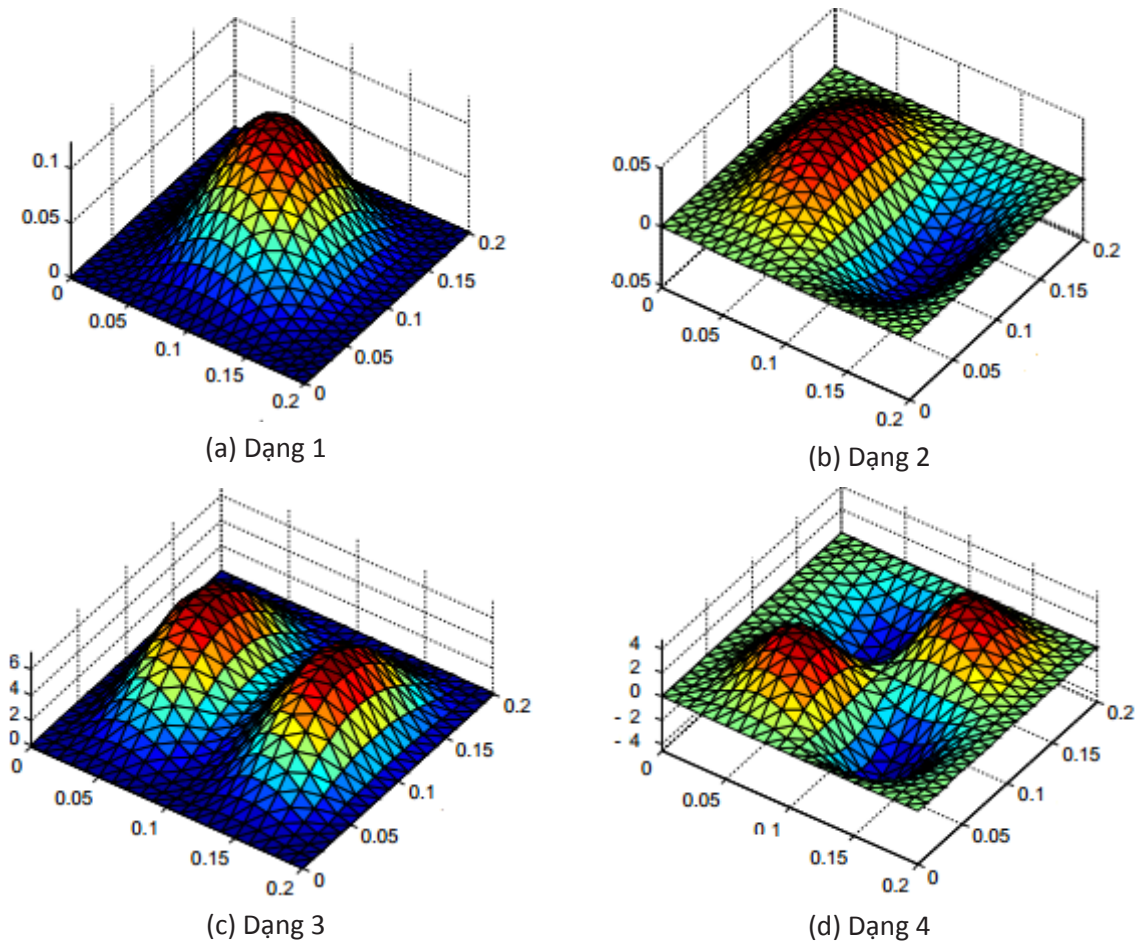
3.1. Ổn định cơ

Chúng tôi xét tấm vuông Al/ZrO₂-2 có chiều dài mỗi cạnh $L = 0.2$, chiều dày $t = 0.01$ chịu một tải nén trong mặt phẳng

Oxy. Hình 2 thể hiện tải tới hạn của tấm FGM với điều kiện biên CCCC và SSSS. Kết quả cho thấy rằng, nghiệm của phương pháp đề xuất rất trùng khớp với nghiệm kp -Ritz [28] (sử dụng phương pháp Meshfree, xấp xỉ trường chuyển vị bậc cao) cho các giá trị phân phối thể tích $n = 0, 0.2, 0.5, 1, 2, 5$. Ngoài ra, chúng ta có thể thấy rằng, tải tới hạn sẽ giảm khi tỉ lệ thể tích n tăng lên bởi vì khi n tăng thì độ cứng của tấm sẽ giảm. Ngoài ra, bốn dạng dao động ổn định đầu tiên của tấm cũng được thể hiện ở Hình 3.

Hình 2. Tải tới hạn ổn định của tấm vuông.

