

KHÔI PHỤC XẤP XỈ HÀM TRONG KHÔNG GIAN BESOV BẰNG B-SPLINES

Nguyễn Mạnh Cường¹, Mai Xuân Thảo²

TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi sẽ mở rộng một số kết quả của GS. Đinh Dũng trong việc sử dụng khôi phục thích nghi tối ưu đối với các hàm thuộc tập hợp $W \subset L_q(\Pi), 0 < q \leq \infty$.

Từ khóa: *Khôi phục thích nghi, biểu diễn giả nội suy, không gian Besov.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Chúng ta xét bài toán khôi phục xấp xỉ hàm số xác định trên đoạn $\Pi = [0, 1]$. Hàm số cần khôi phục thuộc tập hợp $W \subset L_q(\Pi), 0 < q \leq \infty$. Ở đây $L_q(\Pi)$ là không gian định chuẩn các hàm xác định trên Π với chuẩn tích phân $\|\cdot\|_q$ thông thường cho trường hợp $0 < q < \infty$, và không gian định chuẩn $C(\Pi)$ các hàm liên tục trên Π với chuẩn $\max \|\cdot\|_q$ khi $q = \infty$ bằng lớp hàm Besov có modul của độ trơn bị chặn.

Cho B là một tập hợp con trong L_q , chúng ta sẽ định nghĩa phương pháp khôi phục với các điểm giá trị lấy mẫu và hàm sẽ khôi phục thích nghi từ B theo từng hàm $f \in W$. Đối với từng hàm $f \in W$ ta chọn n điểm $x^1, \dots, x^n$, dựa trên thông tin về giá trị lấy mẫu $f(x^1), \dots, f(x^n)$ ta chọn hàm $g = S_n^B(f)$ để khôi phục hàm f . Khi đó S_n^B là một phương pháp khôi phục thích nghi. Toán tử $S_n^B(f)$ được định nghĩa chính xác như sau:

Đặt I^n là tập hợp bao gồm các tập hợp ξ trong Π có số phần tử không quá n , V^n là tập hợp mà mỗi phần tử là một bộ các số thực $a_\xi = \{a(x)\}_{x \in \xi}, \xi \in I^n, a(x) \in \mathbb{R}$.

Gọi I_n là một ánh xạ từ W đến I^n và P là ánh xạ từ V^n đến B . Khi đó cặp (I_n, P) xác định một ánh xạ S_n^B từ W đến B cho bởi công thức

$$S_n^B(f) := P\left(\{f(x)\}_{x \in I_n(f)}\right) \quad (1.1)$$

Chúng ta muốn chọn một phương pháp khôi phục lấy mẫu S_n^B mà các sai số của khôi phục này $\|f - S_n^B(f)\|_q$ càng nhỏ càng tốt. Rõ ràng một sự lựa chọn hiệu quả cần được thích nghi với từng hàm số f .

^{1,2} Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

Cho B là một họ các tập con B trong L_q , khi đó sai số của phương pháp khôi phục thích nghi tối ưu được đo bằng đại lượng

$$R_n(W, B)_q := \inf_{B \in B} \inf_{S_n^B} \sup_{f \in W} \|f - S_n^B(f)\|_q \quad (1.2)$$

Trong đó S_n^B là tất cả các ánh xạ được định nghĩa ở (1.1). Ký hiệu $R_n(W, B)_q$ bằng $e_n(W)_q$ nếu B họ tất cả các tập hợp con B trong L_q sao cho $|B| \leq 2^n$, và bằng $r_n(W)_q$ nếu B có giả chiều không quá n . Giả chiều được định nghĩa như sau: Cho một tập hợp B các hàm số xác định trên tập U , khi đó giả chiều của B được định nghĩa là số nguyên n lớn nhất sao cho tồn tại các điểm $a^1, a^2, \dots, a^n$ trong U và $b \in \mathbb{R}^n$ để số phần tử của tập hợp: $\{\text{sgn}(y) : y = (f(a^1) + b_1, f(a^2) + b_2, \dots, f(a^n) + b_n), f \in B\}$ là 2^n , ở đây $\text{sgn}(x) = 1$ với $t > 0$, $\text{sgn}(x) = -1$ với $t \leq 0$ và cho $x \in \mathbb{R}^n$, $\text{sgn}(x) = (\text{sgn}(x_1), \text{sgn}(x_2), \dots, \text{sgn}(x_n))$.

