SỰ HỘI TỤ THEO TRUNG BÌNH VÀ LUẬT YẾU SỐ LỚN CHO MẢNG KÉP CÁC TẬP NGẪU NHIÊN VÀ CÁC TẬP NGẪU NHIÊN MỜ TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Phạm Trí Nguyễn[1]

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi thiết lập sự hội tụ theo trung bình và luật yếu số lớn cho mảng kép các tập ngẫu nhiên và các tập ngẫu nhiên mờ trong không gian Banach.

Từ khóa: *Hội tụ theo trung bình, luật yếu số lớn, không gian Banach, compact khả tích đều.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Năm 1986, Puri và Ralescu [8] đưa ra khái niệm tập ngẫu nhiên mờ, đó được xem như là sự mở rộng một cách tự nhiên của các tập ngẫu nhiên, và từ đó nhiều định lý giới hạn về các tập ngẫu nhiên mờ đã được nghiên cứu và thiết lập. Chẳng hạn, một số kết quả nghiên cứu về luật mạnh số lớn đối với các tập ngẫu nhiên mờ có thể tìm thấy trong các bài báo [4], [5], [6],... Tuy nhiên, các kết quả nghiên cứu về sự hội tụ theo trung bình và luật yếu số lớn đối với các tập ngẫu nhiên mờ thì hầu như rất ít. Mục đích của bài báo này là nghiên cứu và thiết lập một số kết quả về sự hội tụ theo trung bình và luật yếu số lớn đối với mảng kép các tập ngẫu nhiên và các tập ngẫu nhiên mờ trong không gian Banach.

2. TẬP NGẪU NHIÊN VÀ TẬP NGẪU NHIÊN MỜ

Trong bài báo này, ký hiệu Ξ là không gian Banach với chuẩn $\|\,.\,\|$, không gian liên hợp của Ξ được ký hiệu là Ξ^* và B Ξ là σ - đại số Borel của Ξ. Với mỗi tập $A \subset \Xi$, $\mathrm{cl}A$ và $\mathrm{co}A$ là ký hiệu bao đóng và bao lồi của tập A. Gọi $c\ \Xi$ (tương ứng: $cc\ \Xi$) là tập hợp tất cả các tập con compact khác rỗng (tương ứng: compact lồi khác rỗng) của Ξ. Trên $c\ \Xi$, ta trang bị các phép toán như sau

$$A + B = \ a + b \mid a \in A, b \in B$$
$$\lambda A = \ \lambda a \mid a \in A$$

Trong đó $A, B \in c\ \Xi$. Chú ý rằng $c\ \Xi$ không phải là các không gian tuyến tính vì nói chung không tồn tại phần tử đối của $A \in c\ \Xi$. Ngoài ra, khi A và B là các tập đóng bị chặn thì $A+B$ có thể không phải là tập đóng. Tuy nhiên, nếu $A, B \in c\ \Xi$ thì $A+B \in c\ \Xi$. Hơn nữa, nếu $A, B \in cc\ \Xi$ thì $A+B \in cc\ \Xi$. Với $A, B \in c\ \Xi$, khoảng cách Hausdorff $d_H\ A; B$ của A và B và chuẩn $\|A\|_H$ của A được định nghĩa bởi

---

[1] *Trường Đại học Điện lực, Hà Nội*

$$d_H(A;B) = \max\left\{\sup_{a\in A}\inf_{b\in B}\|a-b\|, \sup_{b\in B}\inf_{a\in A}\|a-b\|\right\}$$
$$\|A\|_H = d_H(A;\{0\}) = \sup_{a\in A}\|a\|.$$

Ký hiệu $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ là không gian xác suất. Sigma đại số Borel của $c(\Xi)$ sinh bởi họ các tập $U^{-} = \{A \in c(\Xi) : A \cap U \neq \varnothing\}$, với U là tập mở trong Ξ, và nó được ký hiệu là $\mathcal{B}(c(\Xi))$.

Định nghĩa 2.1. ([2]) *Ánh xạ $X:\Omega \to c(\Xi)$ được gọi là tập (compact) ngẫu nhiên, nếu với mọi $B \in \mathcal{B}(c(\Xi))$ thì $X^{-1}(B) \in \mathcal{F}$.*

Ta ký hiệu $S_X = \{f \in L(\Omega, \Xi) : f(\omega) \in X(\omega) \text{ h.c.c}\}$

trong đó $L(\Omega, \Xi)$ là không gian Banach các phần tử ngẫu nhiên $f:\Omega \to \Xi$ thỏa mãn $E\|f\| < \infty$.

