

# DÁNG ĐIỀU TIỆM CẬN NGHIỆM ĐỐI VỚI MỘT LỚP PHƯƠNG TRÌNH PARABOLIC KHÔNG ĐỊA PHƯƠNG

Lê Trần Tinh<sup>1</sup>, Mai Xuân Thảo<sup>2</sup>, Nguyễn Thị Sâm<sup>3</sup>

## TÓM TẮT

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu một lớp phương trình parabolic không địa phương với số hạng khuếch tán phụ thuộc vào chuẩn  $L^2$  của gradient. Sự tồn tại và duy nhất của nghiệm yếu toàn cục nhận được nhờ phương pháp xấp xỉ Faedo - Galerkin. Chúng tôi nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm thông qua nghiên cứu sự tồn tại và tính trơn của tập hút toàn cục trong các cặp không gian. Cuối cùng, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại và tính ổn định mũ của nghiệm dừng.

**Từ khóa:** Phương trình parabolic không địa phương, nghiệm yếu, tập hút toàn cục.

## 1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Trong những năm qua, việc nghiên cứu dáng điệu tiệm cận nghiệm thông qua nghiên cứu tập hút toàn cục nhận được sự quan tâm mạnh mẽ của nhiều tác giả đối với nhiều loại phương trình đạo hàm riêng [2, 10, 13, 15], đặc biệt, các phương trình parabolic liên kết với toán tử  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$  [2, 6, 7, 10, 13]. Những năm gần đây, phương trình parabolic không địa phương đã được nghiên cứu rộng rãi.

Trong bài báo này, chúng tôi nghiên cứu một lớp phương trình parabolic phi tuyến với phần tử khuếch tán không địa phương

$$\begin{cases} u_t - \operatorname{div}(a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \nabla u) + f(u) = g(x), & x \in \Omega, t > 0, \\ u(x, t) = 0, & x \in \partial\Omega, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Trong đó  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  là một tập mở, bị chặn với biên  $\partial\Omega$  liên tục Lipschitz, hàm phi tuyến  $f$ , hệ số khuếch tán  $a$  và ngoại lực  $g$  thỏa mãn các điều kiện sau:

**(H1)**  $a \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}_+)$  phụ thuộc vào chuẩn  $H_0^1$  của  $u$  nghĩa là  $a = a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2)$  thỏa mãn điều kiện:

i)  $a$  là hàm bị chặn, tức là tồn tại hai hằng số dương  $m$  và  $M$  sao cho:

$$0 < m \leq a(t) \leq M, \quad \forall t \in \mathbb{R}. \quad (1.2)$$

ii)  $s \mapsto a(s^2)s$  không giảm. (1.3)

**(H2)**  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm khả vi liên tục thỏa mãn:

<sup>1,2,3</sup> Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

$$c_1 |u|^q - c_0 \leq f(u)u \leq c_2 |u|^q + c_0, \quad (1.4)$$

$$f'(u) \geq -c_3, \quad (1.5)$$

với  $q \geq 2$ , và  $c_0, c_1, c_2, c_3$  là các hằng số dương.

**(H3)**  $g \in L^2(\Omega)$ .

Ký hiệu:

$$\Omega_T := \Omega \times (0, T), \quad V := L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \cap L^q(\Omega_T), \quad V^* := L^2(0, T; H^{-1}(\Omega)) + L^{q'}(\Omega_T)$$

trong đó  $(q, q')$  là cặp đối ngẫu, nghĩa là  $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$ . Giả sử  $u_0 \in L^2(\Omega)$ .

**Định nghĩa 1.1.** Một hàm  $u$  được gọi là một nghiệm yếu của (1.1) trên khoảng  $(0, T)$  nếu  $u \in V$ ,  $u_t \in V^*$ ,  $u(x, 0) = u_0$  hầu khắp nơi trong  $\Omega$ .

$$\int_{\Omega_T} \left( u_t v + a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \nabla u \nabla v + f(u)v - gv \right) dx dt = 0, \quad (1.6)$$

với mọi hàm thử  $v \in V$ .

Bởi vì, nếu  $u \in V$  và  $u_t \in V^*$ , thì  $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ . Điều này giải thích cho điều kiện đầu của bài toán (1.1) có nghĩa. Gọi  $\lambda_1 > 0$  là giá trị riêng đầu tiên của toán tử  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ . Bổ đề sau đây là một hệ quả trực tiếp của bất đẳng thức Holder, bất đẳng thức Young và phép nhúng compact  $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$ .