Giả sử $\Phi = \{\varphi_k\}_{k \in J}$ là họ các hàm số trong L_q . Chúng ta định nghĩa $\sum_n \Phi$ là tập hợp phi tuyến bao gồm các tổ hợp tuyến tính của n phần tử bất kỳ trong Φ , có nghĩa là:

$$\sum_n \Phi := \left\{ \varphi = \sum_{j=1}^n a_j \varphi_j : \varphi_{kj} \in \Phi \right\}.$$

Chúng ta sẽ nghiên cứu các phương pháp khôi phục thích nghi hàm $f \in W$ bằng các hàm số từ $\sum_n \Phi$. Cho mỗi hàm $f \in W$, chúng ta chọn một dãy $\xi = \{x^s\}_{s=1}^n$ của n điểm trong Π , một dãy $a = \{a_s\}_{s=1}^n$ các hàm trên $\mathbb{R}^n$ và một dãy $\Phi_n = \{\varphi_{k_s}\}_{s=1}^n$ các hàm trong Φ . Ta định nghĩa phương pháp khôi phục $S(\Phi), a, \xi, f$ như sau:

$$S(\Phi_n, a, \xi, f) := \sum_{s=1}^n a_s (f(x^1), f(x^2), \dots, f(x^n)) \varphi_{k_s}$$

Sai số của phương pháp được đo bởi đại lượng

$$s_n(W, \Phi)_q = \inf_{\Phi_n, a, \xi} \sup_{f \in W} \|f - S(\Phi_n, a, \xi, f)\|_q. \quad (1.3)$$

2. BIỂU DIỄN SỐNG NHỎ GIẢ NỘI SUY TRONG KHÔNG GIAN BESOV

Cho một số nguyên dương r , gọi M là một B-spline trung tâm bậc $2r$ với giá $[-r, r]$ và các nốt là các điểm nguyên $-r, \dots, 0, \dots, r$, và định nghĩa B-spline sống nhỏ:

$$M_{k,s}(x) := M(2^k x - s)$$

Cho một số không âm k và $s \in \mathbb{Z}$, thì M là tập hợp tất cả $M_{k,s}$ không triệt tiêu trên Π . Cho $\lambda = \{\lambda(j)\}_{j \in P(\mu)}$ là dãy chẵn hữu hạn, tức là $\lambda(j) = \lambda(-j)$, ở đây

$P(\mu) := \{j \in \mathbb{Z} : |j| \leq \mu\}$ và $\mu \geq r-1$. Chúng ta định nghĩa toán tử tuyến tính Q cho hàm f trên $\mathbb{R}$ bởi

$$Q(f, x) := \sum_{s \in \mathbb{Z}} \Lambda(f, s) M(x-s) \quad (2.1)$$

$$\text{ở đây} \quad \Lambda(f, s) := \sum_{j \in P(\mu)} \lambda(j) f(s-j) \quad (2.2)$$

Khi đó toán tử Q bị chặn trên $C(\mathbb{R})$ và $\|Q(f)\|_{C(\mathbb{R})} \leq \|\Lambda\| \|f\|$,

$$\text{ở đây} \quad \|\Lambda\| = \sum_{j \in P(\mu)} |\lambda(j)|$$

Một toán tử Q được xác định từ (2.1 - 2.2) tái tạo lại P_{2r-1} được gọi là một toán tử giả nội suy trong $C(\mathbb{R})$, tức là

$$Q(p) = p, \text{ Trong đó: } p \in P_{2r-1}$$

Chúng ta sẽ cần đến bất đẳng thức đối với chuẩn của $L_p(\Pi)$ như sau: Nếu τ là một số thỏa mãn $0 < \tau \leq \min(p, 1)$ thì cho bất kỳ một dãy các hàm $\{f_k\}$ ta có bất đẳng thức

$$\left\| \sum f_k \right\|_{p, \Pi}^\tau \leq \sum \|f_k\|_{p, \Pi}^\tau \quad (2.3)$$

$$\text{Nếu } f \in L_p(\Pi), \text{ khi đó } \omega_l(f, t)_p := \sup_{|h| < t} \left\| \Delta_h^l f \right\|_{p, \Pi(lh)}$$

được gọi là modul tron cấp l của f , ở đây $\Pi(lh) := \{x : x, x+lh \in \Pi\}$ và toán tử sai phân cấp l được định nghĩa bởi:

$$\Delta_h^l f(x) := \sum_{j=0}^l (-1)^{l-j} C_l^j f(x+jh).$$

Cho hàm số $\Omega : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ thỏa mãn các điều kiện:

$$(i) \quad \Omega(t) > 0, \forall t > 0,$$

$$(ii) \quad \Omega(t) \leq c \cdot \Omega(t'), \forall t, t' \in \mathbb{R}_+, t \leq t',$$

$$(iii) \quad \forall \gamma \geq 1, \exists C' = C'(\gamma) \text{ sao cho } \Omega(\gamma t) \leq C' \cdot \Omega(t), t \in \mathbb{R}_+.$$

