

# MỘT ỨNG DỤNG CỦA LÝ THUYẾT NHÓM PHẠM TRÙ PHÂN BẬC BỆN

Phạm Thị Cúc<sup>1</sup>

## TÓM TẮT

*Trong bài báo này, chúng tôi đưa ra một ứng dụng của lý thuyết nhóm phạm trù phân bậc bền đối với bài toán mở rộng đẳng biến của Vành-Nhóm giao hoán.*

**Từ khóa:** *Nhóm phạm trù phân bậc bền, mở rộng đẳng biến của Vành-Nhóm.*

### 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Nhóm phạm trù bền được giới thiệu lần đầu trong công trình của A. Joyal và R. Street [4] như một mở rộng của phạm trù Picard, trong đó các nhóm phạm trù bền đã được phân lớp bởi nhóm đối đồng điều aben chiều 3. Sau đó, các nhóm phạm trù phân bậc bền và trường hợp riêng của nó, phạm trù Picard phân bậc, đã được A. M. Cegarra và cộng sự nghiên cứu lần lượt trong [2; 3]. Trong đó, bài toán phân lớp đồng luân các nhóm phạm trù phân bậc bền và các phạm trù Picard phân bậc được thực hiện bằng phương pháp sử dụng *phạm trù khung*.

Nhận thấy sự phức tạp của phương pháp phạm trù khung, trong bài báo [5], N. T. Quang đã giới thiệu một cách tiếp cận mới cho bài toán phân lớp các nhóm phạm trù dựa trên phương pháp hệ nhân tử. Sau đó, phương pháp này đã được N. T. Quang và P. T. Cúc sử dụng để thu được kết quả về sự phân lớp các nhóm phạm trù phân bậc bền bằng con đường ngắn gọn hơn. Trong bài báo [6], N. T. Quang và các cộng sự đã chỉ ra sự tương đương giữa phạm trù các nhóm phạm trù  $\Gamma$ -phân bậc bền chặt chẽ và phạm trù các  $\Gamma$ -môđun chéo bền, đồng thời giới thiệu một ứng dụng của lý thuyết nhóm phạm trù bền phân bậc vào bài toán mở rộng các  $\Gamma$ - môđun kiểu  $\Gamma$ -môđun chéo aben.

Mục tiêu của bài báo này là tìm kiếm thêm ứng dụng của lý thuyết nhóm phạm trù phân bậc bền. Ngoài phần giới thiệu, bài báo gồm hai phần. Trong phần 2, chúng tôi nhắc lại một số khái niệm về nhóm phạm trù phân bậc bền dựa theo [2; 3] và nhóm phạm trù phân bậc chặt chẽ bền dựa theo [6]. Trong phần 3, chúng tôi giới thiệu một ứng dụng của lý thuyết nhóm phạm trù phân bậc bền vào bài toán mở rộng đẳng biến của Vành-Nhóm giao hoán. Bài toán mở rộng đẳng biến của Vành - Nhóm trong trường hợp không giao hoán đã được giải quyết trong [1] nhờ các kết quả của lý thuyết nhóm phạm trù phân bậc.

---

<sup>1</sup> Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

## 2. NHÓM PHẠM TRÙ BỆN PHÂN BẬC

### 2.1. Nhóm phạm trù phân bậc bền

Giả sử  $\Gamma$  là một nhóm có định. Ta xem  $\Gamma$  như là một phạm trù với chỉ một vật  $*$ , mũi tên là các phần tử của  $\Gamma$  và phép hợp thành là phép toán nhóm. Phạm trù  $\mathbf{G}$  được gọi là  $\Gamma$ -phân bậc nếu có một hàm tử  $gr : \mathbf{G} \rightarrow \Gamma$  (được gọi là một *phân bậc* trên  $\mathbf{G}$ ). Phân bậc  $gr$  được gọi là *ổn định* nếu với mỗi  $X \in \text{Ob} \mathbf{G}$  và mỗi  $\sigma \in \Gamma$  đều tồn tại một mũi tên đẳng cấu  $u$  trong  $\mathbf{G}$  với nguồn  $X$  sao cho  $gr(u) = \sigma$ .

