

TOÁN TỬ BAN ĐẦU VÀ KHAI TRIỂN TAYLOR-GONTCHAROV

Hoàng Văn Thi¹, Nguyễn Tiến Đà²

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi trình bày một số tính chất quan trọng của toán tử khả nghịch phải và ứng dụng của công thức khai triển Taylor-Gontcharov vào việc khôi phục hàm số khi biết các dữ liệu ban đầu thông qua các đạo hàm cấp k , nó được xem như một sự mở rộng của công thức khai triển Taylor.

Từ khóa: Toán tử khả nghịch phải, khai triển Taylor-Goncharov, lý thuyết toán tử.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Lý thuyết toán tử là một trong những lĩnh vực quan trọng có nhiều ảnh hưởng trong lịch sử phát triển của toán học hiện đại nói chung và giải tích hiện đại nói riêng. Lý thuyết toán tử đã sớm xuất hiện và phát triển mạnh mẽ trên thế giới vào những năm 1920 đến năm 1970 với sự bành trướng của lý thuyết các tích phân kỳ dị và các bài toán bờ Riemann của hàm giải tích biến phức, một lĩnh vực đã gắn liền với tên tuổi của nhiều nhà toán học nổi tiếng trên thế giới như Noether, Gakhov, VeKua...

Một trong những lớp toán tử có vai trò quan trọng và được nhắc lại khá nhiều trong lý thuyết toán tử là toán tử khả nghịch phải, với những toán tử này ta không thể bỏ qua toán tử ban đầu của nó được ví như là một chiếc xương sống với những tính chất đặc biệt, với những tính chất này người ta đã đưa ra dạng tổng quát của công thức khai triển Taylor - Gontcharov. Với mục đích đưa tới cho người đọc có một cách nhìn cụ thể và tường minh về tính chất của toán tử ban đầu cũng như thấy được mối quan hệ hữu cơ giữa công thức khai triển Taylor trên phương diện và nền tảng là giải tích cổ điển với công thức khai triển Taylor - Gontcharov dưới góc nhìn và quan điểm của “phạm trù” toán tử, vì vậy trong bài báo này, chúng tôi sẽ trình bày một số nghiên cứu của mình về “Toán tử ban đầu và công thức khai triển Taylor - Gontcharov”.

2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

2.1. Toán tử khả nghịch

Cho Γ là một đại số có đơn vị (ví dụ trường số thực hoặc phức, tập hợp các ma trận cùng cấp, vành các đa thức).

Đặt $L_0(X) = \{A : X \rightarrow X\}$ trong đó A là toán tử tuyến tính và $dom A = X$, X là một không gian vectơ tùy ý.

¹ Sở Giáo dục và Đào tạo, tỉnh Thanh Hóa

² Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

Định nghĩa 1. $A \in \Gamma$ được gọi là khả nghịch nếu tồn tại toán tử B sao cho $AB = BA = I$. Nếu Γ là đại số các ma trận vuông cấp n thì $A \in \Gamma$ được gọi là khả nghịch khi và chỉ khi $|A| \neq 0$.

Định nghĩa 2. Toán tử A được gọi là khả nghịch phải nếu tồn tại toán tử B sao cho $AB = I$ và $BA \neq I$.

Ví dụ 1. Giả sử Γ là tập hợp các hàm thực khả vi cấp 1. Khi đó toán tử đạo hàm và toán tử nguyên hàm lần lượt xác định bởi

$$Dx(t) = x'(t); \quad Rx(t) = \int_{t_0}^t x(s)ds$$

$$\text{Ta có } DRx(t) = D(Rx(t)) = \left(\int_{t_0}^t x(s)ds \right)' = x(t) \text{ với mọi } x \in \Gamma \text{ hay } DR = I.$$

$$\text{Mặt khác, } RDx(t) = R(Dx(t)) = \int_{t_0}^t x'(s)ds = x(t) - x(t_0) \neq x(t) \text{ nếu } x(t_0) \neq 0 \text{ nghĩa là}$$

$RD \neq I$, vậy D là toán tử khả nghịch phải, lúc này R được gọi là toán tử nghịch đảo phải của D .