Cho $0 < p, \theta \leq \infty$, thì không gian Besov $B_{p, \theta}^\Omega$ được định nghĩa là tập hợp các hàm $f \in L_p(\Pi)$ sao cho chuẩn Besov sau là hữu hạn

$$\|f\|_{B_{p, \theta}^\Omega} := \|f\|_p + \|f\|_{B_{p, \theta}^\Omega},$$

ở đây $\|f\|_{B_{p, \theta}^\Omega}$ là nửa chuẩn Besov, được xác định bởi

$$\|f\|_{B_{p, \theta}^\Omega} := \begin{cases} \left(\int_{\Pi} \left\{ \omega_l(f, t)_p / \Omega(t) \right\}^\theta \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{\theta}} & \theta < \infty, \\ \sup_{t \in \Pi} \left\{ \omega_l(f, t)_p / \Omega(t) \right\} & \theta = \infty. \end{cases}$$

Giả sử Q là một toán tử giả nội suy từ (2.1 - 2.2), cho $h > 0$ và một hàm f xác định trên $\mathbb{R}$, chúng ta xác định toán tử $Q(.,h)$ như sau:

$$Q(f;h) := \sigma_h \circ Q \circ \sigma_{1/h}(f), \text{ ở đây } \sigma_h(f, x) = f(x/h).$$

Từ định nghĩa ta có

$$Q(f, x; h) = \sum_k \Lambda(f, k; h) M(h^{-1}x - k), \text{ với } \Lambda(f, k; h) = \sum_{j \in P(\mu)} \lambda(j) f(h(k - j)).$$

Toán tử $Q(.,h)$ có các tính chất tương tự như toán tử Q , cũng được gọi là một toán tử giả nội suy trong $C(\mathbb{R})$. Nhưng $Q(.,h)$ không được định nghĩa cho f trên Π , và do đó không khôi phục được hàm số f với các điểm lấy mẫu trong Π .

Một cách tiếp cận để xây dựng toán tử giả nội suy cho một hàm số trên Π là mở rộng nó bằng các đa thức nội suy Lagrange.

Cho một số nguyên không âm k , đặt $x_j = j2^{-k}$, $j \in \mathbb{Z}$. Giả sử f là một hàm số trên Π . Gọi $U_k(f)$ và $V_k(f)$ lần lượt là các đa thức nội suy Lagrange tại $2r$ điểm bên trái $x_0, x_1, \dots, x_{2r-1}$ và điểm $2r$ điểm bên phải $x_{2k-2r+1}, x_{2k-2r+3}, \dots, x_{2k}$ trên đoạn Π . Hàm số $\bar{f}$ được định nghĩa là hàm số mở rộng của f trên $\mathbb{R}$.

$$\bar{f}_k(x) = \begin{cases} U_k(f, x), & x < 0, \\ f(x) & 0 \leq x \leq 1, \\ V_k(f, x), & x > 1. \end{cases}$$

Nếu f liên tục trên Π thì $\bar{f}$ liên tục trên $\mathbb{R}$. Giả sử Q là một toán tử giả nội suy (2.1 - 2.2) trong $C(\mathbb{R})$,

Khi đó chúng ta xây dựng toán tử Q_k xác định bởi:

$$Q_k(f, x) := Q(\bar{f}_k, x; 2^{-k}), x \in \Pi.$$

Cho một hàm f trên Π . Khi đó $Q_k(f, x) = \sum_{s \in J(k)} a_{k,s}(f) M_{k,s}(x)$, $\forall x \in \Pi$, ở đây

$$J(k) := \{s \in \mathbb{Z}, -r < s < 2^+ + r\} \text{ và } a_{k,s}(f) := \Lambda(\bar{f}_k, s; 2^{-k}) = \sum_{|j| \leq \mu} \lambda(j) \bar{f}_k((2^{-k}(s - j))).$$

Để tiện lợi ta quy ước $Q_{-1}(f) = 0$ cho tất cả f trên Π . Đặt $q_k := Q_k - Q_{k-1}$. Chúng ta có $Q_k = \sum_{k' \leq k} q_{k'}$.

Bổ đề 1. Với mọi $f \in C(\Pi)$, ta có $\|f - Q_k(f)\|_\infty \leq C \omega_{2r}(f, 2^{-k})_\infty$

Và $\|f - Q_k(f)\|_\infty \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$.

