

CẤU TRÚC CỦA IDEAN NGUYÊN TỐ CỦA VÀNH ĐA THỨC

Phạm Thị Bích Hà¹

TÓM TẮT

Bài báo giới thiệu về cấu trúc của ideal nguyên tố bất kì trong vành đa thức một biến và ideal nguyên tố đơn thức trong vành đa thức nhiều biến.

Từ khóa: *Vành, ideal nguyên tố, vành đa thức.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Cho R là vành giao hoán có đơn vị. Một ideal I thực sự của R là ideal nguyên tố nếu với mọi $a, b \in R$ và $ab \in I$ suy ra $a \in I$ hoặc $b \in I$. Việc tìm hiểu tính chất và cấu trúc của ideal nguyên tố của một vành cho trước được nhiều người quan tâm nghiên cứu. Các vấn đề này được trình bày trong [1], [2], [3], [4] và [5].

Mục đích chính của bài báo này là hệ thống lại và trình bày chi tiết các chứng minh cho việc mô tả cấu trúc của ideal nguyên tố trong vành đa thức. Các kết quả này được trình bày trong [2], [3], [4] và [5] dưới dạng chú ý và bài tập.

Ngoài phần giới thiệu, bài báo chia thành hai mục. Mục 2 mô tả cấu trúc của ideal nguyên tố bất kì trong vành đa thức một biến (Định lý 2.2). Mục 3 mô tả cấu trúc của ideal nguyên tố đơn thức trong vành đa thức nhiều biến (Định lý 3.4).

2. VÀNH ĐA THỨC MỘT BIẾN

Trong mục này, chúng ta luôn giả thiết $K[x]$ là vành đa thức biến x trên trường K . Trước hết, ta nhắc lại một kết quả quen biết sau:

Mệnh đề 2.1.

Vành $K[x]$ là vành các ideal chính, nghĩa là mọi ideal đều sinh bởi một đa thức.

Dựa vào mệnh đề trên ta có thể chứng minh được kết quả chính của mục này như sau:

Định lý 2.2.

Giả sử I là ideal của vành $K[x]$. Khi đó, I là ideal nguyên tố khi và chỉ khi $I = (q(x))$, trong đó $q(x)$ là đa thức bất khả quy hoặc đa thức 0.

¹ Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

Chứng minh:

" $\Rightarrow$ " Nếu $I = 0$ khi đó ta có $I = (0)$. Nếu $I \neq 0$, theo Mệnh đề 2.1 ta có thể viết $I = (q(x))$, trong đó $q(x) \neq 0$. Giả sử $q(x)$ không bất khả quy, nghĩa là tồn tại hai đa thức $q_1(x)$ và $q_2(x)$ sao cho $q(x) = q_1(x) \cdot q_2(x)$, $\deg q_1(x) < \deg q(x)$ và $\deg q_2(x) < \deg q(x)$. Giả sử $q_1(x) \in I$ khi đó ta có thể viết $q_1(x) = h(x) \cdot g(x)$, trong đó $h(x) \in K[x]$. Suy ra $\deg q_1(x) \geq \deg q(x)$, mâu thuẫn với $\deg q_1(x) < \deg q(x)$ do đó $q_1(x) \notin I$. Chứng minh tương tự ta cũng có $q_2(x) \notin I$. Như vậy $q_1(x) \cdot q_2(x) \in I$ mà $q_1(x) \notin I$ và $q_2(x) \notin I$ nên I không phải là ideal nguyên tố. Điều này mâu thuẫn với giả thiết I là ideal nguyên tố. Vậy $q(x)$ là đa thức bất khả quy.

" $\Leftarrow$ " Nếu $I = (0)$ thì I nguyên tố. Nếu ideal $I \neq 0$, theo Mệnh đề 2.1 ta có thể viết $I = (q(x))$ với $q(x) \neq 0$ và $q(x)$ bất khả quy. Giả sử $f_1 \cdot f_2 \in I$, trong đó $f_1, f_2 \in K[x]$. Tồn tại $f_3(x) \in K[x]$ thỏa mãn $f_1(x) \cdot f_2(x) = f_3(x) \cdot q(x)$. Vì $q(x)$ bất khả quy nên ta có $f_1(x) : q(x)$ hoặc $f_2(x) : q(x)$. Nghĩa là $f_1(x) \in I$ hoặc $f_2(x) \in I$ hay I là ideal nguyên tố.

