HỆ SỐ HILBERT CỦA MÔĐUN PHÂN BẬC LIÊN KẾT VÀ NÓN PHÂN THỚ CỦA MÔĐUN LỌC PHÂN BẬC

Lê Xuân Dũng[1]

TÓM TẮT

Bài báo chứng minh được hệ số Hilbert của môđun phân bậc liên kết và của nón phân thớ của một môđun lọc phân bậc bị chặn theo bậc đồng điều của môđun phân bậc đó.

Từ khóa: *Môđun phân bậc, môđun phân bậc liên kết, nón phân thớ, hệ số Hilbert.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong bài viết, luôn giả thiết $R=\oplus_{n\geq 0}R_n$ là đại số phân bậc chuẩn Noether trên vành địa phương Artin (R_0,m_0) và không mất tính tổng quát ta có thể giả thiết R_0/m_0 là trường vô hạn. Kí hiệu $m:=m_0\oplus(\oplus_{n\geq 1}R_n)$ là iđêan cực đại thuần nhất của *R*.

Gọi *M* là *R*-môđun phân bậc hữu hạn sinh chiều *d*. Sau đây là một số khái niệm và kí hiệu quen thuộc liên quan đến môđun phân bậc *M*.

Với $0\leq i\leq d$, đặt $a_i(M)=\sup\{n\mid H^i_{R_+}(M)_n\neq 0\}$, trong đó $R_+=\oplus_{n>0}R_n$ và $H^i_{R_+}(M)_n$ là môđun đối đồng điều địa phương của *M* ứng với giá R_+ tại bậc *i*. Chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của *M* là số $\operatorname{reg}(M):=\max\{a_i(M)+i\mid 0\leq i\leq d\}$.

Giả sử *I* là iđêan *m*-nguyên sơ thuần nhất của *R*, một dãy các môđun con phân bậc của *M*

$$\mathbb{M}: M=\mathcal{M}_0\supseteq\mathcal{M}_1\supseteq\cdots\supseteq\mathcal{M}_n\supseteq\cdots$$

được gọi là là *I*-lọc của *M* nếu $I\mathcal{M}_i\subseteq\mathcal{M}_{i+1}$ với mọi *i*. Một *I*-lọc được gọi là một *I*-lọc tốt nếu $I\mathcal{M}_i=I\mathcal{M}_{i+1}$ với $i\gg 0$. Môđun *M* có một *I*-lọc được gọi là môđun *I*-lọc phân bậc hay môđun lọc phân bậc. Nếu *N* là môđun con của môđun lọc *M* thì dãy $\{M_n+N/N\}$ là một *I*-lọc tốt của M/N được kí hiệu là $\mathbb{M}/N$.

Môđun phân bậc liên kết ứng với lọc $\mathbb{M}$ (môđun phân bậc liên kết của môđun lọc *M*) được cho bởi công thức

$$G(\mathbb{M})=\bigoplus_{n\geq 0}\mathcal{M}_n/\mathcal{M}_{n+1}.$$

Đây là môđun phân bậc hữu hạn sinh trên vành phân bậc chuẩn $G_I(R)=\bigoplus_{n\geq 0}I^n/I^{n+1}$. Đặc biệt, nếu $\mathbb{M}$ là $\{I^nM\}_{n\geq 0}$ thì ta viết $G(\mathbb{M})=G_I(M)$.

Số rút gọn của *I*-lọc tốt là số $r(\mathbb{M})=\min\{t\geq 0\mid \mathcal{M}_{n+1}=I\mathcal{M}_n,\forall\ n\geq t\}$.

