ỨNG DỤNG PHƯƠNG PHÁP PHẦN TỬ HỮU HẠN TRƠN NÚT CHO BÀI TOÁN PHÂN TÍCH DAO ĐỘNG TỰ DO KHÔNG CẢN KẾT CẤU TẤM COMPOSITE LỚP

ThS. Trần Trung Dũng[1]
Thái Hoàng Chiến[2]

TÓM TẮT

Trong bài báo này, phương pháp phần tử hữu hạn trơn nút NS-FEM (the node-based smoothed finite element method) sử dụng phần tử tam giác được phát triển cho bài toán phân tích dao động tự do không cản của kết cấu tấm composite lớp. Cơ sở lý thuyết tấm sẽ dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất (FSDT). Trong phương pháp NS-FEM, ma trận độ cứng được tính toán bởi kỹ thuật trơn hóa biến dạng trên miền trơn (smoothing domains) dựa trên nút của phần tử. Để giải quyết hiện tượng "shear locking" khi tấm có chiều dày mỏng dần, các công thức của phương pháp NS-FEM được thiết lập kết hợp với phương pháp "rời rạc lệch trượt" DSG3 (discrete shear gap method) và được gọi là phương pháp PTHH ổn định khe cắt trên miền trơn dựa trên nút phần tử NS-DSG3. Kết quả số đạt được từ phương pháp này sẽ được so sánh với các kết quả đã được công bố trước đó để để đánh giá tính hiệu quả và độ chính xác của phương pháp.

Từ Khoá: Tấm composite lớp, phương pháp phần tử hữu hạn trơn nút (NS-FEM), phương pháp rời rạc lệch trượt (DSG), thuyết biến dạng trượt bậc nhất (FSDT).

ABSTRACT

This paper attempts to further develop the node-based smoothed finite element method (NS-FEM) to analysis of laminated composite plates using three-node triangular meshes based on the first-order shear deformation plate theory (FSDT). In the NS-FEM, a system stiffness matrix is performed by using the strain smoothing technique over the smoothing domains associated with the nodes of the elements. In order to eliminate shear locking, the NS-FEM is incorporated with the discrete shear gap (DSG) method to give a so-called node-based smoothed discrete shear gap method (NS-DSG). The numerical results derived from this method are compared with the solutions available in the literature to validate their reliability.

Keywords: Laminated composite plates, Node-based smoothed finite element method (NS-FEM), discrete shear gap (DSG) method, first-order shear deformation plate theory (FSDT).

1. Giới thiệu

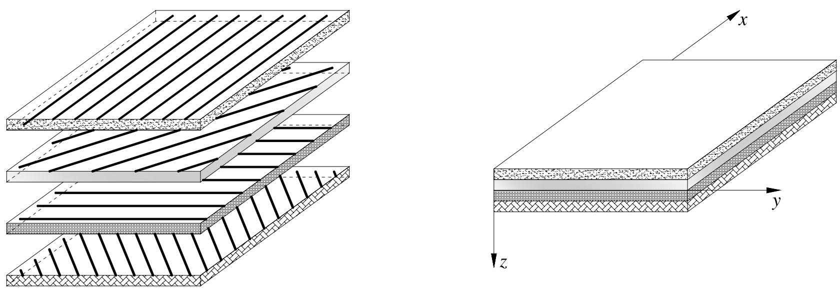
Vật liệu composite được tạo thành từ sự kết hợp từ hai hay nhiều loại vật liệu khác nhau để tạo nên vật liệu mới có đặc tính tốt hơn hẳn các vật liệu cơ bản thành phần. Thường vật liệu composite chia làm ba loại chính: composite cốt sợi (*fabrious composite),* composite hạt (*paritcular composite*) được tạo thành từ các hạt kích thước vô cùng nhỏ trộn lẫn trong vật liệu nền và composite lớp (*laminated composite*) bao gồm các lớp khác nhau xếp chồng liên tục, ví dụ các vỏ xe ôtô, máy bay,...

[1]*Giảng viên Khoa Xây Dựng và Điện, Trường Đại học Mở TP.HCM.*

[2]*Trường Đại học Tôn Đức Thắng.*

Trong bài báo này tập trung phân tích chủ yếu vào loại vật liệu composite lớp. Tấm loại này được tổ hợp từ các lớp sợi và phương của sợi không nhất thiết phải giống nhau. Chiều dày của các lớp thành phần trong kết cấu tấm composite nhiều lớp thường là những lớp mỏng, gọi là *lamina*, được sắp xếp theo trật tự sẽ thu được những tính chất như mong muốn, xem Hình 1. Vật liệu composite nhiều lớp (*laminated composite*) có những ưu điểm sau: cường độ cao, độ cứng lớn, trọng lượng nhẹ, chống ăn mòn – mài mòn, tính chất nhiệt, giới hạn mỏi…

Hình 1. Kết cấu tấm composite nhiều lớp



Với những ưu điểm như vậy, tấm làm bằng vật liệu composite lớp đang được ứng dụng rộng rãi trong nhiều ngành khoa học ứng dụng và dần chứng tỏ được ưu thế vượt trội cũng như việc ứng dụng ngày càng nhiều vật liệu composite, kết cấu thông minh đang là hướng nghiên cứu mới mẻ trên thế giới nói chung và ở nước ta nói riêng trong những năm gần đây. Tuy nhiên với sự phức tạp trong bản thân cấu trúc vật liệu nên ứng xử của tấm composite lớp vẫn đang được quan tâm nghiên cứu rộng rãi trên toàn thế giới bởi nhiều phương pháp khác nhau.