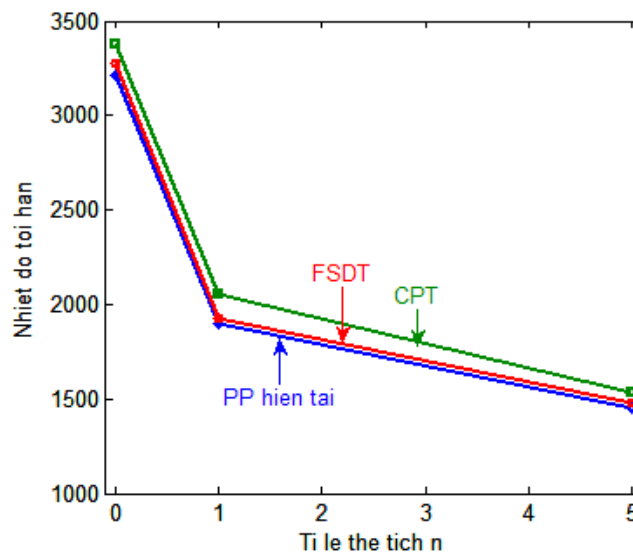


Hình 3. Bốn dạng dao động ổn định đầu tiên của tấm FGM.

3.2. Ổn định nhiệt

Trong ví dụ này, chúng tôi xét một tấm hình vuông Al/Al_2O_3 với tỉ lệ $L/t = 10$ chịu tác động bởi nhiệt độ phân bố đều dọc theo chiều dày của tấm. Hình 4 thể hiện nhiệt độ tới hạn của tấm FGM ứng với $n =$

0, 1, 5. Từ kết quả ta thấy rằng nghiệm của phương pháp hiện tại rất trùng khớp với nghiệm dựa trên lý thuyết biến dạng cắt bậc nhất (FSDT) và lý thuyết cổ điển được nghiên cứu bởi Lanhe [32] (trường chuyển vị được xấp xỉ liên tục C^1)

Hình 4. Nhiệt độ tới hạn của tấm FGM

4. KẾT LUẬN

Bài báo thể hiện một tiếp cận số đơn giản và hiệu quả, dựa trên sự kết hợp giữa phần tử tam giác ba nút và lý thuyết biến dạng cắt bậc cao loại C^0 để phân tích ổn định cơ nhiệt của tấm FGM. Thuộc tính vật liệu FGM phụ thuộc vào tỉ lệ các thành phần thể tích của gốm và kim loại và tuân

theo luật phân bố hàm số mũ. Ảnh hưởng số mũ của hàm phân bố, tác động của tải cơ và tải nhiệt đến độ ổn định của tấm FGM đã được khảo sát và so sánh với kết quả các phương pháp khác đã được nghiên cứu trước đây. Các kết quả đạt được cho thấy độ tin cậy cao của phương pháp hiện tại đối với lớp bài toán này.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Koizumi M. FGM activities in Japan. *Composites*, 28 (1997) 1–4.
2. Huang XL, Shen SH 2004, ‘Nonlinear vibration and dynamic response of functionally graded plates in thermal environments’. *International Journal of Solids and Structures*, 41, pp. 2403–2427.
3. Yang J, Shen HS 2002, ‘Vibration characteristics and transient response of shear-deformable functionally graded plates in thermal environments’, *Journal of Sound and Vibration*, 255, pp. 579–602.
4. Najafizadeh MM and Heydari HR 2004. ‘Thermal buckling of functionally graded circular plates based on higher order shear deformation plate theory’, *European Journal of Mechanics - A/Solids*, 23, pp.1085–1100.
5. Vel SS, Batra RC 2004, ‘Three-dimensional exact solutions for the vibration of functionally graded rectangular plate’, *Journal of Sound and Vibration*, 272, pp.703–730.
6. Matsunaga H. Free vibration and stability of functionally graded plates according to a 2-D higher-order deformation theory. *Composite Structures*, 82 (2008) 499–512.
7. Matsunaga H. Thermal buckling of functionally graded plates according to a 2D higher-order deformation theory. *Composite Structures*, 90 (2009) 76–86.
8. Croce LD, Venini P. Finite elements for functionally graded Reissner–Mindlin plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 (2007) 705–725.
9. Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Nguyen-Xuan H, Thai-Hoang C 2012, A cell-based smoothed discrete shear gap method using triangular elements for static and free vibration analyses of Reissner–Mindlin plates’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 91(7), pp. 705-741.
10. Nguyen-Thoi T, Bui-Xuan T, Phung-Van P, Nguyen-Xuan H, Ngo-Thanh P. Static, free vibration and buckling analyses of stiffened plates by CS-FEM-DSG3 using triangular elements. *Computers & Structures*, 125 (2013) 100-113.
11. Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Thai-Hoang C, Nguyen-Xuan H 2013, ‘A cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-DSG3) using triangular elements for static and free vibration analyses of shell structures’, *International*

Journal of Mechanical Sciences, 74, pp. 32-45.