Tập hợp tất cả các toán tử khả nghịch phải được kí hiệu là $R(X)$, tập hợp tất cả các nghịch đảo phải của $D \in R(X)$ là $\mathfrak{R}_D$. Tương tự ta có toán tử A được gọi là khả nghịch trái nếu tồn tại toán tử B sao cho $BA = I$ và $AB \neq I$.

Định nghĩa 3. $A \in \Gamma$ được gọi là khả nghịch suy rộng nếu tồn tại toán tử B sao cho $A = ABA$.

Ví dụ 2. Toán tử chiếu $P^2 = P$ là khả nghịch suy rộng.

Nhận xét: i, O là toán tử khả nghịch suy rộng (O là toán tử không).

→ ii, Mọi toán tử khả nghịch, khả nghịch trái, khả nghịch phải đều là khả nghịch suy rộng nhưng điều ngược lại thì không đúng.

Bổ đề 1. Giả sử A, B là các toán tử, khi đó nếu $I + AB$ khả nghịch (tương ứng khả nghịch trái, khả nghịch phải, khả nghịch suy rộng) thì $I + BA$ cũng khả nghịch (tương ứng cũng khả nghịch trái, khả nghịch phải, khả nghịch suy rộng).

2.2. Toán tử ban đầu và công thức khai triển Taylor-Gontcharov

2.2.1. Toán tử ban đầu

Xét bài toán: Cho D là toán tử đạo hàm $(Dx)(t) = x'(t)$. Tìm tất cả các toán tử R sao cho $DR = I$

Để giải quyết được bài toán này ta sẽ chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề 1.1. Giả sử $R_0 \in \mathfrak{R}_D$ khi đó với mọi $R \in \mathfrak{R}_D$ có dạng $R = R_0 + (I - R_0 D)A$ với $A \in L_0(X)$.

Chứng minh.

Chọn $A = R - R_0$ ta được

$$R_0 + (I - R_0 D)A = R_0 + (I - R_0 D)(R - R_0) = R_0 + R - R_0 + R_0 DR_0 - R_0 DR = R$$

do $DR = DR_0 = I$.

($\Leftarrow$) Với $R = R_0 + (I - R_0 D)A$ ta có $DR_0 + DIA - DR_0 DA = DR_0 = I$ vậy ta có điều phải chứng minh.

Bây giờ chúng ta trở về với ví dụ trên, trước hết ta thấy rằng nếu xem R_0 là toán tử nguyên hàm $R_0 x(t) = \int_{t_0}^t x(s)ds$ thì ngay lập tức ta có $DR_0 = I$, như vậy áp dụng bổ đề trên ta có thể tìm được tất cả các nghịch đảo phải của D .

Định nghĩa 4. Toán tử $F = I - R_0 D$ được gọi là toán tử ban đầu của $D \in R(X)$ ứng với $R \in \mathfrak{R}_D$ cho trước.

Một định nghĩa tương đương có thể được phát biểu như sau: Toán tử $F \in L_0(X)$ được gọi là toán tử ban đầu của $D \in R(X)$ ứng với nghịch đảo phải R của D nếu $F^2 = F$; $FX = \text{Ker} D$ và $FR = O$

Mệnh đề 1. Nếu toán tử $A \in L(X)$ là khả nghịch thì mọi toán tử ban đầu của nó là tầm thường

Chứng minh.

Giả sử $B \in L(X)$ là nghịch đảo hai phía của A khi đó $F = I - BA = I - I = O$.

Mệnh đề 2. Ta đặt $\mathfrak{R}_D = \{R_i\}_{i \in I}$ và $F_D = \{F_i\}_{i \in I}$ tương ứng là họ các nghịch đảo phải và họ các toán tử ban đầu của D khi đó:

$$i, F_i F_j = F_j$$

$$ii, F_j R_i = R_i - R_j$$

với mọi $i, j \in I$.

Chứng minh.

Ta có $F_i = I - R_i D$; $F_j = I - R_j D$.

Khi đó

$$F_i F_j = (I - R_i D)(I - R_j D) = I - R_j D - R_i D + R_i D R_j D = I - R_j D - R_i D + R_i D = I - R_j D = F_j$$

$$ii, F_j R_i = (I - R_j D)R_i = R_i - R_j D R_i = R_i - R_j \text{ (đpcm)}$$

Hệ quả 1. Với mọi $i, j \in I$ thì toán tử $F_j R_k - F_i R_k$ không phụ thuộc vào cách chọn toán tử $R_k \in \mathfrak{R}_D$.