Trong các mô hình lý thuyết tính toán vật liệu composite, thuyết biến dạng trượt bậc nhất (FSDT) vẫn là phương thức hiệu quả trong phân tích tấm composite nhiều lớp bởi vì độ tin cậy của kết quả cũng như đơn giản hơn trong quá trình tính toán. Tuy nhiên phần tử dựa vào thuyết FSDT thường bị hiện tượng "shear – locking" trong trường hợp tấm là tấm mỏng. Để xử lý vấn đề này nhiều phần tử mới cũng như kỹ thuật số được phát triển như: phần tử lai hỗn hợp (mixed formulation/hybrid element), phương pháp giả định biến dạng tự nhiên (ANS – the Assumed Natural Strain method), phương pháp giả định biến dạng nâng cao (EAS – the Enhanced Assumed Strain method) [1]. Gần đây, phương pháp rời rạc lệch trượt (DSG – Discrete Shear Gap method) được đề xuất bởi Bletzinger [2] cho kết quả khử "shear – locking" một cách hiệu quả.

Bên cạnh đó, góp phần cho tiến trình phát triển ấy, Gui Rong Liu và Nguyen Thoi Trung đã kết hợp kỹ thuật mềm hóa biến dạng [3] vào phương pháp phần tử hữu hạn truyền thống, đề ra một họ phương pháp mới – phương pháp phần tử hữu hạn trơn (SFEM – Smoothed Finite Element Method). SFEM xây dựng với 4 hướng tiếp cận chính: tiếp cận dựa trên phần tử (CS-FEM) [4], tiếp cận dựa trên nút (NS-FEM) [5], tiếp cận dựa trên cạnh (ES-FEM) [6] và tiếp cận dựa trên mặt (FS-FEM) [7]. Trong số đó, phương pháp NS – FEM (node-based smoothed finite element method) dựa vào ý tưởng xây dựng miền trơn là miền bao quanh nút phần tử có những ưu điểm sau: cho kết quả chính xác hơn, và tốc độ hội tụ cao hơn các phương pháp phần tử hữu hạn thông thường với cùng số lượng nút khảo sát; không cần phải xây dựng hàm dạng một cách chính xác; áp dụng được cho cả phần tử tam giác, tứ giác và đa giác n cạnh...

Trong bài báo này, phương pháp phần tử hữu hạn trơn nút NS-FEM sử dụng phần tử tam giác sẽ được phát triển cho bài toán phân tích dao động tự do của kết cấu tấm composite lớp. Cơ sở lý thuyết tấm sẽ dựa trên lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất FSDT. Trong phương pháp NS-FEM, ma trận độ cứng được tính toán bởi kỹ thuật trơn hóa biến dạng trên miền trơn (smoothing domains) dựa trên nút của phần tử. Để giải quyết hiện tượng "shear locking" khi tấm có chiều dày mỏng dần, các công thức của phương pháp NS-FEM được thiết lập kết hợp với phương pháp "rời rạc lệch trượt" DSG3 (discrete shear gap method) và được gọi là phương pháp PTHH ổn định khe cắt trên miền trơn dựa trên nút phần tử NS-DSG3. Kết quả số đạt được từ phương pháp này sẽ được so sánh với các kết quả đã được công bố trước đó để đánh giá tính hiệu quả và độ chính xác của phương pháp.

2. Phương trình chủ đạo của tấm composit lớp theo lý thuyết biến dạng trượt bậc nhất FSDT

Xét tấm composite n lớp có tổng chiều dày h. Chuyển vị (u,v,w) tại một điểm bất kỳ lần lượt theo các phương x,y,z được xây dựng theo lý thuyết FSDT [8] như sau:

$$\begin{aligned} u(x,y,z) &= u^0(x,y) + z\beta_x(x,y) \\ v(x,y,z) &= v^0(x,y) + z\beta_y(x,y) \\ w(x,y,z) &= w^0(x,y) \end{aligned} \tag{1}$$

Trong đó: (u_0, v_0, w_0) là trường chuyển vị tại mặt trung bình và (β_x, β_y) là góc xoay của pháp tuyến quanh trục y,x.

Khi đó, các biến dạng màng, uốn $\varepsilon_p = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \gamma_{xy}]^T$ và cắt $\varepsilon^s = [\varepsilon^s_{zx} \quad \varepsilon^s_{yz}]^T$ trong mặt phẳng được viết lại:

$$\varepsilon_p = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial u_0}{\partial x} \\ \dfrac{\partial v_0}{\partial y} \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial y} + \dfrac{\partial v_0}{\partial x} \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \beta_x}{\partial x} \\ \dfrac{\partial \beta_y}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \beta_x}{\partial y} + \dfrac{\partial \beta_y}{\partial x} \end{bmatrix} = \varepsilon^m + z\varepsilon^b, \varepsilon^s = \begin{bmatrix} \varepsilon^s_{zx} \\ \varepsilon^s_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial w}{\partial x} + \beta_x \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} + \beta_y \end{bmatrix} \tag{2}$$

Đối với bài toán phân tích dao động tự do, công thức dạng yếu kết cấu tấm composite lớp:

$$\int_\Omega \delta\varepsilon_p^T \bar{\mathbf{D}} \varepsilon_p d\Omega + \int_\Omega \delta\varepsilon^{sT} \mathbf{D}^s \varepsilon^s d\Omega = \int_\Omega \delta\mathbf{u}^T m\ddot{\mathbf{u}} d\Omega \tag{3}$$

Trong đó:

$$\bar{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{D}^b \end{bmatrix} \tag{4}$$

là các ma trận độ cứng màng $\mathbf{A}$, ma trận độ cứng kết hợp $\mathbf{B}$, ma trận độ cứng uốn $\mathbf{D}^b$ $(i,j) = 1,2,6$ và ma trận độ cứng cắt $(i,j) = 4,5$ được định nghĩa :

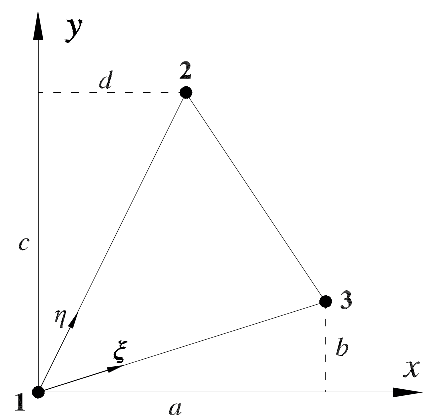
$$\left(A_{ij}, B_{ij}, D^b_{ij}\right) = \int_{-h/2}^{h/2} \left(1, z, z^2\right) \bar{Q}_{ij} dz \qquad i,j = 1,2,6. \tag{5}$$

$$D^s_{ij} = k\int_{-h/2}^{h/2} \bar{Q}^*_{ij} dz \qquad i,j = 4,5. \tag{6}$$

với k là hệ số hiệu chỉnh cắt.