Định nghĩa 2.2. ([7]) *Tập ngẫu nhiên $X:\Omega \to c(\Xi)$ được gọi là khả tích nếu $S_X \neq \varnothing$.*

Chú ý rằng tập ngẫu nhiên X là khả tích khi và chỉ khi biến ngẫu nhiên $\|X(\omega)\|_H$ là khả tích. Kỳ vọng của tập ngẫu nhiên X được Aumann đưa ra trong [1] như sau.

Định nghĩa 2.3. ([1]) *Kỳ vọng của tập ngẫu nhiên khả tích X, ký hiệu EX, được định nghĩa bởi $EX = \{Ef : f \in S_X\}$.*

Chú ý rằng EX có thể không phải là tập đóng (xem [7]). Tuy nhiên, nếu $E\|\text{co}X(\omega)\|_H < \infty$ thì ta có thể định nghĩa $E(\text{co}X) = \{Ef : f \in S_{\text{co}X}\}$ và ta có $E(\text{co}X) \in cc(\Xi)$ (xem [3]).

Với $A, B, C, D \in c(\Xi)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ và X, Y là các tập compact, ta có một số tính chất về khoảng cách Hausdorff như sau

$$d_H(\lambda A; \lambda B) \le |\lambda| d_H(A;B)$$
$$d_H(A;B) \le d_H(A;C) + d_H(C;B)$$
$$d_H(A+C; B+D) \le d_H(A;B) + d_H(C;D)$$
$$d_H(\text{co}A; \text{co}B) \le d_H(A;B)$$
$$d_H(E\text{co}X; E\text{co}Y) \le Ed_H(X;Y).$$

Ngoài ra, nếu các tập compact A, A_1, A_2, B, B_1, B_2 thỏa mãn $A_1 \subset A \subset A_2, B_1 \subset B \subset B_2$, thì $d_H(A;B) \le \max\{d_H(A_1;B_2), d_H(A_2;B_1)\} \le d_H(A_1;B_2) + d_H(A_2;B_1)$

Mảng kép các tập ngẫu nhiên $\{X_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ được gọi là độc lập (tương ứng: độc lập đôi một) nếu mảng kép các sigma đại số $\{\sigma(X_{ij}) : i \geq 1, j \geq 1\}$ là độc lập (tương ứng: độc lập đôi một).

Mảng kép các tập ngẫu nhiên $\{X_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ được gọi là compact khả tích đều (viết tắt là CUI) nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại tập con compact K_ε của $c(\Xi)$ sao cho $\sup_{i\geq 1, j\geq 1} E\left\| X_{ij} I_{(X_{ij} \notin K_\varepsilon)} \right\|_H < \varepsilon$.

Tiếp theo, chúng ta trình bày một số khái niệm về tập ngẫu nhiên mờ. Một tập mờ trên Ξ là ánh xạ $u : \Xi \to [0;1]$. Ký hiệu $F(\Xi)$ là tập hợp tất cả các tập mờ u thỏa mãn các điều kiện sau

(a) u là nửa liên tục trên,

(b) $\operatorname{supp} u = \operatorname{cl}\{x \in \Xi : u(x) > 0\}$ là tập compact trong Ξ,

(c) $\{x \in \Xi : u(x) = 1\} \neq \varnothing$.

Với mỗi tập mờ $u \in F(\Xi)$, tập α - mức $L_\alpha u$ được định nghĩa

$L_\alpha u = \{x \in \Xi : u(x) \geq \alpha\}$, với $\alpha \in (0;1]$.

Chú ý rằng, hai tập mờ là bằng nhau khi và chỉ khi các tập α - mức của chúng tương ứng là bằng nhau và tập mờ u là nửa liên tục trên khi và chỉ khi $L_\alpha u$ là tập đóng trong Ξ với mọi $\alpha \in (0;1]$. Ngoài ra ta còn định nghĩa

$$L_\alpha^+ u = \operatorname{cl}\{x \in \Xi : u(x) > \alpha\}, \text{ với } \alpha \in [0;1).$$

Các tập $L_\alpha u$ và $L_\alpha^+ u$ là các tập compact trong Ξ, hơn nữa ta có thể kiểm tra được rằng $L_\alpha u = \bigcap_{\beta<\alpha} L_\beta u$ và $L_\alpha^+ u = \operatorname{cl}\left\{\bigcup_{\beta>\alpha} L_\beta u\right\}$.