Chứng minh.

Thật vậy theo mệnh đề trên thì $F_j R_k - F_i R_k = (R_k - R_j) - (R_k - R_i) = R_i - R_j$. Nhận xét rằng biểu thức $F_j R_k - F_i R_k$ không phụ thuộc vào chỉ số k mà chỉ phụ thuộc vào i, j và chúng được kí hiệu là I_i^j gọi là toán tử tích phân xác định. Với mỗi $x \in X$ thì $I_i^j x$ được gọi là tích phân xác định của x .

Mệnh đề 3. Với mọi $x \in X$, $i, j \in I$ ta đều có $DI_i^j x = 0$

Chứng minh.

Thật vậy ta có $DI_i^j x = D(F_j R_k - F_i R_k)x = D(R_i - R_j)x = x - x = 0$

Hai tính chất hiển nhiên:

$$a) I_i^j = -I_j^i$$

$$b) I_i^k + I_k^j = I_i^j$$

Mệnh đề 4. Với mọi $i, j \in I$ ta đều có $I_i^j D = F_j - F_i$

Thật vậy $I_i^j D = F_j R_i D = F_j (I - F_i) = F_j - F_j F_i = F_j - F_i$

Định lý 1. Giả sử $D \in R(X)$ và thỏa mãn $F^2 = F$. Khi đó F là toán tử ban đầu của D ứng với nghịch đảo phải $R = R_1 - FR_1$ ứng với mọi $R_1 \in \mathfrak{R}_D$ và R xác định duy nhất độc lập với sự lựa chọn $R_1 \in \mathfrak{R}_D$

Chứng minh.

Theo giả thiết thì $DF = O$ và $DR_1 = I$ nên $DR = D(R_1 - FR_1) = DR_1 - DFR_1 = I$

Vậy R là nghịch đảo phải của D , mặt khác do $F^2 = F$ nên ta có

$$FR = F(R_1 - FR_1) = FR_1 - F^2 R_1 = FR_1 - FR_1 = O,$$

vậy F là toán tử ban đầu của D ứng với R . Tiếp theo ta sẽ chứng minh sự duy nhất của R không phụ thuộc vào $R_1 \in \mathfrak{R}_D$. Giả sử ta cũng có $R_2 \in \mathfrak{R}_D$ và $R_2 \neq R_1$ xét $R_3 = R_2 - FR_2$ dễ thấy R_3 và F lần lượt cũng là nghịch đảo phải và toán tử ban đầu của D ứng với R_2 , nghĩa là ta nhận được $F = I - R_2 D$ trên $\text{dom} D$.

Do đó

$$\begin{aligned} R_3 - R &= R_2 - FR_2 - (R_1 - FR_1) = (I - F)(R_2 - R_1) \\ &= R_2 D(R_2 - R_1) = R_2 DR_2 - R_2 DR_1 = R_2 - R_2 = O, \end{aligned}$$

hay $R = R_3$ đây là điều phải chứng minh.

Mệnh đề 5. Giả sử $D \in R(X)$ và $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}_D$ giao hoán với nhau. Khi đó $R_1 = R_2$

Mệnh đề 6. Giả sử $D \in R(X)$ và F_1, F_2 là các toán tử ban đầu của D giao hoán với nhau, khi đó $F_1 = F_2$

Chứng minh.

Thật vậy, theo giả thiết ta có $F_1 = I - R_1 D$ và $F_2 = I - R_2 D$ khi đó ta thu được:

$$F_1 F_2 = (I - R_1 D)(I - R_2 D) = I - R_2 D - R_1 D + R_1 D R_2 D = I - R_2 D - R_1 D + R_1 D = I - R_2 D = F_2$$

tương tự ta cũng có $F_2 F_1 = F_1$ nhưng do $F_1 F_2 = F_2 F_1$ nên $F_1 = F_2$.