**Bổ đề 1.1.** Giả sử  $u \in H_0^1(\Omega)$ .

$$\text{Khi đó, } \left| \int_{\Omega} g u dx \right| \leq \varepsilon \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{4\varepsilon\lambda_1} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall \varepsilon > 0.$$

Sử dụng phương pháp xấp xỉ Faedo - Galerkin và bổ đề compact Aubin - Lions - Simon, ta có định lý sau:

**Định lý 1.1.** [7] Giả sử các giả thiết **(H1)**, **(H2)** và **(H3)** được thỏa mãn, với mọi  $u_0 \in L^2(\Omega)$ , bài toán (1.1) có duy nhất nghiệm yếu toàn cục trên khoảng  $(0, T)$ . Hơn nữa, ánh xạ  $u_0 \mapsto u(t)$  là liên tục trong  $(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ .

Ý nghĩa của bài toán xuất phát từ ý nghĩa của các phần tử không địa phương và ứng dụng của toán tử Laplace trong các lĩnh vực khoa học. Các phần tử không địa phương có thể cho các kết quả chính xác hơn. Thí dụ, trong các hệ động lực dân số, hệ số khuếch tán  $a$  được giả thiết phụ thuộc vào tổng dân số toàn miền hơn là vào một mật độ địa phương. Để biết thêm chi tiết cũng như các dạng khác của các phần tử không địa phương, độc giả có thể xem các tài liệu tham khảo [3, 4, 5, 6, 8, 11, 14]. Tuy nhiên, sự xuất hiện của các phần tử không địa phương trong bài toán lại gây ra các khó khăn toán học khiến cho việc phân tích bài toán trở nên phức tạp hơn.

Bài báo có cấu trúc như sau. Trong mục 2, chúng tôi nghiên cứu sự tồn tại của các tập hút toàn cục trong  $(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$  thông qua các ước lượng tiên nghiệm trong  $L^2(\Omega)$ ,

$H_0^1(\Omega)$  và tính compact của phép nhúng  $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$ . Tuy nhiên, chúng tôi thực sự gặp khó khăn trong mục 3 khi chứng minh sự tồn tại của các tập hút toàn cục trong  $(L^2(\Omega), L^q(\Omega))$  và  $(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega))$ . Bởi với các giả thiết (H1), (H2), (H3) nghiệm của bài toán nằm trong  $H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ , vì vậy chúng ta không có các phép nhúng compact tương ứng trong các trường hợp này để chứng minh tính compact tiệm cận cho nửa nhóm sinh ra từ bài toán (1.1). Để vượt qua những khó khăn này, chúng tôi khai thác hướng tiếp cận được sử dụng gần đây khi nghiên cứu các bài toán phương trình đạo hàm riêng được trình bày trong [13, 15]. Phần cuối được dành cho nghiên cứu sự tồn tại và tính ổn định mũ của nghiệm dừng.

*Các ký hiệu:* Chúng tôi sử dụng C để ký hiệu hằng số mà giá trị có thể thay đổi trong mỗi lần xuất hiện.  $\Omega(u \geq M) := \{x \in \Omega : u(x) \geq M\}$  và  $\Omega(u \leq -M) := \{x \in \Omega : u(x) \leq -M\}$ .  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  dùng để ký hiệu cả tích vô hướng và tích đối ngẫu.

## 2. SỰ TỒN TẠI CỦA TẬP HÚT TOÀN CỤC

Nhờ Định lý 1.1, ta xây dựng được nửa nhóm liên tục  $S(t) : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  xác định bởi  $S(t) : u_0 \mapsto u(t)$  với  $S(t)u_0$  là một nghiệm yếu toàn cục của (1.1) với điều kiện đầu  $u_0$ . Sau đây, chúng tôi chỉ đưa ra các tính toán cơ bản, các chứng minh chặt chẽ nhờ sử dụng phương pháp xấp xỉ Galerkin và Bổ đề 11.2 [10].

**Mệnh đề 2.1.** Nửa nhóm  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  có một tập hấp thụ bị chặn  $B_0$  trong  $(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ .

*Chứng minh:*

Nhân phương trình đầu tiên của bài toán (1.1) với  $u$  và sử dụng tích phân từng phần, ta có

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} f(u)u dx = \int_{\Omega} g u dx \quad (2.1)$$

Từ (1.2), (1.4) và Bổ đề 1.1, suy ra

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + m\lambda_1 \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2c_0 |\Omega| + \frac{1}{m\lambda_1} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Áp dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có:

$$\|u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-Ct} + R_0(1 - e^{-Ct}), \quad (2.2)$$

với  $C = m\lambda_1, R_0 = 2c_0 |\Omega| + \frac{1}{m\lambda_1} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2$ . Bất đẳng thức (2.2) kéo theo  $B_0 = B(\sqrt{\rho_0})$

với  $\rho_0 = 2R_0$  là một tập hấp thụ bị chặn của  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  nằm trong cặp không gian  $(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ . Nghĩa là với mỗi tập  $B$  trong  $L^2(\Omega)$ , đều tồn tại  $T_0 = T_0(B)$  chỉ phụ thuộc duy nhất vào chuẩn  $L^2$  của  $B$  thỏa mãn,  $\forall t \geq T_0, \forall u_0 \in B$ .