Với $u, v \in F(\Xi)$ và $\lambda \in \mathbb{R}$, cấu trúc tuyến tính trên $F(\Xi)$ được định nghĩa

$$(u+v)(x) = \sup_{y+z=x} \min\left(u(y), v(z)\right),$$

$$(\lambda u)(x) = \begin{cases} u(\lambda^{-1}x), & \text{khi } \lambda \neq 0 \\ I_{\{0\}}(x), & \text{khi } \lambda = 0. \end{cases}$$

Khi đó với mỗi $\alpha \in (0;1]$, ta có

$$L_\alpha(u+v) = L_\alpha u + L_\alpha v,$$
$$L_\alpha(\lambda u) = \lambda L_\alpha u.$$

Bao lồi $\mathrm{co}u$ của $u \in F(\Xi)$ được định nghĩa $\mathrm{co}u(x) = \sup\{\alpha \in (0;1] : x \in \mathrm{co}(L_\alpha u)\}$

Khi đó $L_\alpha(\mathrm{co}u) = \mathrm{co}(L_\alpha u)$, với mọi $\alpha \in (0;1]$.

Trên $F(\Xi)$ ta xét metric $d_\infty(u,v) = \sup_{\alpha \in (0;1]} d_H(L_\alpha u, L_\alpha v)$,

với mọi $u, v \in F(\Xi)$. Khi đó với mỗi $u \in F(\Xi)$ ta định nghĩa $\|u\|_\infty = d_\infty(u, I_{\{0\}}) = \sup_{\alpha \in (0;1]} \|L_\alpha u\|$.

Định nghĩa 2.4. ([7]) *Ánh xạ $X : \Omega \to F(\Xi)$ được gọi là tập ngẫu nhiên mờ nếu $L_\alpha X$ là tập ngẫu nhiên với mọi $\alpha \in (0;1]$.*

Tập ngẫu nhiên mờ X được gọi là bị chặn khả tích nếu $\|\mathrm{supp}\, X\|_H$ là biến ngẫu nhiên khả tích.

Định nghĩa 2.5. ([2]) *Kỳ vọng của tập ngẫu nhiên mờ bị chặn khả tích X, ký hiệu EX, là một tập mờ trên Ξ thỏa mãn với mọi $\alpha \in (0;1]$ thì $L_\alpha(EX) = E(L_\alpha X)$.*

Về sự tồn tại và duy nhất của kỳ vọng của tập ngẫu nhiên mờ ta có thể tham khảo trong [8]. Ngoài ra ta có $L_\alpha(E(\mathrm{co}X)) = E(L_\alpha(\mathrm{co}X))$.

Mảng kép các tập ngẫu nhiên mờ $\{X_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ được gọi là độc lập (tương ứng: độc lập đôi một) nếu mảng kép các tập ngẫu nhiên $\{L_\alpha X_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ là độc lập (tương ứng: độc lập đôi một) với mọi $\alpha \in (0;1]$.

Mảng kép các tập ngẫu nhiên mờ $\{X_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\}$ được gọi là compact khả tích đều (viết tắt là CUI) nếu với mỗi $\varepsilon > 0$ tồn tại tập con compact K_ε của $c(\Xi)$ sao cho với mọi $\alpha \in (0;1]$ thì $\sup_{i \geq 1, j \geq 1} E\left\|L_\alpha X_{ij} I_{(L_\alpha X_{ij} \notin K_\varepsilon)}\right\|_H < \varepsilon$.

Sự hội tụ theo trung bình cấp $p > 0$ (tương ứng: theo xác suất) được ký hiệu là $\xrightarrow{\mathbb{L}_p}$ (tương ứng: $\xrightarrow{\mathbb{P}}$). Chú ý rằng, sự hội tụ theo trung bình kéo theo sự hội tụ theo xác suất. Với hai số thực m và n, ta ký hiệu $m \vee n = \max\{m, n\}$.