Từ Bổ đề 1 với mỗi hàm liên tục f ta có biểu diễn

$$f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} q_k(f)$$

Sự hội tụ theo chuẩn của $L_\infty(\Pi)$, ở đây $q_k(f) = \sum_{s \in J(k)} c_{k,s}(f) M_{k,s}$,

$$c_{k,s}(f) := a_{k,s}(f) - a'_{k,s}(f), k \geq 0,$$

$$a'_{k,s}(f) := 2^{-2r+1} \sum_{(m,j) \in C_r(k,s)} C_{2r}^j a_{k-1,m}(f), k > 0, a'_{0,s}(f) := 0,$$

và $C_r(k,s) := \{(m,j) : 2m+j-r=s, m \in J(k-1), 0 \leq j \leq 2r\}$, $k > 0, C_r(0,s) := \{0\}$.

$$\text{Nhu vậy } f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_{s \in J(k)} c_{k,s}(f) M_{k,s} \quad (2.4)$$

Nếu $0 < p < \infty, g \in \sum(k)$, tức là $g = \sum_{s \in J(k)} a_s M_{k,s}$

$$\text{thì } \|g\|_p \approx 2^{-k/p} \cdot \|\{a_s\}\|_{p,k}, \quad (2.5)$$

ở đây $\|\{a_s\}\|_{p,k} := \left(\sum_{s \in J(k)} |a_s|^p \right)^{1/p}$, với $p = \infty$ ta có chuẩn max tương ứng.

Cho f là hàm số xác định trên Π , khi đó theo (2.5) ta có các chuẩn sau là tương đương

$$B_2(f) := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \|q_k(f)\|_p / \Omega(2^{-k}) \right\}^\theta \right)^{1/\theta},$$

$$B_3(f) := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ 2^{-k/p} \|\{c_{k,s}(f)\}\|_{p,k} / \Omega(2^{-k}) \right\}^\theta \right)^{1/\theta}.$$

Định lý 1. Cho $0 < p, \theta \leq \infty$ và U là hàm số thỏa mãn thêm các điều kiện tồn tại các hằng số $\mu, p > 0$ và C_1, C_2 sao cho

$$\Omega(t).t^{-\mu} \leq C_1 \Omega(t').t'^{-\mu}, t \leq t'; t, t' \in \Pi \quad (2.6)$$

$$\Omega(t).t^{-p} \geq C_2 \Omega(t').t'^{-p}, t \leq t'; t, t' \in \Pi \quad (2.7)$$

Khi đó ta có các kết quả sau

(i) Nếu $\mu > \frac{1}{p}$ và $p < 2r$ thì một hàm $f \in B_{p,\theta}^\Omega$ có thể biểu diễn thành chuỗi (2.4) thỏa mãn:

$$B_2(f) \ll \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \quad (2.8)$$

(ii) Nếu $p < \min(2r, 2r-1 + \frac{1}{p})$ một hàm g trên Π có thể biểu diễn

$$g = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} g_k = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_{s \in J(k)} c_{k,s} M_{k,s} \text{ và thỏa mãn:}$$

$$B_4(g) := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ \|g_k\|_p / \Omega(2^{-k}) \right\}^\theta \right)^{1/\theta} < \infty$$

thì $f \in B_{p,\theta}^\Omega$ hơn nữa

$$\|g\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \ll B_4(g)$$

(iii) Nếu $\mu > \frac{1}{p}$ và $p < \min(2r, 2r-1 + \frac{1}{p})$ thì một hàm f trên Π thuộc $B_{p,\theta}^\Omega$ khi và chỉ khi f có thể biểu diễn dưới dạng (2.4) thỏa mãn điều kiện (2.8). Hơn nữa khi đó ta có $\|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega}$ tương ứng với $B_2(f)$.

Định lý này đã được chứng minh trong [1].

3. ĐÁNH GIÁ CHẶN TRÊN

Chúng ta sử dụng một số ký hiệu: $A_n(f) \ll B_n(f)$ nếu $A_n(f) \leq C.B_n(f)$ với C là hằng số không phụ thuộc n hoặc $f \in W$; $A_n(f) \approx B_n(f)$ nếu $A_n(f) \ll B_n(f)$ và $B_n(f) \ll A_n(f)$.

Bây giờ ta xem xét tất cả các cách chia đoạn $\Pi = [0,1]$ thành các đoạn nhỏ, ký hiệu mỗi cách chia như vậy là π và $|\pi|$ là số các đoạn trong π . E_m là họ tất cả các cách chia π của đoạn $[0,1]$ mà $|\pi| \leq m$. $Q(\pi)$ là tập hợp tất cả các hàm f trên Π sao cho trên mỗi đoạn của π thì f là một thức có bậc không quá $2r-1$. Q_m là hợp của các $Q(\pi)$ với $\pi \in E_m$.

Bổ đề 2. Cho $\bar{k}, k^*$ là các số nguyên không âm với $\bar{k} \leq k^*$ và $\{n_k\}_{k=\bar{k}+1}^{k^*}$ là dãy các số nguyên không âm với $n_k \leq |J(k)|, k = \bar{k}+1, \dots, k^*$. B là tập tất cả các hàm f có dạng

$$f = \sum_{s \in J(k)} a_s M_{\bar{k},s} + \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} \sum_{j=1}^{n_k} c_{k,sj} M_{k,sj},$$

với $s_j \in J(k)$ thì $B \subset Q_m$, ở đây $m = 2^{\bar{k}} + 2r \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} n_k (k - \bar{k})$.