$$\|S(t)u_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \rho_0. \quad (2.3)$$

**Mệnh đề 2.2.** *Nửa nhóm  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  có một tập hấp thụ bị chặn  $B_1$  trong  $(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega))$ .*

*Chứng minh.*

Nhân phương trình đầu tiên của bài toán (1.1) với  $-\Delta u$ , sử dụng tích phân từng phần, (1.2) và (1.5), ta thu được

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + m \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \left(\frac{1}{2} + c_3\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \langle g, \Delta u \rangle \quad (2.4)$$

Mặt khác,

$$\left(\frac{1}{2} + c_3\right) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 - \langle g, \Delta u \rangle = -\left(\frac{1}{2} + c_3\right) \langle u, \Delta u \rangle - \langle g, \Delta u \rangle \leq m \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}^2 + C(\|g\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^2(\Omega)}^2) \quad (2.5)$$

Từ (2.4), (2.5) và Mệnh đề 2.1, nếu  $u_0 \in B_0$  thì

$$\frac{d}{dt} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq R_1, \text{ với } R_1 > 0 \quad (2.6)$$

Vì  $B_0$  hút bất kỳ tập con bị chặn của  $L^2(\Omega)$  nên áp dụng bất đẳng thức Gronwall cho (2.6) ta có  $B_1 = B_{H_0^1(\Omega)}(\rho_1^{-2})$  với  $\rho_1 = 2R_1$  là một tập hấp thụ bị chặn của nửa nhóm  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  trong  $H_0^1(\Omega)$ : Nghĩa là với bất kỳ tập  $B$  nằm trong  $L^2(\Omega)$ , tồn tại  $T_1 = T_1(B)$  chỉ phụ thuộc chuẩn  $L^2$  của  $B_0$  thỏa mãn,  $\forall t \geq T_1, \forall u_0 \in B$ ,

$$\|S(t)u_0\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \leq \rho_1 \quad (2.7)$$

Nhờ phép nhúng compact  $H_0^1(\Omega) \subset\subset L^2(\Omega)$ , Mệnh đề 2.1 và Mệnh đề 2.2, ta có định lý sau:

**Định lý 2.1.** *(Sự tồn tại của tập hút toàn cục trong  $(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ ) Nếu các giả thiết (H1), (H2) và (H3) được thỏa mãn thì nửa nhóm  $S(t)$  sinh bởi bài toán (1.1) có một tập hút toàn cục  $\mathcal{A}_2$  trong  $(L^2(\Omega), L^2(\Omega))$ .*

### 3. TÍNH TRƠN CỦA TẬP HÚT TOÀN CỤC

Thực tế, chúng tôi muốn chứng minh sự tồn tại của một tập hút nằm trong  $(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega))$ . Để giải quyết vấn đề này, chúng tôi sử dụng phương pháp được trình bày trong [13,15]. Trước tiên, chúng tôi giả thiết  $a$  thỏa mãn điều kiện sau:

**(H1bis)**  $a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2)$  khả vi liên tục, không giảm và thỏa mãn điều kiện (H1).

**Mệnh đề 3.1.** *Nếu các điều kiện (H1bis), (H2), (H3) được thỏa mãn thì nửa nhóm  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  có một tập hấp thụ bị chặn  $B_2$  trong  $(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega))$ .*

*Chứng minh:*

Giả sử các điều kiện **(H1bis)**, **(H2)**, **(H3)** được thỏa mãn. Lấy tích phân phương trình (2.1) trên  $[t, t+1]$  với  $t \geq T_1$  và sử dụng (2.3), ta thu được

$$\int_t^{t+1} [a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} f(u) u dx - \int_{\Omega} g u dx] ds \leq \frac{\rho_0}{2}. \quad (3.1)$$

Đặt  $F(u) = \int_0^u f(s) ds$ . Từ (1.4) và (1.5) suy ra tồn tại các hằng số dương  $c_5, c_6$  thỏa mãn:

$$c_5 |u|^q - c_6 \leq F(u) \leq u f(u) + \frac{c_3}{2} |u|^2. \quad (3.2)$$

$$\text{Do đó,} \quad \int_{\Omega} F(u) dx \leq \int_{\Omega} f(u) u dx + \frac{c_3 \rho_0}{2}. \quad (3.3)$$

Từ (3.1) và (3.2) suy ra

$$\int_t^{t+1} [a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} F(u) dx - \int_{\Omega} g u dx] ds \leq \frac{\rho_0(c_3 + 1)}{2}. \quad (3.4)$$