3. SỰ HỘI TỤ THEO TRUNG BÌNH VÀ LUẬT YẾU SỐ LỚN CHO MẢNG KÉP CÁC TẬP NGẪU NHIÊN VÀ CÁC TẬP NGẪU NHIÊN MỜ

Bổ đề sau (chi tiết xem [9], Bổ đề 3.1) là công cụ để chứng minh kết quả chính của mục này.

Bổ đề 3.1. ([9]) *Giả sử* $A \in c\ \ \Xi$ *và* $\left\{a_{mn} : m \geq 1, n \geq 1\right\}$ *là mảng kép các số thực không âm. Nếu*

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leq m^{\alpha} n^{\beta} \quad \text{và} \quad \frac{1}{m^{\alpha} n^{\beta}} \max_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n} a_{ij} \to 0 \quad \text{khi} \quad m \vee n \to \infty$$

với $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *thì*

$$d_H\left(\frac{1}{m^{\alpha} n^{\beta}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A; \frac{1}{m^{\alpha} n^{\beta}}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\mathrm{co}A\right) \to 0 \quad \text{khi} \quad m \vee n \to \infty.$$

Định lý 3.2. *Giả sử* $\left\{X_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\right\}$ *là mảng kép các tập ngẫu nhiên trong* $c\ \ \Xi$ *độc lập đôi một và CUI. Khi đó*

$$d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}; \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} E\mathrm{co}X_{ij}\right) \xrightarrow{\mathbb{L}_1} 0 \quad \text{khi} \quad m \vee n \to \infty$$

và do đó

$$d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} X_{ij}; \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} E\mathrm{co}X_{ij}\right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0 \quad \text{khi} \quad m \vee n \to \infty.$$

Chứng minh. Với mỗi $\varepsilon > 0$, vì $\left\{X_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\right\}$ là mảng kép các tập ngẫu nhiên trong $c\ \ \Xi$ thỏa mãn điều kiện CUI nên tồn tại tập con compact K_{ε} của $c\ \ \Xi$ sao cho với mọi $i \geq 1, j \geq 1$

$$E\left(\left\|X_{ij}\right\|_H I_{\left\{X_{ij} \notin K_{\varepsilon}\right\}}\right) < \varepsilon.$$

Do tính compact của K_{ε} nên tồn tại $\left\{c_1, c_2, \ldots, c_p\right\} \subset K_{\varepsilon}$ sao cho

$$K_{\varepsilon} \subset \bigcup_{t=1}^{p} B\left(c_t; \varepsilon\right) \text{, ở đây } B\ \ c_t;\varepsilon\ =\ \ x \in c\ \ \Xi : d_H\ \ x; c_t\ \ < \varepsilon\ \ .$$

Với mỗi $i \geq 1, j \geq 1$, ta định nghĩa các tập ngẫu nhiên trong $c\ \ \Xi$ như sau

$$Y'_{ij} = c_1 I_{\left\{X_{ij} \in B\left(c_1;\varepsilon\right)\right\}} + \sum_{t=2}^{p} c_t I_{\left\{X_{ij}(\omega) \in B\left(c_t;\varepsilon\right) \cap \left\{\bigcup_{k=1}^{t-1} \in B\left(c_k;\varepsilon\right)\right\}^c\right\}}$$

Và $\qquad Y_{ij} = Y'_{ij} I_{\left\{X_{ij} \in K_{\varepsilon}\right\}}$.

Chú ý rằng với mọi $i \geq 1, j \geq 1$ thì

$$Y_{ij} = \sum_{t=1}^{p} c_t I_{\left\{Y_{ij} = c_t\right\}} \quad \text{và} \quad EI_{\left\{Y_{ij} = c_t\right\}} = \mathbb{P}\left(Y_{ij} = c_t\right).$$