Một phạm trù *monoidal phân bậc bền* [2]  $\mathbf{G} = (\mathbf{G}, gr, \otimes, I, \mathbf{a}, \mathbf{r}, \mathbf{l}, \mathbf{c})$  bao gồm một phạm trù  $\mathbf{G}$ , một phân bậc ổn định  $gr : \mathbf{G} \rightarrow \Gamma$ , các hàm tử tenxơ phân bậc  $\otimes : \mathbf{G} \times_{\Gamma} \mathbf{G} \rightarrow \mathbf{G}$  và  $I : \Gamma \rightarrow \mathbf{G}$  và các tương đương tự nhiên phân bậc được xác định bởi các đẳng cấu tự nhiên bậc 1,  $\mathbf{a}_{X,Y,Z} : (X \otimes Y) \otimes Z \xrightarrow{\sim} X \otimes (Y \otimes Z)$ ,  $\mathbf{l}_X : I \otimes X \xrightarrow{\sim} X$ ,  $\mathbf{r}_X : X \otimes I \xrightarrow{\sim} X$  và  $\mathbf{c}_{X,Y} : X \otimes Y \xrightarrow{\sim} Y \otimes X$  thỏa mãn các điều kiện khớp của một phạm trù monoidal bền.

Một *nhóm phạm trù  $\Gamma$ -phân bậc bền* [2] là một monoidalgroupoid  $\Gamma$ -phân bậc bền sao cho với mỗi vật  $X$  tồn tại vật  $X'$  cùng với mũi tên bậc 1:  $X \otimes X' \rightarrow I$ . Nếu bền  $\mathbf{c}$  là một ràng buộc đối xứng, nghĩa là nó thỏa mãn điều kiện  $\mathbf{c}_{X,Y} \circ \mathbf{c}_{Y,X} = id_{X \otimes Y}$  thì  $\mathbf{G}$  được gọi là nhóm phạm trù  $\Gamma$ -phân bậc đối xứng, hay *phạm trù Picard phân bậc* [3].

Giả sử  $(\mathbf{G}, gr)$  và  $(\mathbf{G}', g')$  là hai nhóm phạm trù  $\Gamma$ -phân bậc bền (đối xứng). Một  $\Gamma$ -hàm tử *monoidal đối xứng* từ  $(\mathbf{G}, gr)$  đến  $(\mathbf{G}', g')$  là một bộ ba  $(F, \tilde{F}, F_*)$ , trong đó  $F : (\mathbf{G}, gr) \rightarrow (\mathbf{G}', g')$  là một hàm tử  $\Gamma$ -phân bậc,  $\tilde{F}_{X,Y} : FX \otimes FY \rightarrow F(X \otimes Y)$  là những đẳng cấu tự nhiên bậc 1 và  $F_* : I' \rightarrow FI$  là một đẳng cấu bậc 1 thỏa mãn các điều kiện khớp của một phạm trù monoidal.

Nếu  $(F, \tilde{F}, F_*)$ ,  $(F', \tilde{F}', F'_*)$  là hai  $\Gamma$ -hàm tử monoidal đối xứng, thì một *tương đương tự nhiên monoidal đối xứng* (hay *đồng luân*)  $\theta : F \xrightarrow{\sim} F'$  là một tương đương tự nhiên phân bậc sao cho với mọi vật  $X, Y$  của  $\mathbf{G}$ , các điều kiện khớp sau đúng:

$$\tilde{F}'_{X,Y}(\theta_X \otimes \theta_Y) = \theta_{X \otimes Y} \tilde{F}_{X,Y}, \quad \theta_I F_* = F'_* \quad (1)$$

nghĩa là một tương đương tự nhiên monoidal.