Mặt khác nhân phương trình đầu tiên của (1.1) với  $u_t$ , ta thu được

$$\begin{aligned} & \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} F(u) dx - \int_{\Omega} g u dx \right] \\ &= \frac{1}{2} a'(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 \frac{d}{dt} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Đặt:  $L = \sup_{0 \leq s \leq \rho_1} |a'(s)|$ . Từ (2.6), (2.7) và (3.5) suy ra: Nếu  $u_0 \in B_0$  thì:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{2} a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} F(u) dx - \int_{\Omega} g u dx \right] \leq L R_1^2. \quad (3.6)$$

Do đó, từ (3.4) và (3.6), sử dụng bất đẳng thức Gronwall đều, ta có

$$\frac{1}{2} a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} F(u) dx - \int_{\Omega} g u dx \leq \frac{\rho_0(c_3 + 1) + 2L R_1^2}{2}. \quad (3.7)$$

Sử dụng (1.2), (1.4) và Bổ đề 1.1 ta rút ra từ (3.7) và (3.2), với mọi  $t \geq T_2 = T_1 + 1$  và  $u_0 \in B_0$ , thì

$$\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_n\|_{L^q(\Omega)}^q \leq \rho_2 \quad (3.8)$$

Vậy nửa nhóm  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  có một tập hấp phụ bị chặn  $B_2$ .

**Mệnh đề 3.2.** Nửa nhóm  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  là chuẩn yếu liên tục trên  $S(B_2)$  với  $B_2$  là một tập hấp thụ bị chặn nằm trong không gian  $(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega))$  thu được từ Mệnh đề 3.1

*Chứng minh:*

Chọn  $Y = L^2(\Omega)$ ,  $X = H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ , kết luận sau thu được trực tiếp từ Định lý 3.2 [13].

**Định lý 3.1.** (Sự tồn tại tập hút toàn cục trong  $((L^2(\Omega), L^q(\Omega)))$ ) Giả sử các điều kiện (H1bis), (H2), (H3) được thỏa mãn. Khi đó nửa nhóm  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  liên kết với bài toán (1.1) có một tập hút toàn cục  $\mathcal{A}_q$  trong  $(L^2(\Omega), L^q(\Omega))$ .

*Chứng minh:*

Từ Mệnh đề 3.1, Định lý 2.1 và Định lý 2.6 [13], để chứng minh sự tồn tại tập hút toàn cục  $\mathcal{A}_q$ , ta cần chứng minh rằng  $\forall \varepsilon > 0$  và tập con bất kỳ bị chặn  $B \subset L^2(\Omega)$  tồn tại hai hằng số dương  $T = T(\varepsilon, B)$  và  $M = M(\varepsilon)$  sao cho:  $\int_{\Omega(|u| \geq M)} |u|^q < C\varepsilon$ ,  $\forall u_0 \in B$  và  $t \geq T$ , trong đó hằng số  $C$  không phụ thuộc  $\varepsilon$  và  $B$ . Theo Bổ đề 2.4 [13]:  $\forall \varepsilon > 0$  cố định,  $\exists \delta > 0$ ,  $T = T(B)$  và  $M = M(\varepsilon)$  sao cho độ đo Lebesgue  $|\Omega(|S(t)u_0| \geq M)| \leq \delta$ ,  $\forall u_0 \in B$ ,  $t \geq T$  và  $\int_{\Omega(|S(t)u_0| \geq M)} |g|^2 < \varepsilon$ . (3.9)

Nhân phương trình đầu tiên của (1.1) với  $(u - M)_+^{q-1}$  ta được:

$$u_t(u - M)_+^{q-1} - a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \Delta u (u - M)_+^{q-1} + f(u)(u - M)_+^{q-1} = g(x)(u - M)_+^{q-1}. \quad (3.10)$$

Trong đó  $(u - M)_+$  là phần dương của  $(u - M)$  nghĩa là

$$(u - M)_+ = \begin{cases} u - M & , \quad u \geq M, \\ 0 & , \quad u < M, \end{cases}$$

$M$  là một hằng số dương. Từ (1.4), với  $u \geq M$  và  $M$  đủ lớn, ta có  $f(u) \geq c^* |u|^{q-1}$ .