Theo bất đẳng thức tam giác

$$
\begin{aligned}
d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\mathrm{co}X_{ij}\right) \le\ & d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}I_{\{X_{ij}\in K_\varepsilon\}}\right)\\
&+ d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}I_{\{X_{ij}\in K_\varepsilon\}};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}\right)\\
&+ d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{p}c_tI_{\{Y_{ij}=c_t\}};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{p}c_t\mathbb{P}\left(Y_{ij}=c_t\right)\right)\\
&+ d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{p}c_t\mathbb{P}\left(Y_{ij}=c_t\right);\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{p}\mathrm{co}\,c_t\mathbb{P}\left(Y_{ij}=c_t\right)\right)\\
&+ d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\mathrm{co}Y_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\mathrm{co}X_{ij}I_{\{X_{ij}\in K_\varepsilon\}}\right)\\
&+ d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\mathrm{co}X_{ij}I_{\{X_{ij}\in K_\varepsilon\}};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\mathrm{co}X_{ij}\right)\\
&:= (C_1)+(C_2)+(C_3)+(C_4)+(C_5)+(C_6)
\end{aligned}
$$

Ta đánh giá $(C_1)-(C_6)$ như sau

Với (C_1), ta có

$$
\begin{aligned}
& d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}I_{\{X_{ij}\in K_\varepsilon\}}\right)\\
&\le \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\left\|X_{ij}I_{\{X_{ij}\notin K_\varepsilon\}}\right\|_H - E\left\|X_{ij}I_{\{X_{ij}\notin K_\varepsilon\}}\right\|_H\right)+\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\left\|X_{ij}I_{\{X_{ij}\notin K_\varepsilon\}}\right\|_H\\
&\le \frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left(\left\|X_{ij}I_{\{X_{ij}\notin K_\varepsilon\}}\right\|_H - E\left\|X_{ij}I_{\{X_{ij}\notin K_\varepsilon\}}\right\|_H\right)+\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Do đó với mọi $m \ge 1, n \ge 1$ thì:

$$Ed_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}I_{\{X_{ij}\in K_\varepsilon\}}\right)\le\varepsilon.$$

Với (C_2), bởi cách xây dựng Y_{ij}, ta có

$$d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}I_{\{X_{ij}\in K_\varepsilon\}};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}\right)\le\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_H\left(X_{ij}I_{\{X_{ij}\in K_\varepsilon\}};Y_{ij}\right)<\varepsilon\,.$$

Do đó $Ed_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij}I_{\{X_{ij}\in K_\varepsilon\}};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}Y_{ij}\right)<\varepsilon.$

Với (C_3), đặt $M=\max\limits_{1\le t\le p}\left\|c_t\right\|_H$, ta có

$$d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{p}c_t I_{\{Y_{ij}=c_t\}};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{p}c_t\mathbb{P}\left(Y_{ij}=c_t\right)\right)$$
$$\leq\sum_{t=1}^{p}\left\|c_t\right\|_H\left|\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[I_{\{Y_{ij}=c_t\}}-\mathbb{P}\left(Y_{ij}=c_t\right)\right]\right|.$$

Do đó

$$Ed_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{p}c_t I_{\{Y_{ij}=c_t\}};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{p}c_t\mathbb{P}\left(Y_{ij}=c_t\right)\right)$$
$$\leq\sum_{t=1}^{p}\left\|c_t\right\|_H E\left|\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[I_{\{Y_{ij}=c_l\}}-\mathbb{P}\left(Y_{ij}=c_t\right)\right]\right|\leq M\sum_{l=1}^{p}\frac{1}{mn}E\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[I_{\{Y_{ij}=c_l\}}-\mathbb{P}\left(Y_{ij}=c_t\right)\right]\right|$$
$$\leq M\sum_{t=1}^{p}\frac{1}{mn}\left(E\left|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left[I_{\{Y_{ij}=c_l\}}-\mathbb{P}\left(Y_{ij}=c_l\right)\right]\right|^2\right)^{1/2}\leq Mp\left(mn\right)^{-1/2}.$$

Với $\left(C_4\right)$, từ Bổ đề 3.1 với $m\vee n$ đủ lớn, ta có

$$d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{p}c_t\mathbb{P}\left(Y_{ij}=c_t\right);\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\sum_{t=1}^{p}\mathrm{co}\,c_t\mathbb{P}\left(Y_{ij}=c_t\right)\right)$$
$$\leq\sum_{t=1}^{p}d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_t\mathbb{P}\left(Y_{ij}=c_t\right);\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{co}\,c_t\mathbb{P}\left(Y_{ij}=c_t\right)\right)<\varepsilon.$$