Kí hiệu $HP_{\mathbb{M}}(z):=HP_{G(\mathbb{M})}(z)$. Ta gọi $H_{\mathbb{M}}(n):=\ell(M/\mathcal{M}_{n+1})$ là hàm Hilbert-Samuel của *M* ứng với lọc $\mathbb{M}$. Với *n* đủ lớn ta có hàm Hilbert-Samuel của *M* ứng với

[1] *Khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức*

lọc $\mathbb{M}$ trở thành một đa thức gọi là đa thức Hilbert-Samuel của M ứng với lọc $\mathbb{M}$, đa thức đó được viết như sau:

$$P_{\mathbb{M}}(n)=\sum_{i=0}^{d}(-1)^i e_i(\mathbb{M})\binom{n+d-i}{d-i},$$

các số nguyên $e_i(\mathbb{M})$ với $i=\overline{1,d}$ được gọi là hệ số Hilbert của M ứng với lọc $\mathbb{M}$ hay là hệ số Hilbert của môđun phân bậc liên kết $G(\mathbb{M})$. Khi $\mathbb{M}=\{I^nM\}_{n\geq 0}$, $H_{\mathbb{M}}(n), P_{\mathbb{M}}(n)$ và $e_i(\mathbb{M})$ tương ứng thường được kí hiệu bởi $H_{I,M}(n), P_{I,M}(n)$ và $e_i(I,M)$.

Giả sử q là một iđêan thuần nhất chứa I. Nón phân thớ của $\mathbb{M}$ ứng với iđêan q được xác định như sau:

$$F_q(\mathbb{M}):=\oplus_{n\geq 0}\mathcal{M}_n/q\mathcal{M}_n.$$

Kí hiệu

$$q\mathbb{M}: M\supseteq qM\supseteq q\mathcal{M}_0\supseteq q\mathcal{M}_1\supseteq\cdots\supseteq q\mathcal{M}_n\supseteq\cdots$$

Nếu $\mathbb{M}$ là một I-lọc tốt phân bâc thì $q\mathbb{M}$ cũng là một I-lọc tốt phân bậc và có $r(q\mathbb{M})\leq r(\mathbb{M})+1$.

Ta thấy $H_{F_q(\mathbb{M})}:=\ell(\mathcal{M}_n/q\mathcal{M}_n)$ hữu hạn và được gọi là hàm Hilbert của nón phân thớ $F_q(\mathbb{M})$, đa thức Hilbert của $F_q(\mathbb{M})$ được xác định như sau:

$$P_{F_q(\mathbb{M})}(n)=\sum_{i=0}^{d-1}(-1)^i f_i(\mathbb{M})\binom{n+d-i-1}{d-i-1},$$

các số nguyên $f_i(\mathbb{M})$ với $i=\overline{1,d-1}$ được gọi là hệ số Hilbert của $F_q(\mathbb{M})$.

Hệ số Hilbert của M ứng với lọc $\mathbb{M}$ và hệ số Hilbert của nón phân thớ $F_q(\mathbb{M})$ là các bất biến thông dụng, nó cung cấp nhiều thông tin về môđun M.

Trong trường hợp M là môđun hữu hạn sinh trên vành địa phương Noether R với iđêan cực đại m, I là iđêan m-nguyên sơ, năm 2007 Linh [L2] đã chặn được hệ số Hilbert của môđun M ứng với lọc I-adic theo bậc mở rộng của M ứng với iđêan I, khái niệm này được giới thiệu trong [RTV] và [L1]. Với $\mathbb{M}$ I-lọc tốt các môđun con của M, năm 2012, Hoa-Dũng trong [HD1] đã chứng tỏ các hệ số Hilbert của M ứng với lọc $\mathbb{M}$ và hệ số Hilbert của nón phân thớ $F_q(\mathbb{M})$ cũng bị chặn bởi bậc mở rộng của M ứng với I. Đến năm 2015 [GZW] đã chỉ ra được các hệ số Hilbert của M ứng với lọc $\mathbb{M}$ bị chặn bởi bất biến khác là các độ dài của một số môđun đối đồng điều địa phương liên quan đến môđun M.