Bổ đề này đã được chứng minh trong [2].

Cho $\psi: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Định nghĩa $B_{p,\theta}^{\{\psi\}}$ là không gian tất cả các hàm f trên Π với

$$\|f\|_{B_{p,\theta}^{\{\psi\}}} := \left(\sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \left\{ 2^{\psi(k)} \|q_k(f)\|_p \right\}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}}$$

Bổ đề 3. Cho $0 < p, q, \theta \leq \infty, p \geq q$ và $\psi: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ khi đó với mọi $f \in B_{p,\theta}^{\{\psi\}}$, chúng ta có:

$$\|f - Q_{\bar{k}}(f)\|_q \ll \|f\|_{B_{p,\theta}^{\{\psi\}}} \cdot \begin{cases} \sup_{k > \bar{k}} 2^{-\psi(k)}, \text{ nếu } \theta \leq \min(q, 1), \\ \left(\sum_{k > \bar{k}} \left\{ 2^{-\psi(k)} \right\}^{\theta^*} \right)^{\frac{1}{\theta^*}}, \text{ nếu } \theta > \min(q, 1), \end{cases}$$

$$\text{ở đây } \theta^* := \frac{1}{\frac{1}{\min(q, 1)} - \frac{1}{\theta}}.$$

Bổ đề được chứng minh tổng quát trong [1].

Định lý 2. Cho $0 < p, q, \theta \leq \infty, \Omega(t)$ là hàm số thỏa mãn các điều kiện ở định lý 1.

Ký hiệu $U_{p, \theta}^\Omega = \left\{ f \in B_{p, \theta}^\Omega, \|f\|_{B_{p, \theta}^\Omega} \leq 1 \right\}$. Nếu $\mu > \frac{1}{p}, p < 2r$ thì

$$r_n(U_{p, \theta}^\Omega)_q \ll \Omega\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.1)$$

Hơn nữa còn có thể xây dựng được tập con B trong $\sum_n(M)$ có $\dim_p(B) \leq n$ và một phương pháp khôi phục S_n^B từ (1.1) thỏa mãn

$$\sup_{f \in U_{p, \theta}^\Omega} \|f - S_n^B(f)\|_q \ll \Omega\left(\frac{1}{n}\right) \quad (3.2)$$

Chứng minh. Ta có $\|f\|_{B_{p, \theta}^\Omega} \leq C \cdot \|f\|_{B_{p, \theta}^\Omega}$, nên có thể xem $B_{p, \theta}^\Omega \subset B_{p, \infty}^\Omega$. Vậy chỉ cần chứng minh (3.2) cho $U := U_{p, \infty}^\Omega$.

Ta sử dụng một kết quả đã có là tồn tại $C = C(r, d)$ thỏa mãn $\dim_p(Q_m) \leq C \cdot m$.

Trường hợp $p \geq q$. Đặt $\Phi = \log \left[\frac{1}{\Omega(2^{-1})} \right]$, theo chứng minh ở Định lý 1 (xem [1]) thì

$\Phi(k) + C \geq \mu k, \forall k \in \mathbb{Z}_+$. Đặt $\Psi(k) = \Phi(k) + C$ khi đó $\psi: \mathbb{Z}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$. Với $\bar{k}$ bất kỳ, áp dụng Bổ đề 2 ta có

$$\|f - Q_{\bar{k}}(f)\|_q \ll \|f\|_{B_{p, \theta}^{\{\psi\}}} \cdot \begin{cases} \sup_{k > \bar{k}} 2^{-\psi(k)}, \text{ nếu } \theta \leq \min(q, 1), \\ \left(\sum_{k > \bar{k}} \left\{ 2^{-\psi(k)} \right\}^{\theta^*} \right)^{\frac{1}{\theta^*}}, \text{ nếu } \theta > \min(q, 1), \end{cases},$$

$$\text{ở đây } \theta^* := \frac{1}{1/\min(q, 1) - 1/\theta}.$$

Mặt khác

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p, \theta}^{\{\psi\}}} &= \left(\sum_{k \geq 0} \left\{ 2^{\psi(k)} \|q(f)\|_p \right\}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \\ &= \left(\sum_{k \geq 0} \left\{ \frac{\|q(f)\|_p}{\Omega(2^{-k})} \right\}^\theta \right)^{\frac{1}{\theta}} \leq \|f\|_{B_{p, \theta}^\Omega} \leq C \quad (\text{do } f \in U) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sup_{k > \bar{k}} 2^{-\psi(k)} &= \sup_{k > \bar{k}} \Omega(2^{-k}) \ll C \cdot \Omega(2^{-\bar{k}}) \\ \left(\sum_{k > \bar{k}} \{2^{-\psi(k)}\}^{\theta^*} \right)^{\frac{1}{\theta^*}} &= \left(\sum_{k > \bar{k}} \{\Omega(2^{-k})\}^{\theta^*} \right)^{\frac{1}{\theta^*}} \\ &= \left(\sum_{k > \bar{k}} \{\Omega(2^{-\bar{k}}) 2^{-(k-\bar{k})\mu}\}^{\theta^*} \right)^{\frac{1}{\theta^*}} \ll \Omega(2^{-\bar{k}})\end{aligned}$$

(vì theo tính chất (2.6) ta có $\Omega(2^{-k}) \leq C_1 \cdot 2^{-(k-\bar{k})\mu} \cdot \Omega(2^{-\bar{k}})$).