Mệnh đề 7. Giả sử $D \in R(X)$ và F_1, F_2 là các toán tử ban đầu của D ứng với $R_1, R_2 \in \mathfrak{R}_D$, khi đó $F_1 = F_2$ nếu và chỉ nếu $R_1 = R_2$.

Chứng minh.

($\Leftarrow$) Hiển nhiên theo định nghĩa ta có ngay nếu $R_1 = R_2$ thì $F_1 = F_2$

($\Rightarrow$) Giả sử rằng $F_1 = F_2$ khi đó do $F_1 R_1 = O$, (O là toán tử không).

Nên: $R_2 = R_2 D R_1 = (I - F_2) R_1 = R_1 - F_2 R_1 = R_1 - F_1 R_1 = R_1$. (đpcm)

Định lý 2. Giả thiết rằng $F_0, \dots, F_n$ là các toán tử ban đầu của $D \in R(X)$ và giả sử không gian các hằng số là ổn định với bộ các $P_j \in L(X)$, $j = \overline{1, n}$, nghĩa là $P_j \ker D \subset \ker D$, với mọi $j = \overline{1, n}$. Khi đó toán tử $F = F_0 + \sum_{j=1}^n P_j F_j D^j$ là toán tử ban

đầu của D ứng với nghịch đảo phải $R = R_0 - \sum_{j=1}^n P_j F_j D^{j-1}$.

Chứng minh.

Theo giả thiết thì $D P_j = O$ với mọi $j = \overline{1, n}$. Vậy nên

$$D F = D F_0 + D \sum_{j=1}^n P_j F_j D^j = D F_0 + \sum_{j=1}^n D P_j F_j D^j = O$$

vậy $F : \text{Dom} D \rightarrow \text{Ker} D$, ta lại có

$$F^2 = \left(F_0 + \sum_{j=1}^n P_j F_j D^j \right) F = F_0 F + \sum_{j=1}^n P_j F_j D^j F = F_0 F = (I - R_0 D) F = F - R_0 D F = F$$

Với mọi $x \in \text{Ker} D$ ta có $F x = F_0 x + \sum_{j=1}^n P_j F_j D^j x = F_0 x = x$ điều này nghĩa là F là

toán tử chiếu trên không gian các phần tử hằng. Theo mệnh đề 5 ta nhận được F là toán tử ban đầu của D ứng với nghịch đảo phải

$$R = R_0 - F R_0 = R_0 - \left(F_0 + \sum_{j=1}^n P_j F_j D^j \right) R_0$$

$$F = R_0 - F_0 R_0 - \sum_{j=1}^n P_j F_j D^j R_0 = R_0 - \sum_{j=1}^n P_j F_j D^{j-1}.$$

Đây là điều phải chứng minh.

Định lý 3. Giả sử $F_0, \dots, F_n$ là các toán tử ban đầu của $D \in R(X)$ tương ứng với các nghịch đảo phải $R_0, \dots, R_n$. Khi đó $F = \sum_{j=1}^n a_j F_j$ với các hằng số $a_j \in K$, $j = \overline{1, n}$ (K là thực hoặc phức) không đồng thời bằng 0 là toán tử ban đầu của D khi và chỉ khi $\sum_{j=1}^n a_j = 1$, đồng thời F là toán tử ban đầu ứng với nghịch đảo phải $R = \sum_{j=1}^n a_j R_j$.

Chứng minh.

($\Rightarrow$) Giả sử F là toán tử ban đầu của D , khi đó với mọi $0 \neq x \in \ker D$ ta có

$$x = Fx = \sum_{j=1}^n a_j F_j x = \sum_{j=1}^n a_j x = \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) x \text{ hay } \sum_{j=1}^n a_j = 1;$$

($\Leftarrow$) Giả sử $\sum_{j=1}^n a_j = 1$ khi đó nếu

$FX \subset \ker D$ với mọi $x \in \ker D$ thì

$$Fx = \sum_{j=1}^n a_j F_j x = \sum_{j=1}^n a_j x = \left(\sum_{j=1}^n a_j \right) x = x,$$

Ta lại có $F^2 x = F(Fx) = Fx = x$. Vậy F là toán tử chiếu trên $\ker D$, theo Mệnh đề 4 cho ta F là toán tử ban đầu của D ứng với nghịch đảo phải

$$R = R_0 - FR_0 = R_0 - \sum_{j=1}^n a_j F_j R_0 = R_0 - \sum_{j=1}^n a_j (I - R_j D) R_0 = \left(1 - \sum_{j=1}^n a_j \right) R_0 + \sum_{j=1}^n a_j R_j = \sum_{j=1}^n a_j R_j$$

Đó là điều phải chứng minh.