Với $\left(C_5\right)$, bởi cách xây dựng Y_{ij}, ta có

$$d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\mathrm{co}\,Y_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\mathrm{co}X_{ij}I_{\{X_{ij}\in K_\varepsilon\}}\right)$$
$$\leq\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_H\left(E\mathrm{co}\,Y_{ij};E\mathrm{co}X_{ij}I_{\{X_{ij}\in K_\varepsilon\}}\right)\leq\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}Ed_H\left(Y_{ij};X_{ij}I_{\{X_{ij}\in K_\varepsilon\}}\right)<\varepsilon.$$

Với $\left(C_6\right)$, ta có

$$d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\mathrm{co}X_{ij}I_{\{X_{ij}\in K_\varepsilon\}};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\mathrm{co}X_{ij}\right)$$
$$\leq\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}d_H\left(E\mathrm{co}X_{ij}I_{\{X_{ij}\notin K_\varepsilon\}};\{0\}\right)\leq\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\left\|X_{ij}I_{\{X_{ij}\notin K_\varepsilon\}}\right\|_H\leq\varepsilon.$$

Kết hợp các đánh giá ở trên, ta thu được

$$Ed_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\mathrm{co}X_{ij}\right)\leq 5\varepsilon+Mp\left(mn\right)^{-1/2}.$$

Cho $m\vee n\to\infty$, bởi tính tùy ý của ε, ta thu được điều phải chứng minh.

Trong kết quả tiếp theo, chúng ta thiết lập sự hội tụ theo trung bình và luật yếu số lớn cho mảng kép các tập ngẫu nhiên mờ.

Định lý 3.3. *Giả sử* $\left\{X_{ij} : i \geq 1, j \geq 1\right\}$ *là mảng kép các tập ngẫu nhiên mờ trong* $F\left(\Xi\right)$ *độc lập đôi một và CUI, và với mỗi* $\varepsilon > 0$ *tồn tại phân hoạch hữu hạn* $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_p = 1$ *của* $\left[0;1\right]$ *sao cho với mọi* $i \geq 1, j \geq 1$: $\max\limits_{1\leq k\leq p} Ed_H\left(L_{k-1}^{+}X_{ij}; L_kX_{ij}\right) < \varepsilon.$

Khi đó $d_\infty\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\text{co}X_{ij}\right)\xrightarrow{\mathbb{L}_1}0$ *khi* $m\vee n\to\infty$

và do đó $d_\infty\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\text{co}X_{ij}\right)\xrightarrow{\mathbb{P}}0$ *khi* $m\vee n\to\infty$.

Chứng minh. Với mỗi $\varepsilon > 0$, tồn tại phân hoạch hữu hạn $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_p = 1$ của $\left[0;1\right]$ sao cho với mọi $i \geq 1, j \geq 1$: $\max\limits_{1\leq k\leq p} Ed_H\left(L_{k-1}^{+}X_{ij}; L_kX_{ij}\right) < \varepsilon.$

Ta có

$$\sup_{\alpha_{k-1}<\alpha\leq\alpha_k} d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_\alpha X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_\alpha E\text{co}X_{ij}\right)$$

$$\leq d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_{k-1}}^{+}E\text{co}X_{ij}\right)+d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_{k-1}}^{+}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}E\text{co}X_{ij}\right)$$

$$\leq d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}E\text{co}X_{ij}\right)+d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_{k-1}}^{+}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_{k-1}}^{+}E\text{co}X_{ij}\right)$$

$$+2d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_{k-1}}^{+}E\text{co}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}E\text{co}X_{ij}\right)$$

$$\leq d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}E\text{co}X_{ij}\right)+d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_{k-1}}^{+}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_{k-1}}^{+}E\text{co}X_{ij}\right)$$

$$+2\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}Ed_H\left(L_{\alpha_{k-1}}^{+}X_{ij};L_{\alpha_k}X_{ij}\right)$$

$$\leq d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}E\text{co}X_{ij}\right)+d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_{k-1}}^{+}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_{k-1}}^{+}E\text{co}X_{ij}\right)+2\varepsilon.$$

Do đó

$$d_\infty\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\text{co}X_{ij}\right)=\max_{1\leq k\leq p}\sup_{\alpha_{k-1}<\alpha\leq\alpha_k}d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_\alpha X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_\alpha E\text{co}X_{ij}\right)$$

$$\leq\max_{1\leq k\leq p}d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}E\text{co}X_{ij}\right)$$

$$+\max_{1\leq k\leq p}d_H\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_{k-1}}^{+}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_{k-1}}^{+}E\text{co}X_{ij}\right)+2\varepsilon.$$