Nếu K là trường số phức thì ta có kết quả quen thuộc sau:

Bổ đề 2.3. Giả sử $\mathbb{C}[x]$ là vành đa thức trên trường số phức $\mathbb{C}$. Khi đó đa thức $f(x)$ khác đa thức 0 của $\mathbb{C}[x]$ bất khả khi và chỉ khi có dạng $f(x) = ax + b$, trong đó $a \neq 0$.

Hệ quả 2.4. Giả sử I là ideal của vành $\mathbb{C}[x]$. Khi đó, I là Ideal nguyên tố khi và chỉ khi $I = 0$ hoặc $I = (ax + b)$, trong đó $a \neq 0$.

Chứng minh:

Theo Định lý 2.2 và Bổ đề 2.3 ta nhận được điều phải chứng minh.

3. VÀNH ĐA THỨC N BIẾN

Trong mục này, chúng ta luôn xét $K[x_1, \dots, x_n]$ là vành đa thức n biến ($n \geq 1$) trên trường K . Để cho gọn ta viết $K[x_1, \dots, x_n] = K[X]$. Các kết quả trong mục này được trình bày trong [2], [3] và [5].

Vành đa thức n biến với $n \geq 2$ không phải là vành chính. Do vậy việc mô tả cấu trúc của ideal nguyên tố trong vành đa thức nhiều biến là không đơn giản như vành một biến. Trong phạm vi bài báo này chúng tôi chỉ xem xét đối với lớp ideal đơn thức.

Để tiếp cận và giải quyết được vấn đề này, trước hết chúng tôi xem xét trên vành một biến. Ta thấy rằng ideal đơn thức trong vành một biến có dạng $I = (x^\alpha)$. Theo Định lý 2.2 ta có I nguyên tố khi và chỉ khi x^α bất khả quy. Do đó $\alpha = 1$, nghĩa là $I = (x)$. Chúng tôi giới thiệu chứng minh sau tuy dài hơn so với cách chứng minh trên nhưng giúp chúng ta tiếp cận được bài toán trong trường hợp nhiều biến. Đó là nội dung chính của định lý sau:

Định lý 3.1. Giả sử $I \neq 0$ là ideal đơn thức của vành $K[x]$. I là ideal nguyên tố khi và chỉ khi $I = (x)$.

Chứng minh:

" $\Rightarrow$ " Giả sử $I = (x)$. Lấy tùy ý đa thức $f = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n \in I$.

Khi đó ta có thể viết $f = g(x).x$, trong đó $g = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m$. Ta nhận được:

$$a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = (b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m)x$$

Đồng nhất thức hai vế ta được $a_0 = 0$. Do đó $f(x) \in I$ khi và chỉ khi $f(x)$ có dạng:

$$f = a_1x + \dots + a_nx^n$$

Lấy hai đa thức bất kỳ:

$$f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_mx^m \in K[x]$$

sao cho $f(x).g(x) \in I$. Ta có:

$$f(x).g(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + \dots + \sum_{j+k=i} a_jb_kx^i + \dots + (a_nb_m)x^{n+m}$$

Vì $f(x).g(x) \in I$, nên $a_0b_0 = 0$. Do $a_0, b_0 \in K$, nên ta nhận được $a_0 = 0$ hoặc $b_0 = 0$, nghĩa là $f(x) \in I$ hoặc $g(x) \in I$. Vậy I là Ideal nguyên tố.

" $\Leftarrow$ " Giả sử $I = (x^\alpha)$, trong đó $\alpha > 1$. Khi đó $x^\alpha = x.x^{\alpha-1}$

Ta có $x^\alpha \in I$ nhưng $x \notin I$ và $x^{\alpha-1} \notin I$. Dẫn đến mâu thuẫn với I nguyên tố. Vậy $\alpha = 1$ hay $I = (x)$.

Bây giờ ta xét trên vành đa thức nhiều biến ($n \geq 2$). Trước hết ta cần một số kết quả bổ trợ. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử thứ tự các biến là $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$.

Kí hiệu: $X_{i_h} = (x_{i_{h+1}}, \dots, x_{i_n})$ với $0 \leq h \leq n-1$. Trong đó $X_0 = (x_1, \dots, x_n)$ hay ta có $X_0 = X$.