Xét phần tử tam giác ba nút, xem Hình 2.

Hình 2. Phần tử tam giác ba nút



Theo xấp xỉ phần tử hữu hạn (PTHH) truyền thống, véctơ chuyển vị nút của phần tử:

$$\mathbf{u}^h = \sum_{I=1}^{np} \begin{bmatrix} N_I(x) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_I(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_I(x) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_I(x) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_I(x) \end{bmatrix} \mathbf{d}_I \tag{7}$$

Trong đó: $N_I(x)$ là hàm dạng của phần tử tam giác 3 nút trong hệ tọa độ tự nhiên và $\mathbf{d}_I = [u_I \quad v_I \quad w_I \quad \theta_{xI} \quad \theta_{yI}]^T$ là bậc tự do của nút tương ứng.

Xấp xỉ tương ứng của biến dạng màng trong mặt phẳng tấm (*membrane*), biến dạng uốn (*bending*) và biến dạng trượt (*shear*) được khai triển như sau:

$$\varepsilon_m = \sum_I \mathbf{B}_I^m \mathbf{d}_I, \quad \varepsilon^b = \sum_I \mathbf{B}_I^b \mathbf{d}_I, \quad \varepsilon^s = \sum_I \mathbf{B}_I^s \mathbf{d}_I \tag{8}$$

với

$$\mathbf{B}_I^m = \begin{bmatrix} N_{I,x} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & N_{I,y} & 0 & 0 & 0 \\ N_{I,y} & N_{I,x} & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; \mathbf{B}_I^b = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & N_{I,x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_{I,y} \\ 0 & 0 & 0 & N_{I,y} & N_{I,x} \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{B}_I^s = \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_{I,x} & N_I & 0 \\ 0 & 0 & N_{I,y} & 0 & N_I \end{bmatrix} \tag{9}$$

Áp dụng cho bài toán phân tích dao động tự do tấm composite lớp, khi bỏ qua công do ngoại lực tác dụng, cực tiểu phương trình (3) ta tìm các giá trị tần số dao động tự do $\omega \epsilon R^+$ thỏa phương trình:

$$\left(\mathbf{K} - \varpi^2 \mathbf{M}\right)\mathbf{d} = 0 \tag{10}$$

Trong đó:

$$\mathbf{M} = \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{m} \mathbf{N} d\Omega \text{ với } \mathbf{m} = \rho \begin{bmatrix} h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{h^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{h^3}{12} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Đối với phần tử tam giác bậc thấp ba nút, trường chuyển vị được xấp xỉ bởi hàm dạng tuyến tính do vậy các thành phần ma trận tính biến dạng màng $\mathbf{B}^m$ và uốn $\mathbf{B}^b$ là hằng số, tuy nhiên ma trận tính biến dạng cắt $\mathbf{B}^s$ phụ thuộc vào chuyển vị và đạo hàm góc xoay vì vậy bậc vẫn còn cao hơn biến dạng màng và uốn một bậc. Do đó khi tấm trở nên mỏng (*L/h* tăng), năng lượng biến dạng cắt sẽ trội hơn năng lượng biến dạng uốn và không bị triệt tiêu khi chiều dày tấm $h \rightarrow 0$, dẫn đến hiện tượng "*shear locking*" làm lời giải không hội tụ và không còn chính xác. Để giải quyết hiện tượng này, Bletzinger [2] đã đề xuất phương pháp "rời rạc lệch trượt" (*Discrete shear gap)*, thành phần biến dạng cắt được xấp xỉ thông qua giá trị mới với mục đích giảm bậc ma trận tính biến dạng cắt $\mathbf{B}^s$ xuống một bậc - trở thành hằng cho phần tử tam giác. Điều này làm giảm chi phí lập trình tính toán và lời giải trở nên đơn giản hơn cho bài toán phân tích kết cấu tấm sử dụng phần tử tam giác 3 nút bằng phương pháp "rời rạc lệch trượt" DSG3.

3. Phương pháp NS-FEM kết hợp kỹ thuật rời rạc lệch trượt DSG

Trong phương pháp NS-FEM, miền Ω được chia thành N_n miền nhỏ Ω^k liên quan đến nút *k* thỏa $\Omega = \sum_k^{N_n} \Omega^k$ và $\Omega^i \cap \Omega^j = \emptyset,\ i \neq j$. Phần tử Ω^k là phần tử chứa nút *k* được tạo ra bằng cách nối trung điểm cạnh biên và trọng tâm của đa giác có điểm nút *k*, xem Hình 3 (minh hoạ cho phần tử tam giác).