Định lý 4. Giả sử $D_j \in R(X)$ với mọi $j = \overline{1, n}$ và $F_j \in F_D$ là các toán tử ban đầu của D_j ứng với $R_j \in \mathfrak{R}_{D_j}$ ($j = \overline{1, n}$).

Khi đó toán tử $F = F_n + R_n F_{n-1} D_n + \dots + R_n \dots R_2 F_1 D_2 \dots D_n$ là toán tử ban đầu của $D = D_1 D_2 \dots D_n$ ứng với nghịch đảo phải $R = R_n R_{n-1} \dots R_1$ của D .

Chứng minh.

Ta có $DR = D_1 \dots D_n R_n \dots R_1 = I$ do vậy $D \in R(X)$ và $R \in \mathfrak{R}_D$. Mặt khác

$$\begin{aligned} F &= F_n + R_n F_{n-1} D_n + \dots + R_n \dots R_2 F_1 D_1 D_2 \dots D_n \\ &= I - R_n D_n + R_n (I - R_{n-1} D_{n-1}) D_n + \dots + R_n \dots R_2 (I - R_1 D_1) D_2 \dots D_n \\ &= I - R_n D_n + R_n D_n - R_n R_{n-1} D_{n-1} D_n + \dots + R_n \dots R_2 D_2 \dots D_n - R_n \dots R_1 D_1 \dots D_n \\ &= I - RD \end{aligned}$$

Vậy là toán tử ban đầu của D ứng với nghịch đảo phải R .

Hệ quả 2. Giả sử các giả thiết của Định lý 4 thỏa mãn và F là toán tử ban đầu của $D = D_1 D_2 \dots D_n$ ứng với $R \in \mathfrak{R}_D$, khi đó

$$\mathfrak{R}_D = \{(R_n + F_n A_n) \dots (R_1 + F_1 A_1) : A_1, A_2, \dots, A_n \in L_0(X)\}$$

$$F_D = \{F_n(I - A_n D_n) + \dots (R_n + F_n A_n) \dots (R_2 + F_2 A_2) F_1(I - A_1 D_1) D_2 \dots D_n : A_1, A_2, \dots, A_n \in L_0(X)\}$$

2.2.2. Công thức Taylor - Gontcharov

2.2.2.1. Cơ sở toán tử

Cho $D \in R(X)$; $R_0 \in \mathfrak{R}_D$ và F_0 là toán tử ban đầu của D ứng với R .

Ta có

$$F_0 = I - R_0 D \Leftrightarrow I = F_0 + R_0 D \quad (1)$$

Xét D là toán tử đạo hàm $Dx(t) = \frac{dx}{dt}$ và R_0 là toán tử nguyên hàm $R_0 x(t) = \int_{t_0}^t x(s) ds$

Thì từ (1) ta có ngay kết quả $x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t x'(s) ds$, do đó

$$I = F_0 + R_0 D = F_0 + R_0 (F_0 + R_0 D) D = F_0 + R_0 F_0 D + R_0^2 D^2 \quad (*)$$

khi đó $x(t) = x(t_0) + x'(t_0)(t - t_0) + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau} x''(\zeta) d\zeta d\tau$ công thức này được gọi là công

thức khai triển Taylor cấp 1, tiếp tục quá trình với kỹ thuật tương tự ta thu được công thức khai triển Taylor cấp 2 như sau:

$$x(t) = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{x''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \int_{t_0}^{\tau_2} x'''(\zeta) d\zeta d\tau_1 d\tau_2$$

Thực hiện quá trình này n lần ta thu được công thức khai triển sau đây và được gọi là công thức khai triển Taylor cấp n của $x(t)$ tại điểm t_0 :

$$x(t) = x(t_0) + \frac{x'(t_0)}{1!}(t - t_0) + \frac{x''(t_0)}{2!}(t - t_0)^2 + \dots + \frac{x^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n + \int_{t_0}^t \int_{t_0}^{\tau_1} \int_{t_0}^{\tau_2} \dots \int_{t_0}^{\tau_n} x^{(n+1)}(\tau) d\tau d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n$$