Xét trường hợp phân bậc, một kết quả thú vị của Hoa-Dũng trong [HD1] đã chỉ ra là sử dụng bậc đồng điều của M ta có thể chặn được chỉ số chính quy Castelnuovo-Mumford của môđun phân bậc liên kết $G(\mathbb{M})$ và của nón phân thớ $F_q(\mathbb{M})$. Do đó, một vấn đề tự nhiên được đặt ra là "Hệ số Hilbert của môđun phân bậc liên kết $G(\mathbb{M})$ và hệ số Hilbert của nón phân thớ $F_q(\mathbb{M})$ có thể chặn được bởi bậc đồng điều của M hay không?"

Mục đích chính của bài bào này là giải quyết câu hỏi trên trong trường hợp I là iđêan thuần nhất sinh bởi các phần tử cùng bậc.

Ngoài phần mở đầu và kết luận bài báo chia thanh ba phần. Mục 1, giới thiệu về bài toán cần giải quyết. Mục 2, giới thiệu một số kiên thức chuẩn bị cho chứng minh các kết quả chính. Mục 3, chứng minh các kết quả chính của bài báo xem Định lí 7 và Định lí 9.

2. KIẾN THỨC CHUẨN BỊ

Các kết quả sau đã được chứng minh trong trường hợp địa phương và vẫn còn đúng trong trường hợp M là R-môđun phân bậc hữu hạn sinh chiều d, I là iđêan thuần nhất m-nguyên sơ của M và $\mathbb{M}$ là I-lọc tốt các môđun con phân bậc của M.

Bổ đề 1. (Xem [D, Bổ đề 1.4.9]) $H_{\mathbb{M}}(n) = P_{\mathbb{M}}(n)$ với mọi $n \geq \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$.

Bổ để 2. (Xem [RV, Proposition 1.2]) Giả sử $x \in I \setminus mI$ sao cho phần tử khởi đầu x^* của $G_I(R)$ là một phần tử lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Khi đó

(i) $\dim(M / xM) = d-1$,

(ii) $e_j(\mathbb{M}) = e_j(\mathbb{M}/xM)$ với mọi $j = 0,\dots,d-2$,

(iii) $e_{d-1}(\mathbb{M}/xM) = e_{d-1}(\mathbb{M}) + (-1)^{d-1}\ell(0:_M x)$.

Bổ đề 3. (Xem [DH1, Lemma 1.7 (i)]) Giả sử I là iđêan m-nguyên sơ. Khi đó

$$\ell(M/\mathcal{M}_{n+1}) \leq \binom{n+d}{d}\ell(M/QM),$$

trong đó Q là một iđêan rút gọn tối thiểu của $I(A/\operatorname{Ann}(M))$.

Bổ đề 4. (Xem [DH1, Lemma 2.6]) Giả sử $x \in I \setminus mI$ là một phần tử thuần nhất. Giử sử phần tử khởi đầu x^* của $G_I(R)$ là một phần tử lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Khi đó ta có x là một phần tử lọc chính quy trên M.

Giả sử R là ảnh đồng cấu của đại số Gorenstein phân bậc, bậc đồng điều của môđun M, ký hiệu là $\operatorname{hdeg}(M)$, bằng quy nạp theo d như sau:

Khi d = 1, $\operatorname{hdeg}(M) := \ell(M)$.

Khi $d > 0$, vì $\dim\left(\operatorname{Ext}_S^{s+i+1-d}(M,S)\right) \leq d-i-1$ nên ta đặt

$$\operatorname{hdeg}(M) := e(m,M) + \sum_{i=0}^{d-1}\binom{d-1}{i}\operatorname{hdeg}\left(m,\operatorname{Ext}_S^{s+i+1-d}(M,S)\right).$$

Nếu R không là ảnh đồng cấu của vành Gorenstein thì ta đặt

$$\operatorname{hdeg}(M) := \operatorname{hdeg}\left(m, \mathrm{M}\otimes_R R\right)$$

trong đó R là kí hiệu của vành m-adic đầy đủ của R.