Trong phương pháp PTHH trơn nút, các biến dạng liên quan đến phần tử Ω^k được xấp xỉ lại theo công thức

$$\tilde{\varepsilon}_k^m = \int_{\Omega_k} \varepsilon^m(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\Omega,\ \tilde{\varepsilon}_k^b = \int_{\Omega_k} \varepsilon^b(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\Omega,\ \tilde{\varepsilon}_k^s = \int_{\Omega_k} \varepsilon^s(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\Omega \quad (12)$$

Trong đó hàm dạng trơn Φ(x) thỏa mãn điều kiện

$$\int_{\Omega_k} \Phi(\mathbf{x})\mathrm{d}\Omega = 1 \quad (13)$$

và được định nghĩa

$$\Phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1/A_k & \mathbf{x} \in \Omega_k \\ 0 & \mathbf{x} \notin \Omega_k \end{cases} \quad (14)$$

với $A^k = \int_{\Omega^k} d\Omega$ là diện tích phần tử Ω^k và được tính bằng $A_k = \int_{\Omega_k} \mathrm{d}\Omega = \frac{1}{3}\sum_{i=1}^{N_k^e} A_i^e$, trong đó N^k là số phần tử con xung quanh nút *k* và A_i^e là diện tích của phần tử thứ *i* xung quanh nút *k*. Thay phương trình (8) và (14) vào phương trình (12), các thành phần biến dạng trơn có thể được biểu diễn như sau:

$$\tilde{\varepsilon}_k^m = \frac{1}{A_k}\int_{\Omega_k} \varepsilon^m(\mathbf{x})d\Omega = \sum_{I=1}^{N_k^n} \tilde{\mathbf{B}}_I^m\left(x_k\right)\mathbf{d}_I,\ \tilde{\varepsilon}_k^b = \sum_{I=1}^{N_k^n} \tilde{\mathbf{B}}_I^b\left(x_k\right)\mathbf{d}_I, \tilde{\varepsilon}_k^s = \sum_{I=1}^{N_k^n} \tilde{\mathbf{B}}_I^s\left(x_k\right)\mathbf{d}_I \tag{15}$$

Trong đó các ma trận tính biến dạng trơn:

$$\tilde{\mathbf{B}}_I^m = \frac{1}{A_k}\sum_{i=1}^{N_k^e}\frac{1}{3}A_i^e\mathbf{B}_i^m,\ \tilde{\mathbf{B}}_I^b = \frac{1}{A_k}\sum_{i=1}^{N_k^e}\frac{1}{3}A_i^e\mathbf{B}_i^b,\ \tilde{\mathbf{B}}_I^s = \frac{1}{A_k}\sum_{i=1}^{N_k^e}\frac{1}{3}A_i^e\mathbf{B}_i^{sDSG3} \tag{16}$$

với $\mathbf{B}_i^m$ và $\mathbf{B}_i^b$ được xác định từ phần tử tam giác 3 nút

$$\mathbf{B}_i^m = \frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix} b-c & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & d-a & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ d-a & b-c & 0 & 0 & 0 & -d & c & 0 & 0 & 0 & a & -b & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{17}$$

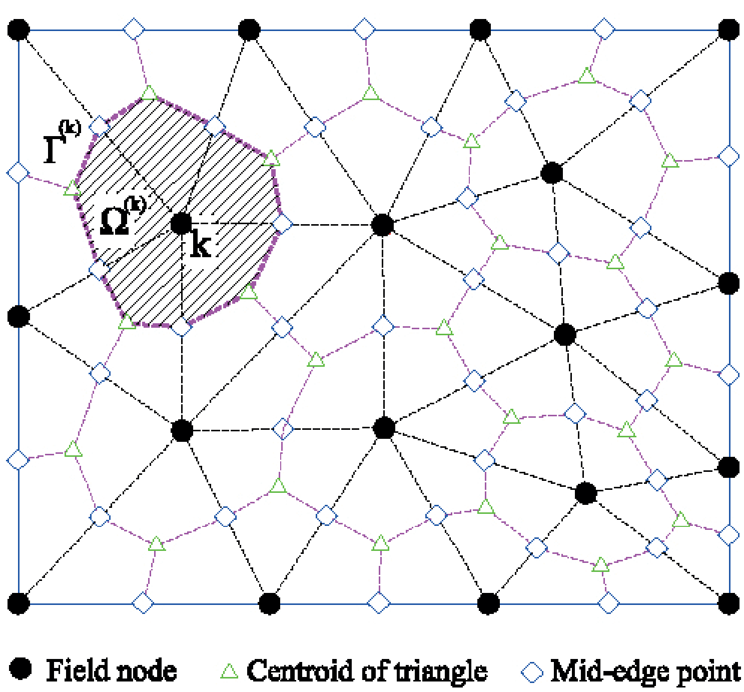
$$\mathbf{B}_i^b = \frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & b-c & 0 & 0 & 0 & 0 & c & 0 & 0 & 0 & 0 & -b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d-a & 0 & 0 & 0 & 0 & -d & 0 & 0 & 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & d-a & b-c & 0 & 0 & 0 & -d & c & 0 & 0 & 0 & a & -b \end{bmatrix} \tag{18}$$

trong khi $\mathbf{B}_i^{sDSG}$ được xác định từ kỹ thuật rời rạc lệch trượt [2]

$$\mathbf{B}_i^{sDSG} = \frac{1}{2A^e}\begin{bmatrix} 0 & 0 & b-c & A^e & 0 & 0 & 0 & c & \frac{ac}{2} & \frac{bc}{2} & 0 & 0 & -b & -\frac{bd}{2} & -\frac{bc}{2} \\ 0 & 0 & d-a & 0 & A^e & 0 & 0 & -d & -\frac{ad}{2} & -\frac{bd}{2} & 0 & 0 & a & \frac{ad}{2} & \frac{ac}{2} \end{bmatrix} \tag{19}$$

với $a = x_2 - x_1, b = y_2 - y_1, c = y_3 - y_1, d = x_3 - x_1$ ((xi, yi), i=1,2,3 là toạ độ 3 đỉnh của phần tử), xem Hình 2 và A^e là diện tích của phần tử tam giác.