Do đó,

$$\begin{aligned} f(u)(u - M)_+^{q-1} &\geq c^* |u|^{q-1} (u - M)_+^{q-1} = \frac{c^*}{2} |u|^{q-1} (u - M)_+^{q-1} + \frac{c^*}{2} |u|^{q-1} (u - M)_+^{q-1} \\ &\geq \frac{c^*}{2} (u - M)_+^{2(q-1)} + \frac{c^*}{2} |u|^{q-2} (u - M)_+^q \geq \frac{c^*}{2} (u - M)_+^{2(q-1)} + \frac{c^*}{2} M^{q-2} (u - M)_+^q \end{aligned} \quad (3.11)$$

Hơn nữa,

$$g(u - M)_+^{q-1} \leq \frac{c^*}{2} (u - M)_+^{2(q-1)} + \frac{|g|^2}{2c^*}. \quad (3.12)$$

Từ (3.10), (3.11) và (3.12) suy ra:

$$\begin{aligned} \frac{1}{q} \frac{d}{dt} \int_{\Omega(u \geq M)} (u - M)_+^q dx + (q-1) \int_{\Omega(u \geq M)} a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) |\nabla u|^2 (u - M)_+^{q-2} dx \\ + \frac{c^*}{2} M^{q-2} \int_{\Omega(u \geq M)} (u - M)_+^q dx \leq \frac{1}{2c^*} \int_{\Omega(u \geq M)} |g|^2 dx. \end{aligned}$$

Do đó,

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(u \geq M)} (u - M)_+^q dx + \frac{c^*}{2} q M^{q-2} \int_{\Omega(u \geq M)} (u - M)_+^q dx \leq \frac{q}{2 c^*} \int_{\Omega(u \geq M)} |g|^2 dx.$$

Sử dụng bất đẳng thức Gronwall, ta có

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(u \geq M)} (u - M)_+^q dx &\leq \int_{\Omega(u \geq M)} (u(0) - M)_+^q dx e^{\frac{c^*}{2} q M^{q-2} t} - \frac{q}{c^{*2} M^{(q-2)}} \int_{\Omega(u \geq M)} |g|^2 dx e^{\frac{c^*}{2} q M^{q-2} t} \\ &\quad + \frac{q}{c^{*2} M^{(q-2)}} \int_{\Omega(u \geq M)} |g|^2 dx. \end{aligned}$$

Với  $T$  và  $M$  đủ lớn, kết hợp với (3.9) ta có

$$\int_{\Omega(u \geq M)} (u - M)_+^q dx < \varepsilon \quad (3.13)$$

Tương tự, lặp lại các bước trên với  $(u + M)_-$  thay vì  $(u - M)_+$  trong đó

$$(u + M)_- = \begin{cases} u + M & , \quad u \leq -M \\ 0 & , \quad u > -M \end{cases}$$

$$\text{Ta cũng thu được: } \int_{\Omega(u \leq -M)} |(u + M)_-|^q dx < \varepsilon \quad (3.14)$$

Từ (3.13) và (3.14), với  $T$  và  $M$  đủ lớn, suy ra:  $\int_{\Omega(|u| \geq M)} (|u| - M)^q dx < \varepsilon$ . Do đó,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega(|u| \geq 2M)} |u|^q dx &= \int_{\Omega(|u| \geq 2M)} |u - M + M|^q dx \leq 2^q \int_{\Omega(|u| \geq 2M)} (|u| - M)^q dx + 2^q \int_{\Omega(|u| \geq 2M)} M^q dx \\ &\leq 2^{q+1} \int_{\Omega(|u| \geq 2M)} (|u| - M)^q dx < C\varepsilon, \end{aligned}$$

với  $T$  và  $M$  đủ lớn và  $C$  không phụ thuộc  $\varepsilon$  và  $B$ . Vậy, nửa nhóm  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  có một tập hút toàn cục  $\mathcal{A}_q$  trong  $(L^2(\Omega), L^q(\Omega))$ .

**Bổ đề 3.3.** Giả sử các điều kiện (H1bis), (H2), (H3) được thỏa mãn. Khi đó mọi tập con bị chặn  $B$  trong  $L^2(\Omega)$ , tồn tại số  $T_3 = T_3(B) > 0$  sao cho  $\|u_t(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \rho_3, \forall u_0 \in B, \forall s \geq T_3$ ,

trong đó  $u_t(s) = \frac{d}{dt}(S(t)u_0)|_{t=s}$  và  $\rho_3$  là một hằng số dương không phụ thuộc  $u_0$ .

*Chứng minh*

Lấy đạo hàm phương trình đầu của (1.1) theo thời gian, ký hiệu  $v = u_t$

$$v_t - \operatorname{div}(a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \nabla v) - 2 \operatorname{div}\left(a'(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \left(\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx\right) \nabla u\right) + f'(u)v = 0. \quad (3.15)$$

Lấy tích vô hướng của phương trình trên với  $v$ , và sử dụng (1.5) ta thu được:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + 2a'(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \left(\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx\right)^2 \leq c_3 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.16)$$

Do  $a$  không giảm, (3.16) kéo theo

$$\frac{d}{dt} \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 2c_3 \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad (3.17)$$

Mặt khác từ (2.6), (3.4), (3.6) và (3.7) suy ra:

$$\int_t^{t+1} \|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 dx \leq C \quad (3.18)$$

trong đó  $C$  là hằng số dương và  $t \geq T_2$ . Kết hợp (3.17), (3.18) và áp dụng bất đẳng thức Gronwall đều ta thu được:  $\|u_t\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \rho_3$ ,  $t \geq T_3 = T_2 + 1$  và  $\rho_3$  là một hằng số dương.