12. Phung-Van P, Nguyen-Thoi T, Le-Dinh T, Nguyen-Xuan H. Static and free vibration analyses and dynamic control of composite plates integrated with piezoelectric sensors and actuators by the cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3). *Smart Materials and Structures*, 22 (2013) 095026.
13. Nguyen-Thoi T, Bui-Xuan T, Phung-Van P, Nguyen-Hoang S, Nguyen-Xuan H 2013, 'An edge-based smoothed three-node Mindlin plate element (ES-MIN3) for static and free vibration analyses of plates', *KSCE Journal of Civil Engineering*, (2013) at press.
14. Phung-Van P, Nguyen-Thoi T, Tran V. Loc, Nguyen-Xuan H 2013, 'A cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3) based on the C^0 -type higher-order shear deformation theory for static and free vibration analyses of functionally graded plates', *Computational Materials Science*, 79, pp. 857-872.
15. Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Rabczuk T, Nguyen-Xuan H, Le-Van C 2013, 'Free and forced vibration analysis using the n -sided polygonal cell-based smoothed finite element method (n CS-FEM)', *International Journal of Computational Methods*, 10(1) (2013) 1340008.
16. Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Rabczuk T, Nguyen-Xuan H, Le-Van C. An application of the ES-FEM in solid domain for dynamic analysis of 2D fluid-solid interaction problems. *International Journal of Computational Methods*, 10(1) (2013) 1340003.
17. Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Ho-Huu V, Le-Anh L 2014, 'An edge-based smoothed finite element method (ES-FEM) for dynamic analysis of 2D fluid-solid interaction problems', *KSCE Journal of Civil Engineering*, (2014) at press.
18. Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Nguyen-Hoang S, Lieu-Xuan Q 2014, 'A smoothed coupled NS/ n ES-FEM for dynamic analysis of 2D fluid-solid interaction problems', *Applied Mathematics and Computation*, 232, pp. 324-346.
19. Phung-Van P, Nguyen-Thoi T, Luong-Van H, Lieu-Xuan Q 2014, 'Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using a cell-based smoothed three-node plate element (CS-MIN3) based on the C^0 -HSDT', *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 270, pp.15-36.
20. Phung-Van P, Nguyen-Thoi T, Dang-Trung H, Nguyen-Minh N. A cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3) using layerwise theory based on the C^0 -type higher-order shear deformation for static and free vibration analyses of sandwich and composite plates. *Composite Structures*, (2014), DOI: 10.1016/j.compstruct.2014.01.038.
21. Phung-Van P, Nguyen-Thoi T, Luong-Van H, Thai-Hoang C, Nguyen-Xuan H 2014, 'A cell-based smoothed discrete shear gap method (CS-FEM-DSG3) using layerwise deformation theory for dynamic response of composite plates resting on viscoelastic foundation', *Computer Methods in Applied Mechanics*

- and Engineering*, 271, pp. 138-159
22. Phung-Van P, Thai H. Chien, Nguyen-Thoi T, Nguyen-Xuan H. Static and free vibration analyses of composite and sandwich plates by an edge-based smoothed discrete shear gap method (ES-DSG3) using triangular elements based on layerwise theory. *Composites part B Engineering*, 60 (2014) 227-238.
 23. Nguyen-Thoi T, Luong-Van H, Phung-Van P, Rabczuk T, Tran-Trung D 2013, 'Dynamic responses of composite plates on the Pasternak foundation subjected to a moving mass by a cell-based smoothed discrete shear gap (CS-FEM-DSG3) method', *International Journal of Composite Materials*, 3(6A), pp.19-27.
 24. Nguyen-Thoi T, Phung-Van P, Luong-Van H, Nguyen-Van H, Nguyen-Xuan H 2013, 'A cell-based smoothed three-node Mindlin plate element (CS-MIN3) for static and free vibration analyses of plates', *Computational Mechanics*, 50(1), pp. 65-81.
 25. Luong-Van H, Nguyen-Thoi T, Liu GR, Phung-Van P. A cell-based smoothed finite element method using three-node shear-locking free Mindlin plate element (CS-FEM-MIN3) for dynamic response of laminated composite plates on viscoelastic foundation. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, (2013) DOI:10.1016/j.enganabound.2013.11.008.
 26. Zhen W, Wanji C 2006, 'A higher-order theory and refined three-node triangular element for functionally graded plates', *European Journal of Mechanics A/ Solids*, 25, pp. 447-63.
 27. Zhao X, Liew KM. Geometrically nonlinear analysis of functionally graded plates using the element-free kp -Ritz method. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 198 (2009) 2796-811.
 28. Zhao X, Lee YY, Liew KM. Mechanical and thermal buckling an analysis of functionally graded plates. *Composite Structures*, 20 (2009) 161-171.
 29. Liew KM, Zhao X, Ferreira AJM. A review of meshless methods for laminated and functionally graded plates and shells. *Composite Structures*, 93 (2011) 2031-2041.
 30. Shankara CA, Iyegar NGR 1996, 'A C^0 element for the free vibration analysis of laminated composite plates', *Journal of Sound and Vibration*, 191, pp.721-738.
 31. Reddy JN 2000, 'Analysis of functionally graded plates', *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47 (2000) 663-684.
 32. Lanhe W. Thermal buckling of a simply supported moderately thick rectangular FGM plate. *Composite Structures* 64 (2006) 211-218.