Hình 3. Xây dựng miền trơn Ωk cho phần tử tam giác



Từ đó ta thu được ma trận độ cứng trong hệ trục tổng thể của phần tử NS-DSG3:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \sum_{k=1}^{N_n} \tilde{\mathbf{K}}_k \quad \text{với} \tag{20}$$

$$\tilde{\mathbf{K}}_k = (\tilde{\mathbf{B}}^m)^T \mathbf{A}\tilde{\mathbf{B}}^m A_k + (\tilde{\mathbf{B}}^m)^T \mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}^b A_k + (\tilde{\mathbf{B}}^b)^T \mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}^m A_k + (\tilde{\mathbf{B}}^b)^T \mathbf{D}^b\tilde{\mathbf{B}}^b A_k + (\tilde{\mathbf{B}}^s)^T \mathbf{D}^s\tilde{\mathbf{B}}^s A_k \tag{21}$$

Lúc này, ta nhận thấy tích phân cho ma trận độ cứng không còn dựa trên phần tử mà dựa trên miền trơn. Ngoài ra để thu được lời giải ổn định và hội tụ nhanh, ma trận độ cứng chống cắt D^s được hiệu chỉnh lại theo LyLy:

$$\bar{\mathbf{D}}^s = \frac{h^2}{h^2 + \alpha h_k^2}\mathbf{D}^s \tag{22}$$

Trong đó:

h : chiều dày của tấm

h_k: kích thước cạnh quy đổi của miền trơn Ω^k: $h_k = \sqrt{A^k}$

α: hệ số ổn định được chọn bất kì $\alpha \in [0.05, 0.15]$

Vì các ma trận $\tilde{\mathbf{B}}^m$, $\tilde{\mathbf{B}}^b$, $\tilde{\mathbf{B}}^s$ vẫn là hằng số, do đó tích phân hằng số trên miền trơn chỉ dựa vào diện tích của miền trơn A^k, công thức tính toán cho ma trận độ cứng của phần tử NS-DSG3 trở nên đơn giản đi rất nhiều, chi phí lập trình tính toán giảm và sai số bị hạn chế bớt do không cần sử dụng tích phân số.

4. Ví dụ số

Trong mục này, các ví dụ số được giới thiệu để chứng minh sự hiệu quả của phần tử NS-DSG3 cho bài toán phân tích dao động tự do không cản kết cấu tấm composite lớp. Kết cấu tấm được khảo sát với những điều kiện biên khác nhau, xem xét ảnh hưởng của tỷ lệ chiều dài cạnh trên độ dày của tấm, ảnh hưởng của tỷ lệ mô-đun đàn hồi vật liệu. Trong các ví dụ này, thuộc tính vật liệu được giả định cho tất cả các lớp là giống nhau và có tính chất như sau : $E_1/E_2 = 40$; $G_{12} = G_{13} = 0.6E_2$, $G_{23} = 0.5E_2$; $\nu_{12} = 0.25$, $\rho = 1$. Tuy nhiên góc sợi sẽ khác nhau giữa các lớp, góc sợi chính là góc hợp bởi trục x_1 trong hệ trục vật liệu với trục x của hệ trục tọa độ tổng thể. Kích thước độ dày từng lớp được cho trước và mật độ khối lượng ρ phân bố đều theo phương độ dày tấm.

4.1. Tấm vuông

Đầu tiên tấm vuông composite cạnh a, có 3 lớp đối xứng [$0^0/90^0/0^0$] ngàm 4 cạnh được chọn để khảo sát độ hội tụ của kết quả tần số dao động tự do $\varpi = (\omega b^2/\pi^2)(\rho h/D_0)^{1/2}$ với độ cứng uốn $D_0 = E_2h^3/12(1 - \nu_{12}\nu_{21})$. Lưới chia cho tấm vuông được chọn lần lượt N = 12, 16 và 20 phần tử trên một cạnh. Kết quả tần số được liệt kê ở Bảng 1.

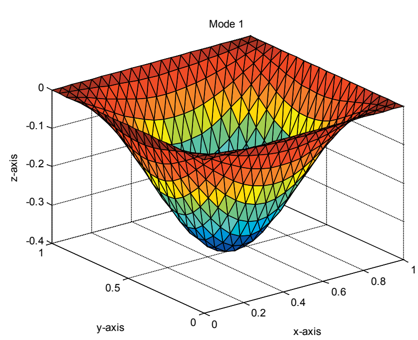
Bảng 1. Tần số dao động tự nhiên ϖ của tấm vuông [00/900/00] ngàm 4 cạnh tương ứng với tỉ lệ cạnh/chiều dày a/h

a/h	*Phương pháp*	*Dạng dao động*					
		1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
5	Liew	4.447	6.642	7.7	9.185	9.738	11.399

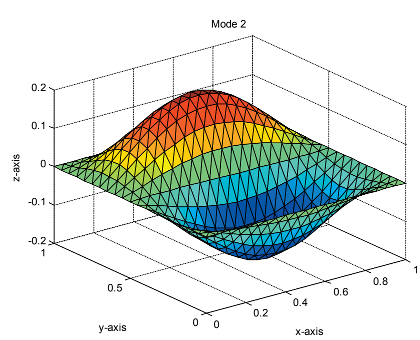
	Zhen and Wanji	4.45	6.524	8.178	9.473	9.492	11.769
	RBF-PS	4.5141	6.508	8.0361	9.3468	9.3929	11.574
	NS-DSG3 (12 x 12)	4.3928	6.5186	7.5149	8.9488	9.4258	10.204
	NS-DSG3 (16 x 16)	4.4155	6.5699	7.5941	9.0476	9.5588	10.252
	NS-DSG3 (20 x 20)	4.4264	6.5949	7.6315	9.0954	9.6219	10.278
20	Liew	10.953	14.028	20.388	23.196	24.978	29.237
	Zhen and Wanji	11.003	14.064	20.321	23.498	25.35	29.118
	RBF-PS	10.968	13.9636	20.0983	23.3572	25.0859	28.674
	NS-DSG3 (12 x 12)	10.569	13.6353	19.7340	21.9748	23.9574	27.968
	NS-DSG3 (16 x 16)	10.727	13.7927	19.9869	22.4726	24.3619	28.49
	NS-DSG3 (20 x 20)	10.805	13.8727	20.1211	22.7202	24.5693	28.761
100	Liew	14.666	17.614	24.511	35.532	39.157	40.768
	Zhen and Wanji	14.601	17.812	25.236	37.168	38.528	40.668
	RBF-PS	14.430	17.3776	24.2662	35.5596	37.7629	39.375
	NS-DSG3 (12 x 12)	13.603	16.7039	23.5778	33.6158	34.2569	35.835
	NS-DSG3 (16 x 16)	13.937	16.9654	23.8055	34.5074	35.2120	37.150
	NS-DSG3 (20 x 20)	14.106	17.1050	23.9477	34.7024	36.0535	37.870