### 2.2. Nhóm phạm trù phân bậc chặt chẽ bền

Lý thuyết nhóm phạm trù phân bậc, nhóm phạm trù phân bậc bền đã được A. M. Cegarra và các cộng sự nghiên cứu, trong đó bao gồm cả việc tìm kiếm ứng dụng của

các lý thuyết này [1; 2]. Gần đây, nhóm nghiên cứu của N. T. Quang đã giới thiệu các khái niệm nhóm phạm trù phân bậc chặt chẽ và nhóm phạm trù phân bậc chặt chẽ bên [6] dựa trên khái niệm hệ nhân tử. Sự ra đời của các khái niệm này không những đã giúp kết nối các kiểu đại số phạm trù đó với các kiểu môđun chéo tương ứng, mà còn giúp giải quyết được một loạt các bài toán mở rộng. Dưới đây, chúng tôi nhắc lại khái niệm nhóm phạm trù phân bậc chặt chẽ bên dựa theo [6].

Trước hết, một hàm tử monoidal đối xứng  $(F, \tilde{F}): G \rightarrow G'$  được gọi là *chính quy* [6] nếu nó thỏa mãn các điều kiện sau với mọi  $x, y \in \text{Ob}G$ ,  $b, c \in \text{Mor}G$ .

$$\text{i) } F(x) \otimes F(y) = F(x \otimes y),$$

$$\text{ii) } F(b) \otimes F(c) = F(b \otimes c),$$

$$\text{iii) } \tilde{F}_{x,y} = \tilde{F}_{y,x}.$$

Một hệ nhân tử đối xứng  $(F, \theta)$  trên  $\Gamma$  với các hệ tử trong nhóm phạm trù bên  $G$  là *chính quy* [6] nếu  $F^\sigma$  là hàm tử monoidal đối xứng chính quy và  $\theta^{\sigma,\tau} = id$  với mọi  $\sigma, \tau \in \Gamma$ .

**Định nghĩa.** [6] Nhóm phạm trù phân bậc bên  $(G, gr)$  được gọi là *chặt chẽ* nếu  $\text{Ker}G$  là một nhóm phạm trù chặt chẽ bên và  $G$  cảm sinh một hệ nhân tử chính quy  $(F, \theta)$  trên  $\Gamma$  với các hệ tử trong  $\text{Ker}G$ .

Trong [6], các tác giả cũng đã xây dựng được một nhóm phạm trù phân bậc chặt chẽ bên từ một  $\Gamma$ -môđun chéo bên cho trước, và ngược lại.

### 3. MỞ RỘNG ĐẲNG BIẾN CỦA VÀNH-NHÓM GIAO HOÁN BỞI CÁC $\Gamma$ -MÔĐUN

Một *Vành-Nhóm* là một cặp  $[R, M]$  bao gồm một vành  $R$  có đơn vị cùng với một nhóm con  $M$  của nhóm  $R^*$  tất cả các phần tử khả nghịch của  $R$ . Khi đó, một *đồng cấu Vành-Nhóm*  $f: [R, M] \rightarrow [S, N]$  là một đồng cấu vành  $f: R \rightarrow S$  sao cho  $f(M) \subseteq N$ .

Các định nghĩa và khái niệm dưới đây được trình bày theo [1].

**Định nghĩa.** Cho  $[R, M]$  là một Vành-Nhóm và  $G$  là một nhóm thì một *mở rộng của*  $[R, M]$  bởi  $G$  là một cặp:

$$\mathcal{E}: ([R, M] \xrightarrow{i} [S, N], N \xrightarrow{p} G) \quad (2)$$

trong đó  $i$  là một đơn cấu Vành-Nhóm và  $p$  là một toàn cấu nhóm sao cho các điều kiện sau đây đúng:

i) Tác động của  $N$  lên  $S$  bởi các tự đẳng cấu trong được hạn chế thành tác động của  $N$  trên  $R$ .

ii)  $M \xrightarrow{i} N \xrightarrow{p} G$  là một mở rộng nhóm.

iii)  $S$  phân tích được thành tổng trực tiếp của các nhóm con  $S = \bigoplus_{x \in G} S_x$ , trong đó

với mỗi  $x \in G$  thì  $S_x = Rp^{-1}(x)R$  là  $(R, R)$ -song môđun con của  $S$  sinh bởi tập các phần tử  $p^{-1}(x)$  của  $N$ .