Như vậy ta đã chứng minh được bất đẳng thức $\sup_{f \in U} \|f - Q_{\bar{k}}(f)\|_q \ll \Omega(2^{-\bar{k}})$.

Số các giá trị lấy mẫu trong $Q_{\bar{k}}(f)$ là $2^{\bar{k}} + 1$. Theo Bổ đề 2 (xem [2]) thì $Q_{\bar{k}}(f) \in Q_m$ với $m = 2^{\bar{k}}$. Ta có $\dim_p(Q_m) \leq C \cdot m$ với C là hằng số. Xác định $\bar{k}$ thỏa mãn:

$$C' \cdot n < \max\{2^{\bar{k}} + 1, C 2^{\bar{k}}\} \leq n.$$

Theo tính chất (i) và (ii) của $\Omega(t)$ suy ra $\Omega(2^{-\bar{k}}) \approx \Omega(\frac{1}{n})$

Từ đó ta xây dựng được $S_n^B(f) = Q_{\bar{k}}(f)$ với $B = Q_m$ thỏa mãn

$$\sup_{f \in U} \|f - S_n^B(f)\|_q \ll \Omega(\frac{1}{n})$$

Trường hợp $p > q$. Với $f \in U$ ta có $f = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(f) = Q_{\bar{k}}(f) + \sum_{k=\bar{k}+1}^{\infty} q_k(f)$

ở đây $\bar{k}$ bất kỳ và $q_k(f) = \sum_{s \in J(k)} c_{k,s}(f) \cdot M_{k,s}$.

Từ (2.8), suy ra $\|q_k(f)\|_p \approx 2^{\frac{k}{p}} \|\{c_{k,s}(f)\}\|_{p,k} \ll \Omega(2^{-k}), \forall k \geq 0$.

Đặt $m_k = |J(k)| = 2^k + 2r - 1, \bar{k}, k^*$ các số nguyên không âm với $\bar{k} < k^*$ và $\{n_k\}_{k=\bar{k}+1}^{k^*}$ là dãy các số nguyên không âm thỏa mãn $n_k < m_k$.

Chúng ta xây dựng phương pháp khôi phục

$$G(f) := Q_{\bar{k}}(f) + \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} G_k(q_k(f)), \quad (3.3)$$

là thành phần tuyến tính không thích nghi của $G(f)$, thành phần phi tuyến thích nghi được xây dựng là tổng của các thuật toán tham lam G_k với mỗi $k = \bar{k} + 1, \dots, k^*$ thì $Q_k(q_k(f))$ được xác định như sau:

Dãy $\{c_{k,s}(f)\}_{s \in J(k)}$ được sắp xếp: $|c_{k,s_1}(f)| \geq |c_{k,s_2}(f)| \geq \dots \geq |c_{k,s_{m_k}}(f)|$, khi đó $k = \bar{k} + 1, \dots, k^*$ và đặt $\delta = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$, ta có:

$$\begin{aligned} \|q_k(f) - G_k(q_k(f))\|_q &= \left\| \sum_{j=n_k+1}^{m_k} c_{k,s_j} \right\|_q \approx 2^{-\frac{k}{q}} \cdot \left(\sum_{j=n_k+1}^{m_k} |c_{k,s_j}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq 2^{-\frac{k}{q}} n_k^{-\delta} \left(\sum_{j=1}^{m_k} |c_{k,s_j}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\ll 2^{\delta k} n_k^{-\delta} \|q_k(f)\|_p \ll 2^{\delta k} n_k^{-\delta} \Omega(2^{-k}) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Bây giờ xét với $k > k^*$

$$\|q_k(f)\|_q = 2^{-\frac{k}{q}} \left(\sum_{s \in J(k)} |c_{k,s}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \leq 2^{-\frac{k}{q}} \left(\sum_{s \in J(k)} |c_{k,s}|^p \right)^{\frac{1}{p}} \approx 2^{\delta k} \cdot \|q_k(f)\|_p \leq 2^{\delta k} \Omega(2^{-k}) \quad (3.5)$$

Xét ánh xạ $G: U \rightarrow B$ được xác định (3.3), B là tập hợp được xác định trong Bổ đề 2 (xem [2]) thì $G(f) \in B$.