Kết quả được so sánh với lời giải của Liew [10] theo thuyết biến dạng cắt bậc nhất FSDT, Zhen và Wanji [11] theo lời giải GLHT (global–local higher-order) cũng như lời giải của phương pháp không lưới (mesh free) của Ferreira [12]. Kết quả cho thấy, phương pháp sử dụng phần tử NS-DSG3 hoàn toàn hợp lý so với các lời giải đã được công bố trước đây, ngoài ra ta có thể thấy được khi tấm càng mỏng (*a/h* tăng) thì độ cứng của hệ giảm đi do vậy tần số dao động tự do tăng lên tương ứng. Sáu dạng dao động (mode) đầu tiên tương ứng với *a/h* = 10 được biểu diễn ở Hình 4.

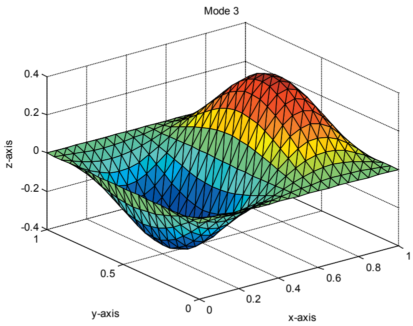
Hình 4. Sáu dạng dao động tự nhiên đầu tiên của tấm vuông composite 3 lớp [00/900/00], điều kiện biên ngàm 4 cạnh (E1/E2= 40, a/h = 10)



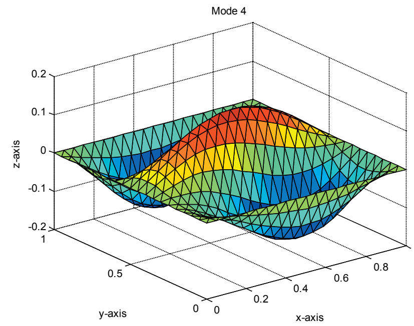
Mode 1



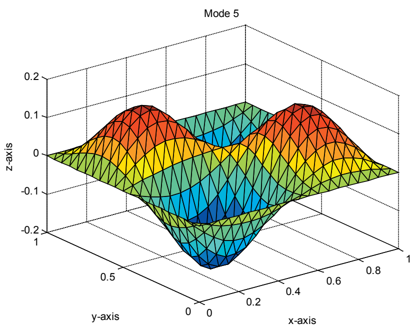
Mode 2



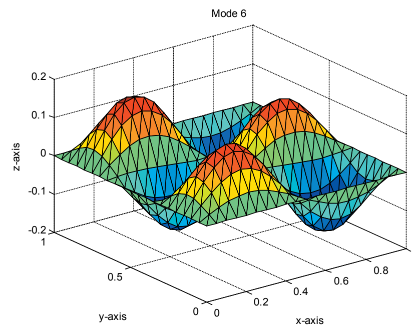
Mode 3



Mode 4



Mode 5



Mode 6

Tiếp theo, sự ảnh hưởng của tỉ lệ chiều dài/chiều dày (*a/h*) đến tần số dao động không thứ nguyên $\varpi = (\omega b^2/h)\ (\rho/E_2)^{1/2}$ được khảo sát cho tấm composite 4 lớp đối xứng $[0^0/90^0/90^0/0^0]$ với biên tựa đơn 4 cạnh. Kết quả được trình bày ở Bảng 2, ngoài ra mối quan hệ giữa tần số chuẩn hóa ϖ/ϖ^{exact} và tỉ lệ kích thước cũng được biểu diễn trên Hình 5. Từ đó, có thể thấy được phương pháp NS-DSG3 cho kết quả rất đáng tin cậy khi so sánh với lời giải tích chính xác.

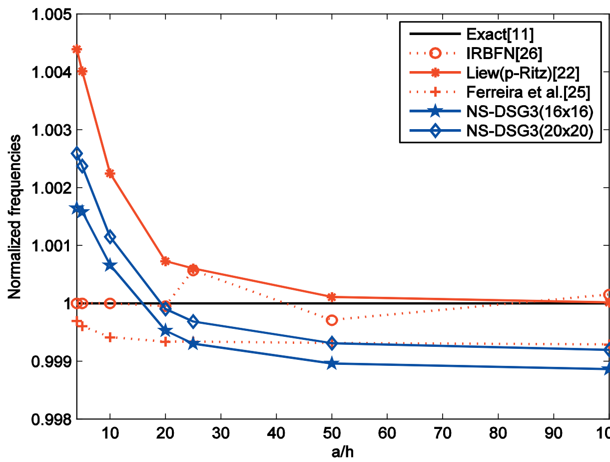
Bảng 2. Ảnh hưởng tỉ lệ chiều dài/chiều dày (a/h) lên tần số dao động tự nhiên của tấm composite 4 lớp [00/900/900/00] biên tựa đơn.

