BẤT ĐẲNG THỨC BIẾN PHÂN ĐỐI VỚI HỌ CÁC ÁNH XẠ S - ĐƠN ĐIỆU TRONG KHÔNG GIAN BANACH

Nguyễn Mạnh Hùng[1], Nguyễn Xuân Thuần[2]

TÓM TẮT

Bài báo đưa ra một số kết quả mới về sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân phi tuyến đối với họ các ánh xạ S - đơn điệu, tương thích với nhau trên không gian Banach phản xạ.

Từ khóa: *Ánh xạ kiểu đơn điệu, giải tích phi tuyến, bất đẳng thức biến phân.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Giả sử X,Y là các không gian Banach thực, X^* là không gian đối ngẫu của X (nếu $X=\mathbb{R}^n$ hoặc X là không gian Hilbert thì có thể đồng nhất X với X^*). Ký hiệu $<x^*,x>$ là cặp đối ngẫu giữa $x^*\in X^*$ và $x\in X$; $span(D)$- là bao tuyến tính của tập D. Gọi d là metric được cảm sinh bởi chuẩn trên X và H là metric Hausdorff trên X cảm sinh bởi d, nghĩa là:

Trong đó, $d(x,E)=\inf\{d(x,y):y\in E\}$ là khoảng cách từ điểm $x\in X$ tới tập con $E\subset X$.

Giả sử $D\subset X$ là tập lồi đóng, $A:D\to X^*$ là ánh xạ đơn trị. Bài toán tìm $u\in D$ thỏa mãn $\langle Au,x-u\rangle\geq 0,\ \forall x\in D$ (1)

gọi là bài toán bất đẳng thức biến phân hoặc, nói đơn giản là bất đẳng thức biến phân (hay bài toán biến phân [1]). Chú ý rằng, bài toán (1) liên hệ với bài toán tối ưu qua định lí sau.

Định lí 1.1. [7] *Giả sử $f:X\to\mathbb{R}$ là hàm khả vi Frechet và D là tập con lồi trong X. Khi đó, nếu u là nghiệm của bài toán tối ưu: $\min\{f(x):x\in D\}$, thì u là nghiệm của bài toán biến phân $\langle f'(u),x-u\rangle\geq 0,\forall x\in D$.*

Phiếm hàm $f:D\subset X\to\mathbb{R}$ được gọi là lồi trên D, nếu

$\forall t\in[0,1],\forall x,y\in D$: $f(tx+(1-t)y)\leq tf(x)+(1-t)f(y)$;

và f gọi là nửa liên tục dưới trên D, nếu $f(x)\leq\liminf\limits_{y\to x} f(y),\ \forall x\in X$.

Ánh xạ $A:D\subset X\to X^*$ được gọi là

Đơn điệu, nếu $\langle Ax-Ay,x-y\rangle\geq 0$ và đơn điệu ngặt, nếu $\langle Ax-Ay,x-y\rangle>0$, với $\forall x,y\in D$ và $x\neq y$.

Anti-đơn điệu, nếu $\langle Ax,y-x\rangle\geq 0$ thì $\langle Ay,y-x\rangle\geq 0$, $\forall x,y\in D$.

[1,2] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

Hemi-liên tục, nếu ánh xạ $t \mapsto \langle A(x+ty), z\rangle$ liên tục, $\forall x, y, z \in D$.

Tính liên tục và tính hemi-liên tục là đồng nhất trên các không gian hữu hạn chiều. Trong [8] lớp bài toán biến phân dạng

$$\langle T(y)-T(u), y-u\rangle \geq 0, \ \forall y \in D, \tag{2}$$

đã được xét cho lớp toán tử đơn điệu, nửa đơn điệu trên không gian Banach. Mở rộng hơn, bài toán (2) được giải cho lớp ánh xạ ngẫu nhiên kiểu đơn điệu, nửa đơn điệu yếu và đơn điệu cực đại chính qui ([3,4,5]).

Trong ([7], Định lí 3) bài toán biến phân dạng

$$\langle T(u), y-u\rangle + f(y) - f(u) \geq \langle M(u), y-u\rangle, \ \forall y \in D. \tag{3}$$

được giải đối với lớp ánh xạ *T, M* đồng thời Hemi-liên tục, đơn điệu và anti-đơn điệu.