**Định lý 3.2.** *Giả sử các điều kiện (H1bis), (H2), (H3) được thỏa mãn thì nửa nhóm  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  liên kết với bài toán (1.1) có một tập hút toàn cục  $\mathcal{A}$  trong  $(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega))$ .*

*Chứng minh:* Từ Định lý 4.7 [15], Mệnh đề 3.1 và Mệnh đề 3.2, chúng ta chỉ cần chứng minh nửa nhóm  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  là compact tiệm cận trong không gian  $(L^2(\Omega), H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega))$ . Để chứng minh điều này, chúng ta sẽ chứng minh  $\{u_n(t_n)\}$  là một dãy Cauchy trong  $H_0^1(\Omega)$ . Ta có:

$$\begin{aligned} \langle a(|x|^2)x - a(|y|^2)y, x - y \rangle &= \left\langle \int_0^1 \frac{d}{ds} [a(|sx + (1-s)y|^2) |sx + (1-s)(sx + (1-s)y)|] ds, x - y \right\rangle \\ &= |x - y|^2 \int_0^1 a(|sx + (1-s)y|^2) |sx + (1-s)y| ds + 2 \int_0^1 a'(|sx + (1-s)y|^2) \langle (sx + (1-s)y), x - y \rangle |sx + (1-s)y| ds \\ &\geq m |x - y|^2 \int_0^1 ds \geq m |x - y|^2. \end{aligned}$$

Do đó, với  $u_1, u_2 \in H_0^1(\Omega)$  thì

$$\begin{aligned} &\langle -(a(\|u_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \Delta u_1 + (a(\|u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \Delta u_2), (u_1 - u_2) \rangle \\ &= \int_{\Omega} (a(\|u_1\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \nabla u_1 + (a(\|u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \nabla u_2) \cdot \nabla (u_1 - u_2) dx \\ &\geq m \|u_1 - u_2\|_{H_0^1(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Nhờ Định lý 2.1 và Định lý 3.1, chúng ta có thể giả sử  $\{u_n(t_n)\}$  là một dãy Cauchy trong  $L^2(\Omega)$  và  $L^q(\Omega)$ .

Từ (3.19) ta có:

$$\begin{aligned} m \|u_n(t_n) - u_m(t_m)\|_{H_0^1(\Omega)}^2 &\leq \left\langle -\frac{d}{dt} u_n(t_n) - f(u_n(t_n)) + \frac{d}{dt} u_m(t_m) + f(u_m(t_m)), u_n(t_n) - u_m(t_m) \right\rangle \\ &\leq \int_{\Omega} \left| \frac{d}{dt} u_n(t_n) - \frac{d}{dt} u_m(t_m) \right| |u_n(t_n) - u_m(t_m)| dx + \int_{\Omega} |f(u_n(t_n)) - f(u_m(t_m))| |u_n(t_n) - u_m(t_m)| dx \\ &\leq \left\| \frac{d}{dt} u_n(t_n) - \frac{d}{dt} u_m(t_m) \right\|_{L^2(\Omega)} \|u_n(t_n) - u_m(t_m)\|_{L^2(\Omega)} + \|f(u_n(t_n)) - f(u_m(t_m))\|_{L^q(\Omega)} \|u_n(t_n) - u_m(t_m)\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Sử dụng Bổ đề 3.3 và tính bị chặn của  $f(u_n(t_n))$  trong  $L^q(\Omega)$  suy ra  $\{u_n(t_n)\}$  là dãy Cauchy trong  $H_0^1(\Omega)$ . Do đó nửa nhóm  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  là compact tiệm cận trong  $(H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega))$ .

#### 4. SỰ TỒN TẠI VÀ ỔN ĐỊNH MŨ CỦA CÁC NGHIỆM DỪNG

**Định nghĩa 4.1.** Phần tử  $u^* \in H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$  được gọi là một nghiệm dừng của bài toán (1.1) nếu, với  $\forall v \in H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ ,

$$a(\|u^*\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \int_{\Omega} \nabla u^* \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} f(u^*) v dx = \int_{\Omega} g v dx. \quad (4.1)$$

**Định lý 4.1.** Giả sử các điều kiện (H1), (H2), và (H3) được thỏa mãn thì bài toán (1.1) có ít nhất một nghiệm dừng  $u^*$  thỏa mãn

$$\|u^*\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u^*\|_{L^q(\Omega)}^q \leq \ell, \quad (4.2)$$

trong đó

$$\ell = \frac{2m\lambda_1 c_0 |\Omega| + \|g\|_{L^2(\Omega)}^2}{4 \min\{1, \frac{2c_1}{m}\} \lambda_1}. \text{ Hơn nữa nếu (H1bis) thỏa mãn và } c_3 < m\lambda_1 \quad (4.3)$$

với  $\lambda_1$  là giá trị riêng đầu tiên của toán tử  $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ . Thì nghiệm dừng của (1.1) là duy nhất và ổn định mũ.