Cũng theo Bổ đề 2 ta có $B \in Q_m$ với $m = 2^{\bar{k}} + 2r \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} n_k(k - \bar{k})$. Do $\dim_p(Q_m) \leq C.m$

nên $\dim_p(B) \leq C.m$. Chúng ta xác định $\bar{k}, k^*$, dãy $\{n_k\}$ với $n_k \leq m_k$ như sau:

a) $\bar{k}$ xác định bởi $C_1 \cdot 2^{\bar{k}} \leq n \leq C_2 \cdot 2^{\bar{k}}$, với các hằng số C_1, C_2 được chọn sau cho phù hợp.

b) Số giá trị lấy mẫu của $G(f)$ không vượt quá

$$m' = (2^{\bar{k}} + 1) + (2\mu + 2r) \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} n_k$$

c) Cố định ε thỏa mãn $0 < \varepsilon < \frac{\mu - \delta}{\delta}$

Chúng ta có thể lựa chọn k^* và dãy $\{n_k\}_{k=\bar{k}+1}^{k^*}$ là $k^* = \lceil \varepsilon^{-1} \log(\lambda n) \rceil + \bar{k} + 1$ và $n_k = \lceil \lambda n \cdot 2^{-\varepsilon(k - \bar{k})} \rceil, k = \bar{k} + 1, \dots, k^*$.

Khi đó C_1, C_2, λ được xác định sao cho $n_k \leq m_k, k = \bar{k} + 1, \dots, k^*, C.m \leq n, m' \leq n$.

Mặt khác với mỗi τ cố định thỏa mãn $0 < \tau < \min(q, 1)$.

Từ (3.4), (3.5) và (2.3) thì $\forall f \in U$ ta có:

$$\begin{aligned}
 \|f - S_n^B(f)\|_q^\tau &\leq \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} \|q_k(f) - G_k(q_k(f))\|_q^\tau + \sum_{k>k^*} \|q_k(f)\|_q^\tau \\
 &\ll \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} 2^{\tau \cdot \delta k} \cdot n_k^{-\delta \tau} \cdot \Omega^\tau(2^{-k}) + \sum_{k>k^*} 2^{\tau \cdot \delta k} \cdot \Omega^\tau(2^k) \\
 &\ll \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} 2^{\tau \cdot \delta k} \cdot n_k^{-\delta \tau} \cdot 2^{\varepsilon \cdot \delta \tau \cdot (\bar{k}-k)} \cdot 2^{\tau \cdot (\bar{k}-k) \mu} \cdot \Omega^\tau(2^{2-\bar{k}}) \\
 &\quad + \sum_{k=k^*+1}^{\infty} 2^{\tau \cdot \delta k} \cdot 2^{\tau(k^*-k)\mu} \cdot \Omega^\tau(2^{-k^*}) \\
 &\ll \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} 2^{\tau(k-\bar{k})(\varepsilon\delta-\mu+\delta)} \cdot \Omega^\tau(2^{-\bar{k}}) \\
 &\quad + \sum_{k=k^*+1}^{\infty} 2^{\tau(k^*-k)(\mu-\delta)} \cdot 2^{\tau\delta k^*} \cdot \Omega^\tau(2^{-k^*}) \\
 &\ll \Omega^\tau\left(\frac{1}{n}\right) + 2^{\tau\delta k^*} \Omega^\tau(2^{-k^*}) \text{ (do } \varepsilon\delta - \mu + \delta < 0, \mu - \delta > 0) \\
 &\ll \Omega^\tau\left(\frac{1}{n}\right) + (2^{\delta k^*} \cdot \Omega(2^{-k^*}))^\tau,
 \end{aligned}$$

mà $k^* = \lceil \varepsilon^{-1} \log(\lambda n) \rceil + \bar{k} + 1$, suy ra $2^{\delta k^*} \approx n^{(1+\frac{1}{\varepsilon})\delta}$

và $\Omega(2^{-k^*}) \ll 2^{-(k^*-\bar{k})\mu} \cdot \Omega(2^{-\bar{k}}) \approx n^{\frac{-\mu}{\varepsilon}} \cdot \Omega(2^{-\bar{k}}) \approx n^{\frac{-\mu}{\varepsilon}} \Omega\left(\frac{1}{n}\right)$

nên $2^{\delta k^*} \Omega(2^{-k^*}) \ll n^{(1+\frac{1}{\varepsilon})\delta} n^{\frac{-\mu}{\varepsilon}} \cdot \Omega\left(\frac{1}{n}\right) \ll n^{\delta+\frac{\delta-\mu}{\varepsilon}} \cdot \Omega\left(\frac{1}{n}\right) \ll \Omega\left(\frac{1}{n}\right)$.