Gần đây, mở rộng định lí 3 ([5], trang 971), bài toán (1) được giải đối với lớp ánh xạ S- đơn điệu *T, M*. Trong bài báo này, chúng tôi đề cập tới bài toán biến phân (3), đối với họ các ánh xạ S-đơn điệu $\{A_\lambda, M_\lambda, f_\lambda\}_{\lambda \in I \subset \mathbb{R}}$ tương thích với nhau trên X, trong đó $A_\lambda, M_\lambda : D_\lambda \subset X \to X^*$ là các ánh xạ S-đơn điệu và $f_\lambda : D_\lambda \subset X \to \mathbb{R}$ là họ phiếm hàm lồi, nửa liên tục dưới.

2. CÁC KẾT QUẢ

Định nghĩa 2.1. Giả sử X, *Y* là các không gian Banach thực. Ánh xạ *T:* $X \to Y$ là ánh xạ S- đơn điệu (S- anti-đơn điệu) nếu tồn tại ánh xạ $S : X \times X \to Y$ sao cho :

1) $T(x) = S(x, x), \ \forall x \in X$.

2) Với mỗi $y \in X$, ánh xạ $S_y : x \mapsto S_y(x) = S(x, y)$ là đơn điệu (anti-đơn điệu) và hemi-liên tục, $\forall x \in X$.

3) Với mỗi $x \in X$, ánh xạ $S_x : y \mapsto S_x(y) = S(x, y)$ là hemi liên tục, $\forall y \in X$.

Nhận xét 2.2. Trong định nghĩa 2, ánh xạ $x \to S(x, x) = T(x)$ là hemi-liên tục.

Định nghĩa 2.3. Giả sử X, *Y* là các không gian Banach thực, $A : D \subseteq X \to Y$ và $\{D_\lambda\}_{\lambda \in I \subseteq \mathbb{R}}$ là họ các tập con khác rỗng trong X. Họ các ánh xạ $A_\lambda : D_\lambda \subseteq X \to Y$ được gọi là tương thích trên X, nếu

1) $\lim\limits_{\lambda \searrow 0} \mathrm{H}(\mathrm{D}_\lambda, \mathrm{D}) = 0$.

2) Nếu $x_\lambda \in D_\lambda$ và $\lim\limits_{\lambda \searrow 0} x_\lambda = u \in D$, thì $\lim\limits_{\lambda \searrow 0} A_\lambda x_\lambda = Au$.

Bổ đề 2.4. *Giả sử D là tập con khác rỗng, lồi, đóng trong không gian Banach phản xạ tách được X và các ánh xạ $T, M : D \subseteq X \to X^*$ lần lượt là là S-đơn điệu và S-anti-đơn điệu,; $f : D \to \mathbb{R}$ - là phiếm hàm lồi, nửa liên tục dưới . Khi đó, hai bài toán sau tương đương*

$$\exists u \in D, \ \langle T(u), x-u\rangle + f(x) - f(u) \geq \langle M(u), x-u\rangle, \forall x \in D \tag{4}$$

$$\exists u \in D, \ \langle T(x), x-u\rangle + f(x) - f(u) \geq \langle M(x), x-u\rangle, \forall x \in D \tag{5}$$

Chứng minh. Ta chứng minh

(i). (4)$\Longrightarrow$(5). Suy ra trực tiếp từ tính S - đơn điệu và S - anti -đơn điệu của T, M.

(ii). (5)$\Longrightarrow$(4). Giả sử $u \in D$ thoả mãn (5). Nghĩa là

$$\langle T(x), x-u\rangle + f(x) - f(u) \geq \langle M(x), x-u\rangle, \quad \forall x \in D \tag{6}$$

Từ (6) và tính hemi-liên tục của $x \mapsto T(x), x \mapsto M(x)$; tính lồi của f, với mọi $t \in [0,1], y \in D,$ trong (6) thay x bởi $ty + (1-t)u \in D,$ ta có

$$\langle T(ty+(1-t)u), ty+(1-t)u-u\rangle + f(ty+(1-t)u) - f(u) \geq \langle M(ty+(1-t)u), ty+(1-t)u-u\rangle, \forall y \in D$$

Suy ra: $t\langle T(ty+(1-t)u), y-u\rangle + tf(y) - tf(u) \geq t\langle M(ty+(1-t)u), y-u\rangle, \forall y \in D$

Triệt tiêu t ở hai vế sau đó cho $t \to 0^+$, ta được

$$\langle T(u), y-u\rangle + f(y) - f(u) \geq \langle M(u), y-u\rangle, \forall y \in D, \tag{7}$$

Hay $\langle T(u), x-u\rangle + f(x) - f(u) \geq \langle M(u), x-u\rangle, \forall x \in D$.

Bổ đề được chứng minh.