Khi đó, Dung-Hoa trong [HD1] đã chặn trên được $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ theo $\operatorname{hdeg}(M)$ như sau:

Định lí 5. (Xem [DH1, Theorem 2.2]) Cho $\mathbb{M}$ là I-lọc tốt của R-môđun phân bậc M chiều $d \geq 1$. Khi đó

(i) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq \ell(R/I)\operatorname{hdeg}(M) + r(\mathbb{M}) - 1$ nếu $d = 1$.

(ii) $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) \leq [\ell(R/I)^d \operatorname{hdeg}(M) + r(\mathbb{M}) + 1]^{3(d-1)!-1} - d$ nếu $d \geq 2$.

3. HỆ SỐ HILBERT

Trong mục này, ta luôn giả thiết *I* là iđêan *m*-nguyên sơ thuần nhất sinh bởi các phần tử cùng bậc.

Từ Bổ đề 4, ta luôn chọn được một dãy các phần tử thuần nhất cùng bậc $x_1, x_2, ..., x_d \in I \setminus mI$ là dãy lọc chính của M sao cho dãy các phần tử khởi đầu $x_1^*, x_2^*, ..., x_d^*$ của $G_I(R)$ là một dãy lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Do đó, kết quả [HD2, Proposition A] vẫn còn đúng cho trường hợp M là môđun phân bậc và *I* là iđêan *m*-nguyên sơ thuần nhất.

Mệnh đề 6. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_d \in I \setminus mI$ là dãy lọc chính của M sao cho dãy các phần tử khởi đầu $x_1^*, x_2^*, ..., x_d^*$ của $G_I(R)$ là một dãy lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Đặt $B = \ell(M/(x_1, x_2, ..., x_d)M)$. Khi đó ta có

(i) $\mathrm{e}_0(\mathbb{M}) \leq B$.

(ii) $|\mathrm{e}_i(\mathbb{M})| < B(2\operatorname{reg}(G(\mathbb{M})) + 2)^i$ với mọi $1 \leq i \leq d$.

Chứng minh.

Để cho gọn ta đặt $a = \operatorname{reg}(G(\mathbb{M}))$ và $e_i = e_i(\mathbb{M})$. Khi đó $e_0 \leq B$. Theo Bổ đề 1, ta có

$$H_{\mathbb{M}}(a) = P_{\mathbb{M}}(a) = \sum_{i=0}^{d} (-1)^i e_i(\mathbb{M}) \binom{a+d-i}{d-1}. \qquad (1)$$

Từ Bổ đề 3 ta nhận được $H_{\mathbb{M}}(a) = \ell(M/\mathcal{M}_{a+1}) \leq B\binom{a+d}{d}$.

Bây giờ, ta chứng minh định lí bằng phương pháp quy nạp theo *d*.

Trường hợp $d = 1$.

$|e_1| = |H_{\mathbb{M}}(a) - e_0(a+1)| \leq \max\{\mathrm{B}(a+1), \mathrm{e}_0(a+1)\} = \mathrm{B}(a+1)$.

Trường hợp $d \geq 2$.

Trước ta chứng minh cho $0 < i \leq d-1$. Giả sử $\operatorname{depth}(M) > 0$, ta luôn có thể giả sử x_1 là phần tử chính quy khi đó M/x_1M là R-môđun phân bậc có chiều $\dim(M/x_1M) = d-1$, theo Bổ đề 2 ta có $\mathrm{e}_i(\mathbb{M}) = \mathrm{e}_i(\mathbb{M}/x_1M)$ với mọi $i \leq d-1$ và từ [HD2, Lemma 1.9] ta thấy $\operatorname{reg}(G(\mathbb{M}/x_1M)) \leq a$. Khi đó áp dụng giả thiết quy nạp cho môđun phân bậc $N := M/x_1M$ và dãy $x_2, ..., x_d$ ta nhận được

$$\left|\mathrm{e}_i\left(\mathbb{M}\right)\right| = \left|\mathrm{e}_i\left(\mathbb{M}/x_1M\right)\right| < \ell\left(N/(x_2,...,x_d)N\right)\left(2\mathrm{reg}\left(G\left(\mathbb{M}/x_1M\right)\right)+2\right)^i \le B\left(2a+2\right)^i.$$