Bổ đề 3.2. Cho $f(X)$ là đa thức trên vành $K[X]$. Khi đó $f(X)$ luôn viết được dưới dạng sau:

$$f(X) = g_1(X)x_{i_1} + \dots + g_k(X_{i_{k-1}})x_{i_k} + g_{k+1}(X_{i_k})$$

trong đó: $1 \leq k \leq n$ và $g_j(X_{j-1}) \in K[X_{j-1}]$ với $1 \leq j \leq k+1$.

Chứng minh:

$$\text{Giả sử } f(X) = \sum_{\alpha \in N^n} a_\alpha X^\alpha$$

Bước 1: Nhóm tất cả các từ của $f(X)$ chứa biến x_{i_1} ta được:

$$f(X) = g_1(X)x_{i_1} + f_1(X_{i_1}) \quad (1)$$

Bước 2 : Nhóm tất cả các từ của $f_1(X_{i_1})$ chứa biến x_{i_2} ta được:

$$f_1(X_{i_1}) = g_2(X_{i_1})x_{i_2} + f_2(X_{i_2}) \quad (2)$$

Tiếp tục làm như vậy đến *bước k* ta được:

$$f_{k-1}(X_{i_{k-1}}) = g_k(X_{i_{k-1}})x_{i_k} + g_{k+1}(X_{i_k}) \quad (k)$$

Cộng (1) ... (k) ta được:

$$f(X) = g_1(X)x_{i_1} + \dots + g_k(X_{i_{k-1}})x_{i_k} + g_{k+1}(X_{i_k})$$

Vậy bổ đề được chứng minh xong.

Bổ đề 3.3. Cho $f(X) \in K[X]$ và $I = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$. Đa thức $f(X) \in I$ khi và chỉ khi $f(X)$ viết được dưới dạng như sau:

$$f(X) = g_1(X)x_{i_1} + \dots + g_k(X_{i_{k-1}})x_{i_k} \text{ với } 1 \leq k \leq n$$

trong đó $g_j(X_{j-1}) \in K[X_{j-1}]$ với $1 \leq j \leq k$.

Chứng minh:

" $\Rightarrow$ " Lấy tùy ý đa thức $f(X) \in I$. Theo Bổ đề 3.2 ta có

$$f(X) = g_1(X)x_{i_1} + \dots + g_k(X_{i_{k-1}})x_{i_k} + g_{k+1}(X_{i_k})$$

$$\text{suy ra: } g_{k+1}(X_{i_k}) = f(X) - g_1(X)x_{i_1} - \dots - g_k(X_{i_{k-1}})x_{i_k} \in I$$

Theo [2, Bổ đề 4.2 và Bổ đề 4.3], ta có các từ của đa thức $g_{k+1}(X_{i_k})$ phải chia hết cho một trong các biến x_{i_j} với $(j = \overline{1, k-1})$. Vì đa thức $g_{k+1}(X_{i_k})$ không chứa các biến $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$, nên các từ của $g_{k+1}(X_{i_k})$ phải bằng 0, do đó $g_{k+1}(X_{i_k}) \equiv 0$.

Vậy ta nhận được $f = g_1(X)x_{i_1} + \dots + g_k(X_{i_{k-1}})x_{i_k}$.

" $\Leftarrow$ " Giả sử $f = g_1(X)x_{i_1} + \dots + g_k(X_{i_{k-1}})x_{i_k}$ theo định nghĩa của idêan sinh bởi tập $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ ta có $f(X) \in I$.

Vận dụng các Bổ đề trên ta chứng minh được kết quả chính của bài báo như sau:

Định lý 3.4. Giả sử I là ideal đơn thức trên vành $K[X]$. Khi đó I là ideal nguyên tố khi và chỉ khi I sinh bởi tập các biến, nghĩa là $I = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$, trong đó $1 \leq k \leq n$.