Từ ý tưởng trong [6] (Mệnh đề 1.1.7, trang 4), nếu $\{K_\alpha\}_{\alpha \in J}, K_\alpha : X \to Y$ là lưới các toán tử compact và K_α hội tụ đều tới toán tử K trên tập bị chặn $D \subseteq X$ khi $\alpha \searrow 0$, thì K là toán tử compact. Ta có thể xét tập $\Phi(S_f)$ các họ ánh xạ $\{T_\lambda, M_\lambda, f_\lambda\}_{\lambda \in I}$ tương thích trên X (theo Định nghĩa 2.3), trong đó T_λ, M_λ là các họ ánh xạ S-đơn điệu, f_λ là họ các phiếm hàm nửa liên tục dưới và gọi

$$S(u) = \{u \in D : \langle T(u), x-u\rangle + f(x) - f(u) \geq \langle M(u), x-u\rangle, \ \forall x \in D\}$$

Khi đó, ta có nhận xét sau

Nhận xét 2.5. *Với tập $\Phi(S_f)$ các họ (tùy ý) ánh xạ tương thích trên X, thì $S(u) \neq \varnothing$. Hay, có thể nói, $\Phi(S_f)$ có tính chất $S(u)$.*

Định lí sau sẽ khẳng định điều đó.

Định lí 2.6. *Giả sử $\{D_\lambda\}_{\lambda \in I}$ là họ tập con khác rỗng, lồi, đóng, bị chặn trong không gian Banach phản xạ tách được X; $T, M : D \subseteq X \to X^*$, $f : D \to \mathbb{R}$ và $T_\lambda, M_\lambda : D_\lambda \to X^*$ lần lượt là các họ ánh xạ S-đơn điệu và S-anti-đơn điệu và tương thích trên X; $f_\lambda : D_\lambda \to \mathbb{R}$ là họ phiếm hàm lồi, nửa liên tục dưới, tương thích trên X. Khi đó, tồn tại $u \in D$ sao cho*

$$\langle T(u), x-u\rangle + f(x) - f(u) \geq \langle M(u), x-u\rangle, \ \forall x \in D. \tag{8}$$

Chứng minh. Từ giả thiết, ta có thể chỉ ra với mỗi dãy $\{\lambda_m\}_{m \geq 1}, \lambda_m \searrow 0$, thì $H(D_{\lambda_m}, D) \xrightarrow{\lambda_m \to 0} 0$. Giả sử $X_k, k = 1, 2, ..., m$ là các không gian con hữu hạn chiều của X, xác định bởi.

$$\begin{cases} X_m = span\{x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}, ..., x_{\lambda_m}\} \\ D_{\lambda_m} = \overline{\bigcup\{x_{\lambda_m}\}} \ ; \ x_{\lambda_m} \in D_{\lambda_m} := X_m \cap D_\lambda \subset D_\lambda \end{cases}$$

Khi đó, D_{λ_m} là tập con lồi, đóng, bị chặn trong D_λ. Chú ý rằng, thu hẹp của các ánh xạ $T_\lambda, M_\lambda, f_\lambda$ trên D_{λ_m} là các ánh xạ liên tục. Do đó, theo Định lý 3 trong [7], tồn tại $x_{\lambda_m} \in D_{\lambda_m}$ sao cho $\left\langle T_{\lambda_m}(x_{\lambda_m}), x - x_{\lambda_m} \right\rangle + f_{\lambda_m}(x) - f_{\lambda_m}(x_{\lambda_m}) \geq \left\langle M_{\lambda_m}(x_{\lambda_m}), x - x_{\lambda_m} \right\rangle, \forall x \in D_{\lambda_m}$

Hơn nữa, với mỗi $m \in \mathbb{Z}^+$, D_{λ_m} là tập compact yếu, nên dãy $\{x_{\lambda_m}\}_{m\geq 1}$ có dãy con $\{x_{\lambda_n}\}_{\lambda_n > \lambda_m}, x_{\lambda_n} \in D_{\lambda_n}$ hội tụ yếu tới $u \in X$ khi $\lambda_n \searrow 0$. Hơn nữa, vì $\lim\limits_{\lambda_n \searrow 0} \mathrm{H}\left(\mathrm{D}_{\lambda_n}, \mathrm{D}\right) = 0$, và D là tập con đóng yếu trong D_λ, nên $u \in D$ và ta có

$$\left\langle T_{\lambda_n}(x_{\lambda_n}), x - x_{\lambda_n} \right\rangle + f_{\lambda_n}(x) - f_{\lambda_n}(x_{\lambda_n}) \geq \left\langle M_{\lambda_n}(x_{\lambda_n}), x - x_{\lambda_n} \right\rangle, \forall x \in D_{\lambda_n}. \quad (9)$$