Giả sử $\mathrm{depth(M)} = 0$. Đặt $\overline{M} = M/H_m^0\left(M\right)$, $\overline{\mathbb{M}} = \mathbb{M}/H_m^0\left(M\right)$, khi đó ta có $\mathrm{e}_i\left(\mathbb{M}\right) = \mathrm{e}_i\left(\overline{\mathbb{M}}\right)$ với mọi $i \le d-1$, $\ell\left(\overline{M}/\left(x_1,...,x_d\right)\overline{M}\right) \le B$ và $\mathrm{reg}\left(G\left(\overline{\mathbb{M}}\right)\right) \le \mathrm{reg}\left(G\left(\mathbb{M}\right)\right) = a.$

Suy ra

$$\left|\mathrm{e}_i\left(\mathbb{M}\right)\right| = \left|\mathrm{e}_i\left(\overline{\mathbb{M}}\right)\right| < \ell\left(\overline{M}/(x_1,...,x_d)\overline{M}\right)\left(2\mathrm{reg}\left(G\left(\overline{\mathbb{M}}\right)\right)+2\right)^i \le B\left(2a+2\right)^i.$$

Cuối cùng ta cần chứng minh cho $\mathrm{e}_d\left(\mathbb{M}\right)$. Từ công thức (1), ta có

$$\left(-1\right)^d e_d\left(\mathbb{M}\right) = H_{\mathbb{M}}\left(a\right) - \sum_{i=0}^{d-1}\left(-1\right)^i e_i\left(\mathbb{M}\right)\binom{a+d-i}{d-1}.$$

Suy ra

$$\left|e_d\right| = \left|H_{\mathbb{M}}\left(a\right) - \sum_{i=0}^{d-1}\left(-1\right)^i e_i\binom{a+d-i}{d-i}\right| \le H_{\mathbb{M}}\left(a\right) + \sum_{i=0}^{d-1}\left|e_i\right|\binom{a+d-i}{d-i}$$

$$< B\binom{a+d}{d} + B\sum_{i=0}^{d-1}2^i\left(a+1\right)^i\binom{a+d-i}{d-i} \le B2^d\left(a+1\right)^d.$$

Vậy mệnh đề được chứng minh xong.

Định lí 7. Giả sử I sinh bởi các phần tử thuần nhất cùng bậc. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_d \in I\setminus mI$ là dãy lọc chính của M sao cho dãy các phần tử khởi đầu $x_1^*, x_2^*, ..., x_d^*$ của $G_I(R)$ là một dãy lọc chính quy trên $G\left(\mathbb{M}\right)$. Đặt $B = \ell(M/(x_1, x_2, ..., x_d)M)$. Khi đó

$$\left|\mathrm{e}_i(\mathbb{M})\right| \le B[\ell\left(R/I\right)^d \mathrm{hdeg}\left(M\right) + r(\mathbb{M}) + 1]^{3i.(d-1)!-i} \text{ với mọi } 1 \le i \le d.$$

Chứng minh.

Theo Mệnh đề 6 (ii), với mọi $1 \le i \le d$ ta có $|\mathrm{e}_i\left(\mathbb{M}\right)| < B\left(2\mathrm{reg}\left(G\left(\mathbb{M}\right)\right)+2\right)^i$, kết hợp với định lí 5 (ii), ta nhận được

$$\left|\mathrm{e}_i(\mathbb{M})\right| \le B\left(2\mathrm{reg}\left(G\left(\mathbb{M}\right)\right)+2\right)^i \le B\left([\ell\left(R/I\right)^d \mathrm{hdeg}\left(M\right) + r(\mathbb{M}) + 1]^{3(d-1)!-1} - d + 1\right)^i$$

$$\le B[\ell\left(R/I\right)^d \mathrm{hdeg}\left(M\right) + r(\mathbb{M}) + 1]^{3i.(d-1)!-i}.$$

Vậy định lí được chứng minh xong.