Nếu  $\mathcal{E}$  và  $\mathcal{E}'$  là hai mở rộng của Vành-Nhóm  $[R, M]$  bởi nhóm  $G$  thì ta nói chúng là *tương đẳng* nếu tồn tại một đồng cấu Vành-Nhóm  $\beta : [S, N] \rightarrow [S', N']$  sao cho  $\beta i = i'$  và  $p' \beta = p$ . Rõ ràng,  $\beta$  là một đẳng cấu Vành-Nhóm.

Cho  $\Gamma$  là một nhóm cố định bất kỳ. Một  $\Gamma$ -Vành-Nhóm là một Vành-Nhóm  $[R, M]$  mà trên đó  $\Gamma$  tác động bởi các tự đẳng cấu Vành-Nhóm, nghĩa là cho một đồng cấu  $\Gamma \rightarrow \text{Aut}[R, M]$ . Chú ý rằng khi đó  $R$  là một  $\Gamma$ -vành và  $M$  là một nhóm con đẳng biến của  $\Gamma$ -nhóm các phần tử khả nghịch  $R^*$ .

Cho một  $\Gamma$ -Vành-nhóm  $[R, M]$  và một  $\Gamma$ -nhóm  $G$ . Khi đó, một *mở rộng đẳng biến* của  $[R, M]$  bởi  $G$  là một mở rộng  $\mathcal{E}$  của Vành-Nhóm  $[R, M]$  bởi nhóm  $G$  như trong (2), trong đó  $[S, N]$  được trang bị một  $\Gamma$ -tác động, nghĩa là  $[S, N]$  là một  $\Gamma$ -Vành-Nhóm sao cho cả hai ánh xạ  $i : R \rightarrow S$  và  $p : N \rightarrow G$  đều là đẳng biến.

Ở đây, chúng tôi nghiên cứu các mở rộng đẳng biến của  $\Gamma$ -Vành-Nhóm giao hoán  $[R, M]$  (nghĩa là  $R$  là vành giao hoán) bởi  $\Gamma$ -nhóm giao hoán  $G$  (nghĩa là  $\Gamma$ -môđun  $G$ ). Ký hiệu  $\text{Ext}_{\Gamma, S}(G, [R, M])$  là tập các lớp mở rộng đẳng biến tương đẳng của  $\Gamma$ -Vành-Nhóm giao hoán  $[R, M]$  bởi  $\Gamma$ -môđun  $G$ . Bài toán mở rộng đẳng biến của  $\Gamma$ -Vành-Nhóm giao hoán  $[R, M]$  bởi  $\Gamma$ -môđun  $G$  là xây dựng tất cả các mở rộng  $\mathcal{E}$  khi đã cho  $[R, M]$  và  $G$ .

Dưới đây, chúng ta sẽ áp dụng Định lý 3.12 [3] để thu được kết quả về mở rộng đẳng biến của  $\Gamma$ -Vành-Nhóm giao hoán bởi các  $\Gamma$ -môđun.

Trước hết, ta lần lượt xây dựng hai phạm trù Picard  $\Gamma$ -phân bậc  $\text{Dis}_{\Gamma} G$  và  $\text{Red}_{\Gamma} [R, M]$  từ  $\Gamma$ -môđun  $G$  và  $\Gamma$ -Vành-Nhóm  $[R, M]$  như sau.

Phạm trù Picard  $\Gamma$ -phân bậc *rời rạc*  $\text{Dis}_{\Gamma} G$  được xác định bởi  $\Gamma$ -môđun  $G$  có các vật là các phần tử của nhóm aben  $G$ , các mũi tên  $\sigma : x \rightarrow y$  là các phần tử  $\sigma \in \Gamma$  sao cho  $\sigma x = y$ . Hợp thành của các mũi tên là phép nhân trong  $\Gamma$ . Hàm tử phân bậc  $gr : \text{Dis}_{\Gamma} G \rightarrow \Gamma$  được cho bởi  $gr(\sigma) = \sigma$ . Tích tenxơ phân bậc được cho bởi:

$$(x \xrightarrow{\sigma} y) \otimes (x' \xrightarrow{\sigma'} y') = (xx' \xrightarrow{\sigma\sigma'} yy')$$

Hàm tử phân bậc đơn vị  $I: \Gamma \rightarrow \text{Dis}_{\Gamma} G$  cho bởi  $I(* \xrightarrow{\sigma} *) = (1 \xrightarrow{\sigma} 1)$ . Các ràng buộc kết hợp, giao hoán và đơn vị là đồng nhất.