Chứng minh:

" $\Leftarrow$ " Giả sử: $I = (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$ với $1 \leq k \leq n$. Không mất tính tổng quát, ta có thể giả sử thứ tự các biến là $x_{i_1}, \dots, x_{i_n}$. Lấy hai đa thức $g(X)$ và $h(X)$ tùy ý thuộc $K[X]$. Theo Bổ đề 3.2, ta có thể viết:

$$g(X) = g_1(X)x_{i_1} + \dots + g_k(X_{i_{k-1}})x_{i_k} + g_{k+1}(X_{i_k})$$

$$h(X) = h_1(X)x_{i_1} + \dots + h_k(X_{i_{k-1}})x_{i_k} + h_{k+1}(X_{i_k})$$

trong đó: $g_i(X_{i_{j-1}}), h_i(X_{i_{j-1}}) \in K[X_{i_{j-1}}], 1 \leq j \leq k+1$. Đặt:

$$g_1(X)x_{i_1} + \dots + g_k(X_{i_{k-1}})x_{i_k} = B_g \text{ và } h_1(X)x_{i_1} + \dots + h_k(X_{i_{k-1}})x_{i_k} = B_h$$

Khi đó: $g(X) = B_g + g_{k+1}(X_{i_k})$ và $h(X) = B_h + h_{k+1}(X_{i_k})$

Suy ra:

$$\begin{aligned} g(X).h(X) &= [B_g + g_{k+1}(X_{i_k})].[B_h + h_{k+1}(X_{i_k})] \\ &= B_g.B_h + B_g.h_{k+1}(X_{i_k}) + B_h.g_{k+1}(X_{i_k}) + g_{k+1}(X_{i_k}).h_{k+1}(X_{i_k}) \end{aligned}$$

Dẫn đến:

$$g_{k+1}(X_{i_k}).h_{k+1}(X_{i_k}) = f(X)g(X) - B_g.B_h - B_g.h_{k+1}(X_{i_k}) - B_h.g_{k+1}(X_{i_k})$$

Giả sử $g(X).h(X) \in I$. Khi đó $g_{k+1}(X_{i_k}).h_{k+1}(X_{i_k}) \in I$.

Theo Bổ đề 3.3, ta có: $g_{k+1}(X_{i_k}).h_{k+1}(X_{i_k}) = 0$

Vì $K[X_{i_k}]$ là miền nguyên, nên $g_{k+1}(X_{i_k}) \equiv 0$ hoặc $h_{k+1}(X_{i_k}) \equiv 0$, nghĩa là $g_k(X) \in I$ hoặc $h_k(X) \in I$. Vậy I là Ideal nguyên tố.

" $\Rightarrow$ " Giả sử $I = (A)$, trong đó A là hệ sinh tối tiểu của I .

Trường hợp 1: Nếu tồn tại $x_j^\alpha \in A$ với $\alpha > 1$. Ta có $\begin{cases} x_j \notin I \\ x_j^{\alpha-1} \notin I \end{cases}$ nhưng $x_j.x_j^{\alpha-1} \in I$

mâu thuẫn với tính nguyên tố của I .

Trường hợp 2: Giả sử sinh A chỉ chứa các biến $x_{i_1}, \dots, x_{i_k}$ và A chứa đơn thức dạng $x_{j_1}^{\alpha_1} \dots x_{j_t}^{\alpha_t}$ ($t \leq n$). Do A là hệ sinh tối tiểu nên ta có $x_{j_1}^{\alpha_1} \notin A$ và $x_{j_2}^{\alpha_2} \dots x_{j_t}^{\alpha_t} \notin A$. Vậy I không phải là ideal nguyên tố. Hay A phải có dạng là $\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ với $(1 \leq k \leq n)$.

Vậy định lý được chứng minh xong.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] M. F. Atiyah and I. G. Macdonald (1969), *Introduction to Commutative Algebra*, Addison-Wesley.
- [2] J. Herzog and T. Hibi (2011), *Monomial ideals*, Springer Press.
- [3] Lê Tuấn Hoa (2013), *Đại số máy tính*, Nxb. Đại Học Quốc Gia.
- [4] H. Matsumura (1986), *Commutative Ring Theory*, Cambridge University Press.
- [5] R.Y. Sharp (1990), *Steps in Commutative Algebra*, Cambridge University Press.

THE PRIME IDEAL STRUCTURE OF POLYNOMIAL RINGS

Pham Thi Bich Ha

ABSTRACT

This paper introduces arbitrary prime ideals structure of polynomial rings in an indeterminate and prime monomial ideals structure of polynomial rings in the indeterminates.

Keywords: *Ring, prime ideal, polynomial ring.*