Cuối cùng, từ giả thiết và định nghĩa 2.3 và $T, M : D \subseteq X \to X^*$, $f : D \to \mathbb{R}$ là các họ ánh xạ S-đơn điệu và S-anti-đơn điệu, tương thích trên *X* nên ta có các giới hạn $\lim\limits_{\lambda_n \searrow 0} T_{\lambda_n}(x_{\lambda_n}) = T(u)$, $\lim\limits_{\lambda_n \searrow 0} M_{\lambda_n}(x_{\lambda_n}) = M(u)$ và $\lim\limits_{\lambda_n \searrow 0} f_{\lambda_n}(x_{\lambda_n}) = f(u)$. Từ tính liên tục của phiếm hàm $\langle .,. \rangle$, tính nửa liên tục dưới của f và (9) ta được

$$\left\langle T(u), x - u \right\rangle + f(x) - f(u) \geq \left\langle M(u), x - u \right\rangle, \ \forall x \in D.$$

Định lí được chứng minh.

Tiếp theo, xét các họ hàm $\varphi_\lambda, \psi_\lambda : D_\lambda \times D_\lambda \subseteq X \times X \to \mathbb{R}$,

xác định bởi $(x, y) \mapsto \varphi_\lambda(x, y) := \left\langle T_\lambda(x), y - x \right\rangle$ (10)

và $(x, y) \mapsto \psi_\lambda(x, y) := \left\langle M_\lambda(x), y - x \right\rangle$ (11)

Trong đó $\varphi_\lambda(x, x) = 0$ và $\psi_\lambda(x, x) = 0, \forall x, y \in D_\lambda$. Khi đó, trường hợp đặc biệt của (8) là

Tìm $u \in D$ sao cho $\varphi(u, y) + f(y) \geq \psi(u, y) + f(u), \ \forall y \in D$. (12)

Khi $\psi \equiv 0$, bài toán (12) trở thành:

Tìm $u \in D$ sao cho $f(u) \leq \varphi(u, y) + f(y), \ \forall y \in D$. (13)

Từ đó, ta có kết quả sau.

Mệnh đề 2.7. *Giả sử $\{D_\lambda\}_{\lambda \in I}$ là họ tập con khác rỗng, lồi, đóng và bị chặn trong không gian Banach phản xạ tách được X. Các ánh xạ T, f, T_λ, f_λ được giả thiết như trong Định lí 2.6 và họ hàm φ_λ được xác định ở (10). Khi đó, với mọi $x, y \in X$.*

1) Bài toán (13) có nghiệm.

2) Các bài toán cực tiểu hoá $f(x) = \min!$ và $f(x) + \varphi(x, y) = \min!$ có nghiệm.

Đặc biệt, khi X là không gian Hilbert, thì cặp đối ngẫu $\langle .,. \rangle$ là tích trong $(.,.)$ trên X. Gọi $T, M : D \subseteq X \to X$ là ánh xạ phi tuyến trên tập con lồi, đóng D; T', M' tương ứng là đạo hàm Frechet của T, M. Xét các dạng song tuyến tính liên tục $a, b : X \times X \to \mathbb{R}$

$(x, y) \mapsto a(x, y)$ và $(x, y) \mapsto b(x, y)$, $\forall x, y \in X$ thỏa mãn điều kiện

$$(\exists \alpha_k > 0, \beta_k > 0)_{k=1,2} : \begin{cases} a(x,x) \geq \alpha_1.\|x\|^2 \;\; ; \;\; b(x,x) \geq \alpha_2.\|x\|^2 & (14) \\ |a(x,y)| \leq \beta_1.\|x\|.\|y\| \;\; ; \;\; |b(x,y)| \leq \beta_2.\|x\|.\|y\| \, , \forall x, y \in X. & (15) \end{cases}$$

Khi đó, theo [8], tồn tại $u \in D$ sao cho

$$a(u, x-u) \geq \left(T'(u), x-u\right), \; \forall x \in D \tag{16}$$

(tương tự, ta cũng có $b(u, x-u) \geq \left(M'(u), x-u\right), \forall x \in D$)

Trong trường hợp $D = X$ thì bài toán (16) tương đương với bài toán tìm $u \in X$ sao cho

$$a(u, x-u) = \left(T'(u), x-u\right), \; \forall x \in D \tag{17}$$

Tương tự, ta cũng có $b(u, x-u) = \left(M'(u), x-u\right), \forall x \in D$.