Phạm trù Picard  $\Gamma$ -phân bậc *thu gọn*  $\text{Red}_{\Gamma}[R, M]$  với một vật duy nhất, được xác định bởi  $\Gamma$ -Vành-Nhóm  $[R, M]$  như sau. Groupoid nền là nhóm tích nửa trực tiếp  $M \rtimes \Gamma$ , một  $\sigma$  - mũi tên là một cặp  $(m, \sigma)$  với  $m \in M$ ,  $\sigma \in \Gamma$ . Hợp thành của hai mũi tên được cho bởi  $(m, \sigma)(n, \tau) = (m.\sigma n, \sigma\tau)$ .

Hàm tử phân bậc  $gr: \text{Red}_{\Gamma}[R, M] \rightarrow \Gamma$  được cho bởi  $gr(m, \sigma) = \sigma$ . Tích tensor phân bậc:  $(m, \sigma) \otimes (n, \tau) = (mn, \sigma\tau)$ . Hàm tử phân bậc đơn vị  $I: \Gamma \rightarrow \text{Red}_{\Gamma}[R, M]$  cho bởi  $I(\sigma) = (1, \sigma)$ . Các ràng buộc kết hợp, giao hoán và đơn vị là đồng nhất.

Ký hiệu  $\text{Hom}_{\Gamma, s}[\text{Dis}_{\Gamma} G, \text{Red}_{\Gamma}[R, M]]$  là tập các lớp đồng luân của các hàm tử monoidal đối xứng phân bậc từ  $\text{Dis}_{\Gamma} G$  tới  $\text{Red}_{\Gamma}[R, M]$ , chúng tôi thu được định lý sau.

**Định lý 3.1.** *Tồn tại một song ánh*

$$\Omega: \text{Ext}_{\Gamma, s}(G, [R, M]) \rightarrow \text{Hom}_{\Gamma, s}[\text{Dis}_{\Gamma} G, \text{Red}_{\Gamma}[R, M]]$$

*Chứng minh:*

*Bước 1. Mỗi mở rộng đẳng biến (2) của  $\Gamma$ -Vành-Nhóm giao hoán  $[R, M]$  bởi  $\Gamma$ -môđun  $G$  cảm sinh một hàm tử monoidal đối xứng  $\Gamma$ -phân bậc từ  $\text{Dis}_{\Gamma} G$  tới  $\text{Red}_{\Gamma}[R, M]$*

Với mỗi  $x \in G$ , chọn phần tử đại diện  $u_x \in N$  sao cho  $p(u_x) = x$ ,  $u_1 = 1$ . Mỗi phần tử trong  $N$  có thể biểu diễn duy nhất dưới dạng  $mu_x$ , với  $m \in M$ ,  $x \in G$ . Mặt khác,  $u_x u_y$  thuộc cùng một lớp với  $u_{xy}$  và  $\sigma u_x$  thuộc cùng một lớp với  $u_{\sigma x}$  nên tồn tại các phần tử  $f(x, y), f(x, \sigma) \in M$  sao cho:

$$u_x u_y = f(x, y) u_{xy}, \quad \sigma u_x = f(x, \sigma) u_{\sigma x} \quad (3)$$

Như vậy, ta có hàm  $f: G \times G \cup (G \times \Gamma) \rightarrow M$ .