Như vậy công thức trên sau khi thực hiện kỹ thuật tương tự n lần ta thu được công thức: $I = F_0 + R_0 F_0 D + R_0^2 F_0 D^2 + \dots + R_0^n F_0 D^n + R_0^{n+1} D^{n+1}$ trên $Dom D^{n+1}$

được gọi là công thức khai triển Taylor đối với $D \in R(X)$; $R_0 \in \mathfrak{R}_D$ và $F_0 \in F_D$ ứng với R_0 .

2.2.2.2. Công thức Taylor - Gontcharov

Trước hết ta có nhận xét: Công thức (*) chỉ cho ta thấy sự khai triển của $x(t)$ tại điểm t_0 nhưng chưa cho ta thấy được sự khai triển của nó tại nhiều điểm khác nhau, cụ thể là tại

$n+1$ điểm phân biệt $t_0, t_1, \dots, t_n$. Để khắc phục hạn chế đó, trong phần còn lại của bài báo, chúng tôi đã đề cập đến công thức tổng quát hơn công thức khai triển Taylor và được gọi là công thức khai triển Taylor-Gontcharov, công thức này giúp ta có thể khai triển $x(t)$ (nếu có thể) tại nhiều điểm khác nhau như đã nói ở trên.

Trước hết ta xét bài toán đơn giản sau đây:

Bài toán 1. Xác định đa thức $f(t)$ bậc 2 thỏa mãn các điều kiện:

$$f(t_0) = a_0; f'(t_1) = a_1; f''(t_2) = a_2$$

Giả sử $f(t)$ có dạng $f(t) = at^2 + bt + c$ bằng phương pháp giải hệ trực tiếp ta dễ dàng tìm được $f(t)$ có dạng sau:

$$\begin{aligned} f(t) &= f(t_0) + f'(t_1)(t - t_0) + \frac{f''(t_2)}{2!}(t^2 - 2tt_1 - t_0^2 + 2t_0t_1) \\ &= a_0 + a_1(t - t_0) + \frac{a_2}{2!}(t^2 - 2tt_1 - t_0^2 + 2t_0t_1) \end{aligned}$$

Tuy nhiên việc giải bài toán trên bằng phương pháp giải hệ sẽ gặp nhiều khó khăn khi bậc của đa thức lớn dần ($\deg f \geq 3$).

Bài toán 2. Xác định đa thức $f(t)$ bậc 3 thỏa mãn điều kiện

$$f(t_0) = a_0; f'(t_1) = a_1; f''(t_2) = a_2; f'''(t_3) = a_3.$$

Ta phân tích như sau

$$\begin{aligned} t - t_0 &= \int_{t_0}^t ds = Q_1(t, t_0) = \hat{Q}_1(t) \\ \frac{1}{2}(t^2 - 2t_1t - t_0^2 + 2t_0t_1) &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\int_{t_1}^{\tau_1} d\zeta \right) d\tau = Q_2(t, t_0, t_1) = \hat{Q}_2(t) \\ Q_3(t, t_0, t_1, t_2) &= \int_{t_0}^{t_1} \int_{t_1}^{\tau_1} \int_{t_2}^{\tau_2} d\tau_2 d\tau_1 d\tau = \int_{t_0}^t Q_2(\tau_1, t_1, t_2) d\tau_1 = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t (\tau_1^2 - 2t_2\tau_1 - t_1^2 + 2t_1t_2) d\tau_1 = \hat{Q}_3(t) \end{aligned}$$

khi đó ta có

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_1)\hat{Q}_1(t) + f''(t_2)\hat{Q}_2(t) + f'''(t_3)\hat{Q}_3(t).$$