Rossi-Valla trong [RV] đã tìm được mối liên hệ giữa hệ số Hilbert của nón phân thớ $F_q(\mathbb{M})$ và các môđun phân bậc liên kết $G\left(\mathbb{M}\right), G\left(q\mathbb{M}\right)$ được xác định như sau:

Lemma 8. ([RV, (5.5)]) Giả sử q là một iđêan thuần nhất chứa I, khi đó ta có

$$f_{i-1}\left(\mathbb{M}\right) = e_i\left(\mathbb{M}\right) + e_{i-1}\left(\mathbb{M}\right) - e_i\left(q\mathbb{M}\right)$$

với mọi $i = \overline{1, d}$.

Theo [RV, Remark 1.1], kết hợp với Bổ đề 4, ta luôn chọn được $x_1, x_2, ..., x_d \in I \setminus mI$ là dãy lọc chính của M sao cho dãy các phần tử khởi đầu $x_1^*, x_2^*, ..., x_d^*$ của $G_I(R)$ là một dãy lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$ và $G(q\mathbb{M})$. Mặt khác theo Định lí 7, hệ số Hilbert của môđun phân bậc liên kết của $G(\mathbb{M})$ và $G(q\mathbb{M})$ chặn được qua $\operatorname{hdeg}(M)$, do đó kết hợp với Lemma 8 ta sẽ chặn được các hệ số Hilbert của nón phân thớ theo $\operatorname{hdeg}(M)$.

Định lí 9. Giả sử I sinh bởi các phần tử thuần nhất cùng bậc, q là một I đêan thuần nhất chứa I. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_d \in I \setminus mI$ là dãy lọc chính của M sao cho dãy các phần tử khởi đầu $x_1^*, x_2^*, ..., x_d^*$ của $G_I(R)$ là một dãy lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Đặt $B = \ell(M/(x_1, x_2, ..., x_d)M)$. Khi đó

$|f_i(\mathbb{M})| \le 2B[\ell(R/I)^d \operatorname{hdeg}(M) + r(\mathbb{M}) + 2]^{3i.(d-1)!-i}$ với mọi $0 \le i \le d-1$.

Chứng minh.

Theo Bổ đề 8, ta có $f_{i-1}(\mathbb{M}) = e_i(\mathbb{M}) + e_{i-1}(\mathbb{M}) - e_i(q\mathbb{M})$ suy ra

$|f_{i-1}(\mathbb{M})| \le |e_i(\mathbb{M})| + |e_{i-1}(\mathbb{M})| + |e_i(q\mathbb{M})|$.

Áp dụng Định lí 7 và kết hợp với $r(q\mathbb{M}) \le r(\mathbb{M}) + 1$ ta nhận được

$$\begin{aligned}
|f_{i-1}(\mathbb{M})| &\le B[\ell(R/I)^d \operatorname{hdeg}(M) + r(\mathbb{M}) + 1]^{3i.(d-1)!-i} + \\
&+ B[\ell(R/I)^d + \operatorname{hdeg}(M) + r(\mathbb{M}) + 1]^{3(i-1).(d-1)!-(i-1)} + \\
&+ B[\ell(R/I)^d \operatorname{hdeg}(M) + r(\mathbb{M}) + 2]^{3i.(d-1)!-i} \\
&\le 2B[\ell(R/I)^d \operatorname{hdeg}(M) + r(\mathbb{M}) + 2]^{3i.(d-1)!-i}.
\end{aligned}$$

Vậy Định lí được chứng minh xong.