Do  $u_1 = 1$  nên ta có:

$$f(x, 1) = 1 = f(1, y) \quad (4)$$

Tính kết hợp và giao hoán của phép toán trong  $N$  lần lượt cho ta:

$$f(x, y)f(xy, z) = f(y, z)f(x, yz), \quad f(x, y) = f(y, x) \quad (5)$$

Do  $[S, N]$  là một  $\Gamma$ -Vành-Nhóm giao hoán nên  $N$  là một  $\Gamma$ -môđun, vì vậy các điều kiện  $\sigma(u_x u_y) = (\sigma u_x)(\sigma u_y)$ ,  $\tau(\sigma u_x) = (\tau \sigma) u_x$  lần lượt kéo theo:

$$\sigma f(x, y)f(x + y, z) = f(x, \sigma)f(y, \sigma)f(\sigma x, \sigma y) \quad (6)$$

$$f(x, \sigma \tau) = \sigma f(x, \tau)f(\tau x, \sigma) \quad (7)$$

Bây giờ, ta dựng hàm tử monoidal đối xứng  $(F, \tilde{F}): \text{Dis}_\Gamma G \rightarrow \text{Red}_\Gamma[R, M]$  như sau:

$$F(\sigma) = (f(x, \sigma), \sigma), \quad \tilde{F}_{x,y} = (f(x, y), 1)$$

Với cách đặt như vậy,  $(F, \tilde{F})$  là một hàm tử monoidal đối xứng phân bậc giữa các phạm trù Picard phân bậc. Thật vậy, các hệ thức (4), (5) lần lượt chứng tỏ  $(F, \tilde{F})$  tương thích với các ràng buộc đơn vị, kết hợp và đối xứng của các phạm trù Picard, điều kiện (7) chứng tỏ hàm tử  $F$  bảo toàn phép hợp thành của các mũi tên. Biểu đồ về tính tự nhiên của  $\tilde{F}_{x,y}$  tương đương với hệ thức:

$$(f(x, \sigma), \sigma) \circ (f(x, y), 1) = (f(\sigma x, \sigma y), 1) \circ (f(x + y, \sigma), \sigma)$$

Điều này được suy ra từ hệ thức (6).

*Bước 2. Hai mở rộng đẳng biến  $\mathcal{E}$  và  $\mathcal{E}'$  của  $\Gamma$ -Vành-Nhóm  $[R, M]$  bởi  $\Gamma$ -môđun  $M$  là tương đẳng khi và chỉ khi các hàm tử monoidal đối xứng cảm sinh  $F_{\mathcal{E}}, F_{\mathcal{E}'}$  là đồng luân.*

Trước hết, ta chỉ ra rằng mỗi mở rộng đẳng biến  $\mathcal{E}$  của  $\Gamma$ -Vành-Nhóm  $[R, M]$  bởi  $\Gamma$ -môđun  $G$  tương đẳng với một mở rộng tích chéo hỗn hợp đẳng biến như sau.

Theo Bước 1, mỗi mở rộng  $\mathcal{E}$  cảm sinh một hàm  $f: G \times G \cup (G \times \Gamma) \rightarrow M$  được xác định bởi (3) thỏa mãn các điều kiện (5) - (7).

Đặt  $S_0 = R \bullet_f G = \bigoplus_x R \times \{x\}$  là một  $R$ -môđun trái tự do với cơ sở  $\{(1, x), x \in G\}$ , phép nhân được cho bởi quy tắc:  $(r, x)(s, y) = (rsf(x, y), xy)$ .

Nhóm tích chéo  $N_0 = M \times_f G$  chính là nhóm con của  $M \times G$  của  $(R \bullet G)^*$ .  $\Gamma$ -tác động lên  $[R \bullet_f G, M \times_f G]$  được cho bởi  $\sigma(r, x) = (\sigma f(x, \sigma), \sigma x)$ .

Các đồng cấu đẳng biến  $i, p$  lần lượt được xác định bởi:

$$i(r) = (r, 1), \quad p(r, x) = x$$

Với mỗi  $x \in G$  thì  $Rp^{-1}(x)R = R \times \{x\}$ .

Tính kết hợp và giao hoán của phép nhân trong  $S_0$  được suy ra từ (4). Phần tử đơn vị là  $(1, 1)$  do (4). Hơn nữa, nhờ (6) và (7),  $R_0$  là một  $\Gamma$ -vành vì  $\sigma(r, x) = (\sigma f(x, \sigma), \sigma x)$ .