Như vậy qua 2 bài toán trên ta có thể dễ dàng chứng minh công thức sau đây bằng phương pháp quy nạp

$$f(t) = f(t_0) + f'(t_1)\hat{Q}_1(t) + f''(t_2)\hat{Q}_2(t) + \dots + f^{(n)}(t_n)\hat{Q}_n(t, t_0, \dots, t_{n-1}),$$

trong đó $\hat{Q}_k(t)$ là đa thức bậc k có các tính chất sau:

$$a) \hat{Q}_k(t_0) = 0; \hat{Q}'_k(t_1) = 0; \dots; \hat{Q}^{(k-1)}_k(t_{k-1}) = 0 \text{ và } \hat{Q}^{(k)}_k(t_k) = 1$$

$$b) \hat{Q}_k(t) = \int_{t_0}^t \int_{t_1}^{\tau_1} \int_{t_2}^{\tau_2} \dots \int_{t_{k-1}}^{\tau_{k-1}} d\tau d\tau_1 d\tau_2 \dots d\tau_n$$

$$c) Q_k(t, t_0, t_1, \dots, t_{k-1}) = \int_{t_0}^t Q_{k-1}(\tau, t_1, t_2, \dots, t_{k-1}) d\tau.$$

Áp dụng trường hợp D là toán tử đạo hàm $Dx(t) = \frac{dx}{dt}$; $R_k x(t) = \int_{t_k}^t x(\tau) d\tau$ ta có công

thức khai triển của $x(t)$ tại $n+1$ điểm phân biệt $t_0, t_1, \dots, t_n$

$$x(t) = x(t_0) + x'(t_1)\hat{Q}_1(t) + x''(t_2)\hat{Q}_2(t) + \dots + x^{(n)}(t_n)\hat{Q}_n(t) + \int_{t_0}^t \int_{t_1}^{\tau_1} \dots \int_{t_n}^{\tau_n} x^{(n+1)}(\tau) d\tau d\tau_1 \dots d\tau_n$$

Công thức này được gọi là công thức khai triển Taylor - Gontcharov của $x(t)$ tại $n+1$ điểm phân biệt $t_j, j = \overline{1, n}$. Bây giờ ta sẽ xây dựng công thức khai triển Taylor - Gontcharov cho toán tử D bất kỳ. Giả sử $D \in R(X)$; $R_0, R_1, \dots, R_k \in \mathfrak{R}_D$ và F_k là các toán tử ban đầu của D ứng với R_k , ta có $F_k = I - R_k D \Leftrightarrow I = F_k + R_k D$. Mặt khác,

$$I = F_0 + R_0 D = F_0 + R_0 I D^1 = F_0 + R_0 (F_1 + R_1 D) D = F_0 + R_0 F_1 D + R_0 R_1 D^2$$

Được gọi là công thức khai triển Taylor - Gontcharov bậc 1, tiếp tục quá trình này n lần ta được công thức:

$$I = F_0 + R_0 F_1 D + R_0 R_1 F_2 D^2 + \dots + R_0 R_1 \dots R_{n-1} F_n D^n + R_0 R_1 \dots R_n D^{n+1}$$

Công thức này được gọi là công thức Taylor - Gontcharov ứng với toán tử D với các nghịch đảo phải $R_k, k = \overline{1, n}$ và các toán tử ban đầu $F_k \in F_D$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Nguyễn Xuân Liêm (1998), *Giải tích tập 1*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.
- [2] Nguyễn Văn Mậu (2004), *Đa thức đại số và phân thức hữu tỷ*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.
- [3] Nguyễn Văn Mậu (2007), *Các bài toán nội suy và áp dụng*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.
- [4] Nguyễn Duy Tiến, Trần Đức Long (2004), *Bài giảng Giải tích*, Nxb. Đại học Quốc gia Hà Nội, Hà Nội.
- [5] Nguyen Van Mau (2005), *Algebraic Elements and bondary valued problems in linear spaces*, VNU, Publisher, Ha Noi.
- [6] Prezworska-Rolewicz (1973), *D. Equations transformed with argument*, An Algebraic Approach, Amsterdam-Warsaw.

INITIAL OPERATOR AND TAYLOR-GONTCHAROV EXPAND

Hoang Van Thi, Nguyen Tien Da

ABSTRACT

In this paper, we present some important characteristics of right invertible operators, and some applications of Taylor-Goncharov expand formula as an extension of the Taylor expand formula.

Keywords: *Right invertible operator, Taylor-Gontcharov expand, initial operator.*