4. KẾT LUẬN

Gọi M là R-môđun phân bậc hữu hạn sinh chiều d. $R = \oplus_{n\ge 0} R_n$ là đại số phân bậc chuẩn Noether trên vành địa phương Artin (R_0, m_0), $m := m_0 \oplus (\oplus_{n\ge 1} R_n)$. Giả sử I là iđêan m-nguyên sơ thuần nhất của R, và $\mathbb{M}$ là một I-lọc tốt. Bài báo đã chặn được hệ số Hilbert của môđun phân bậc liên kết $G(\mathbb{M})$ và hệ số Hilbert của nón phân thớ $F_q(\mathbb{M})$ theo bậc đồng điều của M và một số bất biến khác liên quan đến môđun M như sau:

Giả sử I sinh bởi các phần tử thuần nhất cùng bậc. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_d \in I \setminus mI$ là dãy lọc chính của M sao cho dãy các phần tử khởi đầu $x_1^*, x_2^*, ..., x_d^*$ của $G_I(R)$ là một dãy lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Đặt $B = \ell(M/(x_1, x_2, ..., x_d)M)$. Khi đó

$|e_i(\mathbb{M})| \le B[\ell(R/I)^d \operatorname{hdeg}(M) + r(\mathbb{M}) + 1]^{3i.(d-1)!-i}$ với mọi $1 \le i \le d$.

Giả sử I sinh bởi các phần tử thuần nhất cùng bậc, q là một I đêan thuần nhất chứa I. Giả sử $x_1, x_2, ..., x_d \in I \setminus mI$ là dãy lọc chính của M sao cho dãy các phần tử khởi đầu $x_1^*, x_2^*, ..., x_d^*$ của $G_I(R)$ là một dãy lọc chính quy trên $G(\mathbb{M})$. Đặt $B = \ell(M/(x_1, x_2, ..., x_d)M)$. Khi đó $\left|f_i(\mathbb{M})\right| \leq 2B[\ell\left(R/I\right)^d \operatorname{hdeg}\left(M\right) + r(\mathbb{M}) + 2]^{3i.(d-1)!-i}$ với mọi $0 \leq i \leq d-1$.

LỜI CẢM ƠN

Bài báo này là kết quả nghiên cứu từ đề tài cấp Bộ Mã số B2017-HDT-05

TÀI LIỆU THAM KHẢO

[1] L. X. Dung and L. T. Hoa (2012), *Castelnuovo-Mumford regularity of associated graded modules and fiber cones of filtered modules*, Comm. Algebra. 40: 404-422.

[2] L. X. Dung and L. T. Hoa (2016), *Dependence of Hilbert coefficients manuscripta math*, 149: 235 -249, Corrigendum, ArXiv 1706.08669.

[3] Y. Gu, G. Zhu and X. Wei (2015), *Castelnuovo-Mumford regularity of fiber cones of filtered modules*, Miskolc Mathematical Notes, 16: 843-851.

[4] C. H. Linh (2005), *Upper bound for Castelnuovo-Mumford regularity of associated graded modules*, Comm. Algebra. 33:1817-1831.

[5] C. H. Linh (2007), *Castelnuovo-Mumford regularity and degree of nilpotency*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc, 142: 429-437.

[6] M. E. Rossi, N. V. Trung and G. Valla (2003), *Castelnuovo-Mumford regularity and extended degree*, Trans. Amer. Math. Soc, 355: 1773-1786.

[7] M. E. Rossi and G. Valla (2010), *Hilbert function of filtered modules*, Lect. Notes UMI 9, Springer-Verlag.

HILBERT COEFFICIENTS OF ASSOCIATED GRADED MODULES AND FIBER CONE OF GRADED FILTERED MODULES

Le Xuan Dung

ABSTRACT

In this paper, we give bounds on the Hilbert coefficients of associated graded modules and fiber cones of graded filtered modules in terms of the homological degree of the grade modules.

Keywords: *Grade modules, associated graded modules, fiber cones and Hilbert coefficients.*

Ngày nộp bài: 5/6/2018; Ngày gửi phản biện: 17/6/2018; Ngày duyệt đăng: 6/8/2019.