Phương pháp	*a/h*						
	4	5	10	20	25	50	100
IRBFN [14]	3.280	3.791	5.2991	6.1882	6.3378	6.5464	6.606
Liew (p-Ritz) [10]	3.295	3.807	5.311	6.193	6.338	6.549	6.606
Ferreira *et al*. [15]	3.279	3.7903	5.296	6.1844	6.33	6.5438	6.601
Giải tích [8]	3.280	3.791	5.2991	6.1885	6.3342	6.5483	6.605
NS-DSG3 (12 x 12)	3.279	3.7920	5.2980	6.1818	6.3262	6.5382	6.595
NS-DSG3 (16 x 16)	3.286	3.7978	5.3026	6.1856	6.3298	6.5415	6.598
NS-DSG3 (20 x 20)	3.289	3.8008	5.3052	6.1879	6.3322	6.5438	6.600

Ngoài ra, kết quả ở Bảng 3 thể hiện sự ảnh hưởng của giá trị môdun đàn hồi Young vật liệu theo các phương E_1/E_2 đến tần số dao động của tấm dày với kích thước $a/h = 5$. Kết quả tương ứng với tỉ lệ $E_1/E_2 = 10, 20, 30, 40$ được so sánh với lời giải giải tích TSDT của Reddy, cũng như các lời giải MLSDQ của Liew, Wavelet của

Ferreira. Kết quả từ bảng biểu cho thấy, lời giải của phương pháp là khá tương đồng với lời giải chính xác của Reddy, và nghiệm thu được ổn định và đáng tin cậy ngay cả trong trường hợp tỉ lệ E_1/E_2 thay đổi nhiều.

Hình 5. Tần số dao động tự nhiên chuẩn hóa cho vuông composite 4 lớp đối xứng [00/900/900/00] tựa đơn 4 cạnh



Bảng 3. Ảnh hưởng tỉ lệ môdun đàn hồi Young E1/E2 lên tần số dao động tự nhiên $\varpi = \omega\left(b^2/\pi^2\right)\sqrt{\rho h/D_0}$ của tấm composite 4 lớp [00/900/900/00]

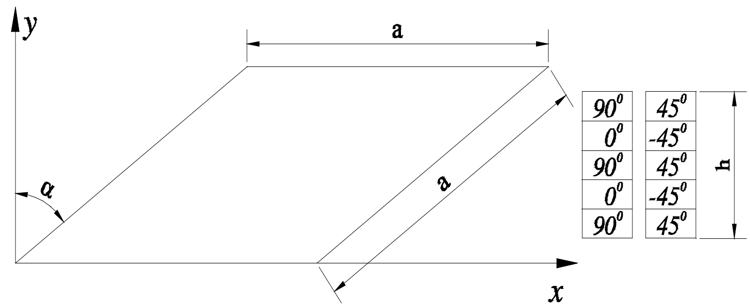
Phương pháp	E_1/E_2			
	10	20	30	40
IRBFN [14]	8.2982	9.5671	10.3258	10.8540
Liew (MLSDQ) [16]	8.2992	9.5680	10.3270	10.8550
Wavelets [17]	8.2794	9.5375	10.2889	10.8117
Giải tích [8]	8.2982	9.5671	10.3260	10.8540
NS-DSG3 (12 x 12)	8.3018	9.5521	10.2960	10.8122
NS-DSG3 (16 x 16)	8.2992	9.5574	10.3077	10.8290
NS-DSG3 (20 x 20)	8.2984	9.5604	10.3137	10.8374

4.2. Tấm xiên

Trong phần này, tần số dao động cho tấm xiên với hình dáng như Hình 6 sẽ được khảo sát. Kết cấu tấm khảo sát được ghép từ 5 lớp lamina với góc cốt sợi thay đổi lần lượt là [$90^0/0^0/90^0/0^0/90^0$] và [$45^0/-45^0/45^0/-45^0/45^0$]. Kết quả tần số không thứ nguyên $\varpi = \left(\omega b^2/\pi^2 h\right)\left(\rho/E_2\right)^{1/2}$ ứng với trường hợp tỉ lệ kích thước a/h = 10 cho trường hợp tấm cốt ngang được liệt kê trong Bảng 4, và tương ứng trường hợp cốt xiên 45^0 liệt kê trong Bảng 5.

Từ Bảng 4 cho thấy khi góc α tăng dần từ $0^0 - 60^0$ tương ứng tấm bị xiên nhiều hơn, lúc đó khoảng cách giữa các cạnh giảm đi, dẫn đến độ cứng kết cấu tấm tăng lên. Điều này làm cho giá trị tần số dao động cũng tăng theo tương ứng. Ngoài ra, kết quả thu được với lưới chia 16x16 là phù hợp với các lời giải của Liew [16], Ferreira cũng như của Wang và tương tự cho bài toán tấm cốt sợi xiên 45^0 bố trí đối xứng.

Hình 6. Hình dạng tấm xiên



Bảng 4. Quan hệ giữa tần số dao động tự nhiên của tấm xiên composite 5 lớp [900/00/900/00/900] và góc xiên α

Điều kiện biên	Phương pháp	α				
		0	15	30	45	60
Khớp	MLSDQ [16]	1.5709	1.6886	2.1026	2.8798	4.4998
	RBF [18]	1.5791	1.6917	2.0799	2.8228	4.3761
	B-spline [19]	1.5699	-	2.0844	2.8825	-
	NS-DSG3 (16 x 16)	1.5595	1.6697	2.0449	2.8126	4.3936
Ngàm	MLSDQ [16]	2.379	2.4725	2.7927	3.4723	4.943
	RBF [18]	2.4021	2.4932	2.8005	3.4923	4.9541
	B-spline [19]	2.382	-	2.7921	3.4738	-
	NS-DSG3 (16 x 16)	2.3403	2.4327	2.7474	3.4245	4.8966

Bảng 5. Quan hệ giữa tần số dao động tự nhiên của tấm xiên composite 5 lớp [450/-450/450/-450/450] và góc xiên α