Khi đó, ta thu được mở rộng đẳng biến:

$$\mathcal{E}_0 : ([R, M] \xrightarrow{i} [R \bullet_f G, M \times_f G], \quad M \times_f G \xrightarrow{p} G)$$

với  $i(n) = (n, 0)$ ,  $p(n, x) = x$ .

Hơn nữa, dễ thấy  $\mathcal{E}$  tương đẳng với  $\mathcal{E}_0$  bởi  $\Gamma$ -đẳng cấu.

$$\beta_0 : [R \bullet_f G, M \times_f G] \rightarrow [S, N], \quad \sum_x (r_x, x) \mapsto \sum_x r_x u_x$$

Bây giờ, giả sử  $F_\varepsilon, F_{\varepsilon'} : \text{Dis}_\Gamma G \rightarrow \text{Red}_\Gamma [R, M]$  là hai hàm tử đồng luân bởi  $\theta : F_\varepsilon \rightarrow F_{\varepsilon'}$ . Khi đó, tồn tại ánh xạ  $g : G \rightarrow M$  sao cho  $\theta_x = (g(x), 1)$  với mọi  $x \in G$ . Do vậy, từ điều kiện khớp (1) của đồng luân  $\theta$  ta có:

$$g(1) = 1, \quad f_\varepsilon(x, y)g(xy) = g(x)g(y)f_{\varepsilon'}(x, y) \quad (8)$$

Tính tự nhiên của  $\theta_x$  kéo theo:

$$f_\varepsilon(x, \sigma)g(\sigma x) = \sigma g(x)f_{\varepsilon'}(x, \sigma) \quad (9)$$

với mọi  $x, y \in G, \sigma \in \Gamma$ .

Theo chứng minh trên, các mở rộng  $\mathcal{E}$  và  $\mathcal{E}'$  lần lượt tương đẳng với các mở rộng tích chéo hỗn hợp đẳng biến  $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0'$ . Hơn nữa, các hệ thức (8), (9) chứng tỏ ánh xạ  $\beta : R_0 \rightarrow R_0', \beta(r, x) = (rg(x), x)$  là một đẳng cấu giữa các  $\Gamma$ -Vành-Nhóm, hay  $\mathcal{E}_0$  và  $\mathcal{E}_0'$  là tương đẳng.

Như vậy hai mở rộng  $\mathcal{E}$  và  $\mathcal{E}'$  là tương đẳng.

Ngược lại, giả sử hai mở rộng  $\mathcal{E}$  và  $\mathcal{E}'$  là tương đẳng. Khi đó, chúng lần lượt tương đẳng với các mở rộng tích chéo hỗn hợp đẳng biến  $\mathcal{E}_0, \mathcal{E}_0'$ . Hiển nhiên,  $\mathcal{E}_0$  và  $\mathcal{E}_0'$  là hai mở rộng tương đẳng, nghĩa là tồn tại một  $\Gamma$ -đẳng cấu Vành-Nhóm  $\beta : R \times_{f_\varepsilon} G \rightarrow R \times_{f_{\varepsilon'}} G$ . Khi đó, tồn tại hàm  $g : G \rightarrow M$  thỏa mãn  $g(1) = 1$  sao cho  $(r, x) \mapsto (rg(x), x)$ .

Tính  $\Gamma$ -đồng cấu của  $\beta$  kéo theo hàm  $g$  thỏa mãn các hệ thức (7) và (8), trong đó  $f_\varepsilon, f_{\varepsilon'}$  tương ứng là các hàm được xác định từ các mở rộng  $\mathcal{E}$ , và  $\mathcal{E}'$  theo các công thức (2).

Gọi  $F, F'$  là các hàm tử monoidal đối xứng  $\Gamma$ -phân bậc, với  $\tilde{F}_{x,y} = (f_\varepsilon(x, y), 1), \tilde{F}'_{x,y} = (f_{\varepsilon'}(x, y), 1)$ , thì hàm  $g : G \rightarrow M$  là một đồng luân giữa chúng.

Từ hai bước trên ta có  $\Omega : [E] \mapsto [F_\varepsilon]$  là một đơn ánh.