Vì vậy $\|f - S_n^B(f)\|_q \ll \Omega\left(\frac{1}{n}\right)$.

Như vậy (3.2) đã được chứng minh và do đó (3.1) được chứng minh.

Để đánh giá cận trên của $s_n(U_{p,\theta}^\Omega, M)$ chúng ta vẫn sử dụng phương pháp xây dựng,

cách xác định $\bar{k}, k^*, \{n_k\}_{k=\bar{k}+1}^{k^*}$ như trên. Khi đó vẫn tìm được các hằng số C', C_1, C_2 và λ thỏa mãn điều kiện: số các B - spline $M_{k,s}$ trong S_n^B ở các trường hợp $p \geq q$ và $p < q$ lần lượt

là $(2^{\bar{k}} + 2r - 1)$ và $(2^{\bar{k}} + 2r - 1) + \sum_{k=\bar{k}+1}^{k^*} n_k$ không vượt quá n .

Từ đó ta có định lý sau:

Định lý 3. Cho $0 < p, q, \theta \leq \infty, \Omega$ thỏa mãn điều kiện ở Định lý 1, $\mu > \frac{1}{p}, p < 2r$.

Khi đó ta có: $s_n(U_{p,\theta}^\Omega, M)_q \ll \Omega\left(\frac{1}{n}\right)$

4. KẾT LUẬN

Bằng việc biểu diễn một hàm $f \in W \subset L_q(\Pi)$, $0 < q \leq \infty$ qua sóng nhỏ giả nội suy trong không gian Besov: $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} \sum_{s \in J(k)} c_{k,s}(f) \cdot M_{k,s}$,

chúng tôi đã xây dựng được phương pháp khôi phục thích nghi lấy mẫu S_n^B , có các sai số là tốt nhất có thể, cụ thể là với hàm số $\Omega: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ thỏa mãn các điều kiện cho trước thì

$$\sup_{f \in U_{p,\theta}^\Omega} \|f - S_n^B(f)\|_q \ll \Omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Hơn nữa, ta có

$$r_n(U_{p,\theta}^\Omega)_q \ll \Omega\left(\frac{1}{n}\right) \text{ và } s_n(U_{p,\theta}^\Omega, M)_q \ll \Omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Ở đây $U_{p,\theta}^\Omega = \left\{ f \in B_{p,\theta}^\Omega : \|f\|_{B_{p,\theta}^\Omega} \leq 1 \right\}$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Birman, M.S., Solomjak, M.Z. (1967), *Piecewise-polynomial approximations of the class*, Math. USSR- Sb. 2(3), 295-317.
- [2] C.K. Chui (1992), *An Introduction to Wavelets*, Academic Press, New York.
- [3] C.K. Chui, H. Diamond (1987), *A natural formulation of quasi-interpolation by multivariate splines*, Proc. Amer. Math. Soc. 99, 643-646.
- [4] C. de Boor, G.J. Fix (1973), *Spline approximation by quasi-interpolants*, J. Approx. Theory 8, 19-45.
- [5] C. de Bore, K. Hollig, S. Riemenschneider (1993), *Box Spline*, Springer-Verlag-Berlin.
- [6] Dinh Dung (2009), *Non-linear sampling recovery based on quasi-interpolant wevelet representations*, Adv. Comput. Math, 30, 375-401.
- [7] Dinh Dung (2011), *Optimal adaptive sampling recovery*, Adv. Comput. Math, 31, 1-41.
- [8] Dinh Dung (2012), *Erratum to: Optimal adaptive sampling recovery*, Adv. Comput. Math, 36, 605-606.
- [9] Dinh Dung, *Sampling and cubature on sparse grids based on a B-spline quasi-interpolation*, accepted for publication in Found. Comp. Math.
- [10] A.N. Kolmogorov, V.M. Tikhomirov (1959), *-entropy and -capacity of sets in function space*, Uspekhi Mat. Nauk 14, 3-86; English transl. in Amer. Math. Soc. Transl. (2) 17(1961).
- [11] J. Ratsaby, V. Maiorov (1998), *The degree of approximation of sets in Euclidean space using sets with bounded Vapnik-Chervoeikis dimension*, Discrete Applied Math. 86, 81-93.
- [12] J. Ratsaby, V. Maiorov, (1999), *On the degree of approximation by manifolds of finite pseudo-dimension*, Constr. Approx. 15, 291-300.

APPROXIMATE RECOVERY OF FUNCTIONS IN BESOV-TYPE SPACES WITH B-SPLINES

Nguyen Manh Cuong, Mai Xuan Thao

ABSTRACT

In this paper, we will extend results obtained by Dinh Dung on optimal methods of adaptive sampling recovery of functions by sets of finite capacity to univariate Besov-type spaces of functions with B-splines.

Keywords: *Adaptive sampling recovery, Quasi-interpolant representations, Besov-type spaces.*