*Chứng minh.*

i) Sự tồn tại Lấy  $u_n = \sum_{j=1}^n \gamma_{nj} e_j$ , trong đó  $\{e_j\}_{j=1}^\infty$  là một cơ sở của  $H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ . Ký hiệu  $V_n = \text{span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ .

Theo (4.1) ta có:

$$a(\|\nabla u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} f(u_n) v dx = \int_{\Omega} g v dx, \quad (4.4)$$

với mọi hàm thử  $v \in V_n$ .

Ta xây dựng toán tử sau  $R_n : V_n \rightarrow V_n$  xác định bởi:

$$\langle R_n u, v \rangle = a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} f(u) v dx - \int_{\Omega} g v dx, \quad \forall u, v \in V_n.$$

Sử dụng bất đẳng thức Cauchy, Bổ đề 1.1, (1.2) và (1.4) suy ra:

$$\begin{aligned} \langle R_n u, u \rangle &= a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Omega} f(u) u dx - \int_{\Omega} g u dx \\ &\geq \frac{m}{2} \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + c_1 \|u\|_{L^q(\Omega)}^q - c_0 |\Omega| - \frac{1}{2m\lambda_1} \|g\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &\geq \frac{m}{2} \left[ \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \frac{2c_1}{m} \|u\|_{L^q(\Omega)}^q - \frac{2m\lambda_1 c_0 |\Omega| + \|g\|_{L^2(\Omega)}^2}{4\lambda_1} \right] \end{aligned}$$

$$\geq \frac{m}{2} \min \left\{ 1, \frac{2c_1}{m} \right\} \left[ \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^q(\Omega)}^q - \ell \right], \quad (4.5)$$

$$\forall 0 < \tau < m, u \in V_n \text{ và } \ell = \frac{2m\lambda_1 c_0 |\Omega| + \|g\|_{L^2(\Omega)}^2}{4 \min \left\{ 1, \frac{2c_1}{m} \right\} \lambda_1}. \text{ Từ (4.5) suy ra: } \langle R_n u, u \rangle \geq 0,$$

$$\forall u \in V_n \text{ thỏa mãn: } \|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u\|_{L^q(\Omega)}^q = \ell.$$

Do đó nhờ một hệ quả của định lý điểm cố định Brouwer [12, Chapter 2, Lemma 1.4] suy ra :  $\exists u_n \in V_n$  sao cho  $R_n(u_n) = 0$  với  $\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2 + \|u_n\|_{L^q(\Omega)}^q \leq \ell$ . (4.6)

Do đó  $\{u_n\}$  bị chặn trong  $H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ . Sử dụng tính compact của phép nhúng từ  $H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$  vào  $L^2(\Omega)$ , ta có thể trích được một dãy con của  $\{u_n\}$  (được ký hiệu tương tự) hội tụ yếu trong  $H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$  và hội tụ mạnh trong  $L^2(\Omega)$  tới phần tử  $u^* \in H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ . Do đó, tồn tại một dãy con hội tụ hầu khắp nơi trong  $\Omega$ . Hơn nữa,  $f(u_n)$  bị chặn trong  $L^{q'}(\Omega)$ ,  $f \in C^1(\mathbb{R})$  và  $-(a(\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2)\Delta u_n)$  bị chặn trong  $H^{-1}(\Omega)$ . Áp dụng thủ thuật chéo hóa và sử dụng Lemma 1.3 [9, p.12] và Theorem 4.18 [10, Chapter 4], ta có  $f(u_n) \rightharpoonup f(u^*)$  trong  $L^{q'}(\Omega)$  và  $-(a(\|u_n\|_{H_0^1(\Omega)}^2)\Delta u_n) \rightharpoonup -(a(\|u^*\|_{H_0^1(\Omega)}^2)\Delta u^*)$  trong  $H^{-1}(\Omega)$ . Do đó,  $u^* \in H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$  là một nghiệm dừng của bài toán (1.1). Bất đẳng thức (4.2) thu được trực tiếp từ (4.6) khi  $n$  tiến ra vô cùng.

ii) Sự duy nhất và ổn định mũ: Đặt  $w(t) = u(t) - u^*$ , ta có

$$\int_{\Omega} w_t v dx + \int_{\Omega} \left( a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \nabla u - a(\|u^*\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \nabla u^* \right) \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} (f(u) - f(u^*)) v dx = 0,$$

với mọi hàm thử  $v \in H_0^1(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ .

Đặc biệt, chọn  $v = w$ , ta có:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \left( a(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \nabla u - a(\|u^*\|_{H_0^1(\Omega)}^2) \nabla u^* \right) \cdot \nabla (u - u^*) dx \\ & + \int_{\Omega} (f(u) - f(u^*)) (u - u^*) dx = 0. \end{aligned}$$

Từ (4.3) và (3.19), suy ra  $\frac{d}{dt} \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2(m\lambda_1 - c_3) \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 0$ . Áp dụng bất đẳng

thức Gronwall cho bất đẳng thức trên ta có  $\|w(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|w(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 e^{-2(m\lambda_1 - c_3)t}$ .

Do đó nghiệm dừng của (1.1) là duy nhất và ổn định mũ.

## 5. KẾT LUẬN

Bài báo đã phát biểu và trình bày hoàn chỉnh nghiên cứu đáng điều kiện cận nghiệm của một lớp phương trình parabolic tựa tuyến tính thông qua nghiên cứu sự tồn tại các tập

hút toàn cục. ngoài ra, bài báo còn trình bày sự tồn tại và ổn định mũ của nghiệm dừng của bài toán.

#### TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] A.S.Ackleh and L.Ke (2000), *Existence-uniqueness and long time behavior for a class of nonlocal nonlinear parabolic evolution equations*, Proc. Amer. Math. Soc. 128, 3483-3492.
- [2] C.T. Anh and T.D. Ke (2009), *Long-time behavior for quasilinear parabolic equations involving weighted  $p$ -Laplacian operators*, Nonlinear Anal. 71, 4415-4422.
- [3] R.M.P. Almeida, S.N. Antontsev, J.C.M. Duque (2016), *On a nonlocal degenerate parabolic problem*, Nonlinear Anal. Real World Appl. 27, 146-157.
- [4] T. Caraballo, M. Herrera-Cobos and P. Marín-Rubio (2016), *Robustness of nonautonomous attractors for a family of nonlocal reaction diffusion equations without uniqueness*, Nonlinear Dynam.84, 35-50.
- [5] M. Chipot and B. Lovat (1997), *Some remarks on nonlocal elliptic and parabolic problems*, Nonlinear Anal, 30, 4619-4627.
- [6] M. Chipot, V. Valente and G.V. Caffarelli (2003), *Remarks on a nonlocal problem involving the Dirichlet energy*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova 110, 199-220.
- [7] M. Chipot and T. Savitska (2014), *Nonlocal  $p$ -Laplace equations depending on the  $L^p$ -norm of the gradient*, Adv. Diff. Equa.19, 997-1020.
- [8] F.J.S.A. Correa, S.D.B. Menezes, J. Ferreira (2004), *On a class of problems involving a nonlocal operator*, Appl. Math. Comp.147, 475-489.
- [9] J.-L. Lions (1969), *Quelques Methodes de Resolution des Problemes aux Limites Non Lineaires*, Dunod, Paris.
- [10] J.C. Robinson (2001), *Infinite-Dimensional Dynamical Systems*, Cambridge University Press, Cambridge.
- [11] J. Simsen and J. Ferreiran (2014), *A global attractor for a nonlocal parabolic problem*, Nonlinear Stud. 21, 405-416.
- [12] R. Temam (1979), *Navier - Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis*, 2nd edition, North - Holland, Amsterdam.
- [13] M. Yang, C. Sun, and C. Zhong (2007), *Global attractors for  $p$ -Laplacian equation*, J. Math. Anal. Appl.327, 1130-1142.
- [14] S. Zheng and M. Chipot (2005), *Asymptotic behavior of solutions to nonlinear parabolic equations with nonlocal terms*, Asymptot. Anal.45, 301-312.
- [15] C. K. Zhong, M. H. Yang, and C. Y. Sun (2006), *The existence of global attractors for the norm-to-weak continuous semigroup and application to the nonlinear reaction-diffusion equations*, J. Differential Equations, 15, 367-399.

## THE ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF SOLUTIONS FOR A CLASS OF NONLOCAL PARABOLIC EQUATIONS

Le Tran Tinh, Mai Xuan Thao, Nguyen Thi Sam

### ABSTRACT

*In this paper we consider a class of nonlinear nonlocal diffusion problems involving Laplacian operator where the nonlocal quantity is present in the diffusion coefficient which depends on-norm of the gradient and the nonlinear term satisfies a polynomial growth. By using Faedo - Galerkin method, we first prove the existence and uniqueness of weak solutions. Then we study the asymptotic behavior of solutions by investigating the existence and regularity of global attractors in various bi-spaces. Finally, we study the existence and exponential stability of the unique weak stationary solution to the problem.*

**Keywords:** *Nonlocal parabolic equations, weak solution, global attractors.*