Từ đó suy ra

$$Ed_{\infty}\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}E\mathrm{co}X_{ij}\right)\leq E\max_{1\leq k\leq p}d_{H}\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}E\mathrm{co}X_{ij}\right)$$

$$+E\max_{1\leq k\leq p}d_{H}\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L^{+}_{\alpha_{k-1}}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L^{+}_{\alpha_{k-1}}E\mathrm{co}X_{ij}\right)+2\varepsilon$$

$$\leq\sum_{k=1}^{p}Ed_{H}\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}E\mathrm{co}X_{ij}\right)$$

$$+\sum_{k=1}^{p}Ed_{H}\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L^{+}_{\alpha_{k-1}}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L^{+}_{\alpha_{k-1}}E\mathrm{co}X_{ij}\right)+2\varepsilon.$$

Với $k=\overline{1,p}$, áp dụng Định lý 3.2, ta có

$$Ed_{H}\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L_{\alpha_k}E\mathrm{co}X_{ij}\right)\to 0 \text{ khi } m\vee n\to\infty$$

$$Ed_{H}\left(\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L^{+}_{\alpha_{k-1}}X_{ij};\frac{1}{mn}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}L^{+}_{\alpha_{k-1}}E\mathrm{co}X_{ij}\right)\to 0 \text{ khi } m\vee n\to\infty.$$

Bởi tính tùy ý của ε, ta thu được điều phải chứng minh.

4. KẾT LUẬN

Kết quả chính của bài báo là Định lí 3.2 và Định lí 3.3. Định lí 3.2 thiết lập điều kiện đủ cho sự hội tụ theo trung bình và do đó kéo theo luật yếu số lớn cho mảng kép các tập ngẫu nhiên trong không gian các tập con compact khác rỗng của không gian Banach, sự hội tụ ở đây được xét theo metric Hausdorff. Định lí 3.3 thiết lập sự hội tụ theo trung bình và luật yếu số lớn cho mảng kép các tập ngẫu nhiên mờ trong không gian Banach, sự hội tụ ở đây được xét theo metric d_∞ .

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] R. J. Aumann (1965), *Integrals of set-valued functions*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 12, 1-12.

[2] C. Castaing and M. Valadier (1977), *Convex analysis and measurable multifunctions*, Lecture Notes in Math, 580, Springer-Verlag, Berlin and New York.

[3] G. Debreu (1952), *Integration of correspondence*, Proceedings of the Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Vol. 2, University of California Press, 351-372.

[4] K. A. Fu and L. X. Zhang (2008), *Strong laws of large numbers for arrays of rowwise independent random compact sets and fuzzy random sets*, Fuzzy Sets and Systems, 159, 3360-3368.

[5] H. Inoue (1991), *A stronglaw of large numbers for fuzzy random sets*, Fuzzy Sets and Systems. 41, 285-291.

[6] S. Li and Y. Ogura (2006), *Strong laws of large number for independent fuzzy set-valued random variables*, Fuzzy Sets and Systems 157, 2569-2578.

[7] S.M. Li, Y. Ogura, V. Kreinovich (2002), *Limit theorems and applications of set-valued and fuzzy set-valued random variables*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

[8] M. L. Puri and D. A. Ralescu (1986), *Fuzzy random variables*, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 114, 409-422.

[9] N. V. Quang and N. T. Thuan (2012), *Strong laws of large numbers for adapted arrays of set-valued and fuzzy-valued random variables in Banach space*, Fuzzy Sets and Systems, 209, 14-32.

MEAN CONVERGENCE AND WEAK LAW OF LARGE NUMBERS FOR DOUBLE ARRAY OF RANDOM SETS AND FUZZY RANDOM SETS IN BANACH SPACE

Pham Tri Nguyen

ABSTRACT

In this paper, we establish mean convergence and weak law of large numbers for double array of random sets and fuzzy random sets in Banach space.

Keywords: *Mean convergence, weak law of large numbers, banach space, compactly uniformly integrable.*

Ngày nộp bài: 23/10/2018; Ngày gửi phản biện: 19/11/2018; Ngày duyệt đăng: 6/8/2019.