Từ (16), (17) chúng ta đề cập tới bài toán sau

Bài toán. Tìm $u \in D$ sao cho

$$a(u, x-u) + b(u, x-u) + f(x) - f(u) \geq \left(T'(u), x-u\right) + \left(M'(u), x-u\right), \forall x \in D, \tag{18}$$

(với $f : D \subseteq X \to \mathbb{R}$; $T'(u), M'(u) \in X$); và khi $D = X$ thì bài toán (18) tương đương với bài toán

$$a(u, x-u) + b(u, x-u) + f(x) - f(u) = \left(T'(u), x-u\right) + \left(M'(u), x-u\right), \forall x \in D. \tag{19}$$

Từ (16) và (17), ta có bổ đề sau

Bổ đề 2.8. *Giả sử D là tập con khác rỗng, lồi, đóng trong không gian Hilbert X và các ánh xạ $T', M' : D \subseteq X \to X$ - tương ứng là S-đơn điệu và S-anti-đơn điệu; $f : D \to \mathbb{R}$ - là phiếm hàm lồi, nửa liên tục dưới . Khi đó, $u \in D$ là nghiệm của bài toán*

$$a(u, x-u) + b(u, x-u) + f(x) - f(u) \geq \left(T'(x), x-u\right) + \left(M'(x), x-u\right), \forall x \in D. \tag{20}$$

khi và chỉ khi $u \in D$ là nghiệm của bài toán (18). Trong đó, $a(.,.)$ và $b(.,.)$ thỏa mãn các điều kiện (14), (15).

Sau đây, ta sẽ phát biểu định lí tương tự Định lí 2.6 trong không gian Hilbert.

Định lí 2.9. *Giả sử $\{D_\lambda\}_{\lambda \in I}$ là họ tập con khác rỗng, lồi, đóng, bị chặn trong không gian Hilbert X; $T', M' : D \subseteq X \to X^*$, $f : D \to \mathbb{R}$ và $T_\lambda, M_\lambda : D_\lambda \to X^*$ tương ứng là các họ ánh xạ S-đơn điệu và S-anti-đơn điệu, tương thích trên X; $f_\lambda : D_\lambda \to \mathbb{R}$ là họ phiếm hàm lồi, nửa liên tục dưới, tương thích trên X; và $\{a_\lambda(.,.), b_\lambda(.,.)\}_{\lambda \in I}$ là họ các dạng song tuyến tính liên tục thỏa mãn các điều kiện (14), (15). Khi đó, tồn tại $u \in D$ sao cho.*

$$a(u, x-u) + b(u, x-u) + f(x) - f(u) \geq \left(T'(u), x-u\right) + \left(M'(u), x-u\right), \forall x \in D.$$

Chứng minh. Áp dụng trực tiếp Bổ đề 2.8 và phương pháp chứng minh của Định lí 2.6.

Định lí 2.6 và Định lí 2.9 là các kết quả mới về sự tồn tại nghiệm của bất đẳng thức biến phân phi tuyến đối với họ các ánh xạ S-đơn điệu, tương thích với nhau trên không gian Banach phản xạ.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] Browder.F.E (1965), *Problèmes nonlinéairies*, University of Montreal. Lectures Notes.

[2] Nguyen Minh Chuong and Nguyen Xuan Thuan (2006), *Random nonlinear variational inequalities for mappings of monotone type in Banach spaces*. Stoch. Anal, Appl. 24, 489 - 499.

[3] Denkowski.Z, Migorsk.S and Papageorgiou (2003), *An introduction to nonlinear analysis*, Kluwe. Academic Publishers,.

[4] Itoh S. (1977), *Nonlinear random equations with monotone operator in Banach Spaces*, Math. Ann. 236, 133-146.

[5] Kinderlehrer. D and Stampacchia. G (1980), *An Introduction to Variational Inequalities and Their Applications,* Academic Press, New York-London,.

[6] Noor. M.A (1972), *Bilinear forms and convex set in Hilbert space*, Boll. Unione Mat. Ital. 5, 241-244.

[7] Siddiqui, A.H, Ansari, Q.H and Kazmi K.R (1994), *On nonlinear variational inequalities*, Indian J. Pure Appl. Math. 25, 963-973.

[8] Zeidler E. (1986), *Nonlinear functional analysis and its applications*, Vol II, Springer.

VARIATIONAL INEQUALITIES FOR A FAMILY OF S-MONOTONE MAPPINGS IN BANACH SPACES

Nguyen Manh Hung, Nguyen Xuan Thuan

ABSTRACT

In this paper, we present some new results that concern the existence of solution of nonlinear variational inequalities for a family of S - monotone mappings which are compatible in reflexive Banach spaces.

Keywords: *Mappings of monotone type, Nonlinear Analysis, Variational inequality.*

Ngày nộp bài: 23/10/2018; Ngày gửi phản biện: 19/11/2018; Ngày duyệt đăng: 6/8/2019.