*Bước 3.  $\Omega$  là toàn ánh.*

Giả sử  $(F, \tilde{F}): \text{Dis}_\Gamma G \rightarrow \text{Red}_\Gamma[R, M]$  là một hàm tử monoidal đối xứng phân bậc. Ta có thể giả thiết rằng  $F_* = id$ . Khi đó, ta đặt  $F(\sigma) = (f(x, \sigma), \sigma)$ ,  $\tilde{F}_{x,y} = (f(x, y), 1)$  là các mũi tên trong  $\text{Red}_\Gamma[R, M]$ , trong đó  $f: (G \times G) \cup (G \times \Gamma) \rightarrow M$ .

Hàm  $f$  thỏa mãn các hệ thức (4) - (7). Thật vậy, tính tương thích của  $(F, \tilde{F})$  với các ràng buộc đơn vị, kết hợp và giao hoán kéo theo (4) - (5), tính tự nhiên của  $\tilde{F}_{x,y}$  dẫn đến (6) và tính bảo toàn phép hợp thành của các mũi tên kéo theo (7).

Khi đó, theo Bước 2 ta thu được mở rộng tích chéo hỗn hợp đẳng biến  $\mathcal{E}$ . Hiển nhiên  $\mathcal{E}$  cảm sinh  $(F, \tilde{F})$ , và vì vậy  $\Omega$  là toàn cầu.

**Định lý 3.2.** Cho  $\Gamma$ -Vành-Nhóm  $[R, M]$  và  $\Gamma$ -môđun  $G$ . Khi đó, tồn tại một song ánh:

$$\text{Ext}_{\Gamma,s}(G, [R, M]) \rightarrow H_{\Gamma,s}^2(G, M).$$

*Chứng minh.* Theo Định lý 3.12 [3], ta có:

$$\text{Hom}_{\Gamma,s}[\text{Dis}_\Gamma G, \text{Red}_\Gamma[R, M]] \leftrightarrow H_{\Gamma,s}^2(\pi_0(\text{Dis}_\Gamma G), \pi_1(\text{Red}_\Gamma[R, M])).$$

Do  $\pi_0(\text{Dis}_\Gamma G) = G$ ,  $\pi_1(\text{Red}_\Gamma[R, M]) = M$  nên kết hợp với Định lý 3.1 ta có:

$$\text{Ext}_{\Gamma,s}(G, [R, M]) \leftrightarrow H_{\Gamma,s}^2(G, M)$$

**Lời cảm ơn.** Tác giả xin chân thành cảm ơn PGS. TS. Nguyễn Tiến Quang đã cho những nhận xét quý báu đối với bản thảo của bài báo.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] A. M. Cegarra, A. R. Garzón (2003), *Some algebraic applications of graded categorical group theory*, Theory and Applications of Categories, Vol. 11, No. 10, 215 - 251.
- [2] A. M. Cegarra, E. Khmaladze (2007), *Homotopy classification of braided graded categorical groups*, J. Pure and Applied Algebra 209, 411 - 437.
- [3] A. M. Cegarra, E. Khmaladze (2007), *Homotopy classification of graded Picard categories*, Adv. Math., 213 (2), 644 - 686.
- [4] A. Joyal, R. Street (1991), *Braided tensor categories*, Adv. Math. (1) 82, 20 - 78.
- [5] N. T. Quang (2010), *The factor sets of Gr-categories of the type  $(\Pi, A)$* , International Journal of Algebra, 4, No. 14, 655 - 668.
- [6] N. T. Quang, C. T. K. Phung, P. T. Cuc (2014), *Braided equivariant crossed modules and cohomology of  $\Gamma$ -modules*, Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, December, 953 - 975.

## AN APPLICATION OF THE THEORY OF BRAIDED GRADED CATEGORICAL GROUPS

Pham Thi Cuc

### ABSTRACT

*In this paper we introduce an application of the theory of braided graded categorical groups on the problem of equivariant extensions of abel Ring-Group.*

**Keywords:** *Braided graded categorical group, equivariant extension of Ring-Group.*