Điều kiện biên	Phương pháp	α				
		0	15	30	45	60
Khớp	MLSDQ [16]	1.8248	1.8838	2.0074	2.5028	4.0227
	RBF [18]	1.8357	1.8586	2.0382	2.4862	3.8619
	B-spline [19]	1.8792	-	2.0002	2.4788	-
	NS-DSG3 (16 x 16)	1.8611	1.9097	2.1179	2.6068	4.0599
Ngàm	MLSDQ [16]	2.2787	2.3504	2.6636	3.3594	4.8566
	RBF [18]	2.3324	2.3962	2.6981	3.3747	4.8548
	B-spline [19]	2.2857	-	2.6626	3.3523	-
	NS-DSG3 (16 x 16)	2.2462	2.3109	2.6185	3.3009	4.7841

5. Kết luận

Phương pháp PTHH trơn dựa trên nút (NS-DSG3) được áp dụng thành công để giải quyết bài toán phân tích dao động tự do không cản của tấm composite lớp. Kết quả nhận được là phù hợp với các kết quả đã công bố trước đây. Như chúng ta đều biết, trong phân tích kết cấu tấm, việc chia lưới các phần tử tam giác vừa dễ dàng, tiện lợi, thỏa mãn được các hình dạng góc cạnh của vật thể, vừa đơn giản, tiết kiệm thời gian, bộ nhớ trong các khâu mô hình, tính toán. Tuy nhiên phần tử tam giác là phần tử hằng, ít bậc tự do nên thường là cho kết quả thiếu chính xác. Trong bài báo này, trường biến dạng đã được xấp xỉ lại theo phương pháp phần tử hữu hạn trơn và cho kết quả rất tốt, độ tin cậy cao, không thua kém các phương pháp dùng phần tử bậc cao, phương pháp không lưới hay nghiệm giải tích với kết quả chính xác. Ngoài ra, kết hợp kỹ thuật rời rạc lệch trượt, bài toán tấm đã có lời giải tổng quát cho bài toán tấm dày theo Reissner-Mindlin cũng như bài toán tấm mỏng theo Kirchoff-Love.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. Zienkiewicz, O.C., Taylor, R.L.(2000), The finite element method (5th edn), Butterworth Heinemann, Oxford.
2. Bletzinger, K.U., Bischoff, M., Ramm, E.(2000), A unified approach for shear-locking free triangular and rectangular shell finite elements, Computers and Structures, 75:321–334.
3. Liu, G.R., Trung, Nguyen-Thoi. (2010), Smoothed Finite Element Methods, CRC Press, Taylor and Francis Group, NewYork.
4. Liu, G.R., Dai, K.Y., Trung, Nguyen-Thoi.(2007), A smoothed finite element for mechanics problems. Computational Mechanics, 39:859-877.
5. Nguyen-Xuan, H., Rabczuk, T., Nguyen-Thanh, N., Nguyen-Thoi, T., Bordas, S.(2010), A node-based smoothed finite element method with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner-Mindlin plates, Comput. Mech., 46:679–701.
6. Nguyen-Xuan, H., Liu, G.R., Thai-Hoang, C., Nguyen-Thoi, T.(2009), An edge-based smoothed finite element method with stabilized discrete shear gap technique for analysis of Reissner-Mindlin plates, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 199:471–489.
7. Nguyen-Thoi, T., Liu, G.R., Lam, K.Y.(2009), A Face-based Smoothed Finite Element Method (FS-FEM) for 3D linear and nonlinear solid mechanics problems using 4-node tetrahedral, Int J Numer Methods Eng, 78:324–353.
8. Reddy, J.N.(2004), Mechanics of laminated composite plates and shells: theory and analysis. second edn., London: CRC Press.
9. Lyly, M., Stenberg, R., Vihinen, T.(1993), A stable bilinear element for the Reissner–Mindlin plate model, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 110: 343–357.
10. Liew, K.M.(1996), Solving the vibration of thick symmetric laminates by reissner/mindlin plate theory and the p-ritz method, Journal of Sound and Vibration, 198: 343–360.
11. Zhen, W., Wanji, C.(2006), Free vibration of laminated composite and sandwich plates using global-local higher-order theory, Journal of Sound and Vibration, 298: 333–349.

12. Ferreira, A.J.M., Fasshauer, G.E.(2007), Analysis of natural frequencies of composite plates by an RBF-Pseudospectral method, Compos Struct, 79: 202–210.

13. Ferreira, A.J.M., Castro, L.M.S., Bertoluzza, S.(2009), A high order collocation method for the static and vibration analysis of composite plates using a first-order theory, Composite Structures, 89 (3): 424–432.

14. Ngo-Cong, D., Mai-Duy, N., Karunasena, W., Tran-Cong, T.(2011), Free vibration analysis of laminated composite plates based on FSDT using one-dimensional IRBFN method, Comput Struct, 89: 1–13.

15. Ferreira, A.J.M., Fasshauer, G.E.(2006), Natural frequencies of shear deformable beams and plates by a rbf-pseudospectral method, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196: 134–146.

16. Liew, K.M., Huang, Y.Q., Reddy, J.N.(2003), Vibration analysis of symmetrically laminated plates based on FSDT using the moving least squares differential quadrature method, Journal of Composite Materials, 192: 2203–2222.

17. Ferreira, A.J.M., Castro, L.M.S., Bertoluzza, S.(2009), A high order collocation method for the static and vibration analysis of composite plates using a first-order theory, Composite Structures, 89 (3): 424–432.

18. Ferreira, A.J.M., Jorge, R.M.N., Roque, C.M.C.(2005), Free vibration analysis of symmetric laminated composite plates by fsdt and radial basis functions, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 194: 4265–4278.

19. Wang, S.(1997), Free vibration analysis of skew fibre-reinforced composite laminates based on first-order shear deformation plate theory, Computer & Structures, 63: 525–538.