

MỘT SỐ TÍNH CHẤT ĐẠO HÀM LIE CỦA CÁC LIÊN THÔNG TUYẾN TÍNH TRÊN ĐẠI SỐ

Nguyễn Hữu Quang¹, Đỗ Thị Tuyết², Lê Thị Thanh Hà³

TÓM TẮT

Trong bài viết này, chúng tôi trình bày một số tính chất đạo hàm Lie của các liên thông tuyến tính $\hat{\nabla}$ và ∇^a trên đại số A .

Từ khóa: Đạo hàm Lie, liên thông tuyến tính, đại số.

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

1.1. Các liên thông tuyến tính trên đại số thường được sử dụng để khảo sát các đặc trưng của một đại số. Trong những năm gần đây, các tính chất cơ bản của các phép đạo hàm trên đại số đã và đang được nhiều nhà toán học trong và ngoài nước quan tâm nghiên cứu. Chẳng hạn, năm 2010 Sultanov [3] đã trình bày các tính chất cơ bản của đạo hàm Lie trên một đại số giao hoán A với đơn vị e và từ đó tác giả thiết lập các hệ thức về độ cong và độ xoắn của A . Năm 2012, các tác giả Nguyễn Hữu Quang, Kiều Phương Chi, Bùi Cao Vân [2] đã xây dựng phép đạo hàm Lie trên các dòng và ứng dụng của nó vào việc tính thể tích của các đa tạp Compact. Năm 2014, Arslan và Inceboz [1] đã chỉ ra các đặc trưng của đạo hàm Jordan trên một đại số *Banach*.

Trong bài viết này, chúng tôi trình bày một số tính chất đạo hàm Lie của các liên thông tuyến tính $\hat{\nabla}$ và ∇^a được cảm sinh bởi liên thông tuyến tính ∇ trên một đại số A giao hoán với đơn vị e . Từ đó thiết lập một số hệ thức về độ xoắn của A .

1.2. Giả sử A là một đại số giao hoán với đơn vị e trên $\mathbb{R}$.

Một phép đạo hàm trên A là một ánh xạ tuyến tính $X : A \rightarrow A$, thỏa mãn tính chất: $X(ab) = X(a).b + a.X(b); \forall a, b \in A$. Ta ký hiệu $F = \{X/X \text{ là đạo hàm trên } A\}$. Các phép toán trên F được xác định như sau:

- 1) $(X + Y)(a) = X(a) + Y(a); \forall X, Y \in F, \forall a \in A$.
- 2) $(\lambda.X)(a) = \lambda.(X(a)); \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall a \in A$.
- 3) $(a.X)(b) = a.X(b); \forall b \in A, a \in A$.

Khi đó F cùng với 1) và 2) lập thành không gian vectơ thực và F cùng với 1) và 3) lập thành A - môđun.

¹ Giảng viên khoa Khoa học tự nhiên, Trường Đại học Vinh

² Giảng viên khoa Khoa học cơ bản và Kỹ thuật cơ sở Thanh Hóa, Trường Đại học Công Nghiệp thành phố Hồ Chí Minh

³ Khoa Cơ bản, Trường Cao đẳng Giao thông vận tải 2, thành phố Đà Nẵng

Một liên thông tuyến tính trên A là ánh xạ $\nabla : F \times F \rightarrow F$, thỏa mãn: $\forall X, Y, Z \in F$ và $a \in A$:

$$T_1. \nabla_{X+Y}Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z.$$

$$T_2. \nabla_{aX}Z = a.\nabla_X Z.$$

$$T_3. \nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z.$$

$$T_4. \nabla_X(a.Y) = X(a).Y + a.\nabla_X Y.$$

1.3. Định nghĩa [3]

Giả sử $X \in F$. Đạo hàm Lie của ∇ theo hướng X được ký hiệu $L_X \nabla$ và được xác định bởi: $(L_X \nabla)(Y, Z) = [X, \nabla_Y Z] - \nabla_Y [X, Z] - \nabla_{[X, Y]} Z$; $\forall Y, Z \in F$, (ở đây: $[X, Y]$ là tích Lie của X và Y được cho bởi $[X, Y] = X \circ Y - Y \circ X$).

Ví dụ: Ta xét không gian $\mathbb{R}^n$ với liên thông Lêvi-Sivita D và $A = \mathfrak{Z}(\mathbb{R}^n) = \{f / f \text{ là hàm trơn trên } \mathbb{R}^n\}$. Khi đó, với $X \in F = B(\mathbb{R}^n) = \{\text{Các trường vector trơn trên } \mathbb{R}^n\}$ và X song song thì $L_X D = 0$.

1.4. Mệnh đề ([3]; p.385)

a) $L_X \nabla$ là ánh xạ song tuyến tính thực: $F \times F \rightarrow F$.

b) $L_{\alpha X + \beta Y} \nabla = \alpha.L_X \nabla + \beta.L_Y \nabla$; $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}; \forall X, Y \in F$.

c) $L_{[X, Y]} \nabla = L_X \circ L_Y \nabla - L_Y \circ L_X \nabla$; $\forall X, Y \in F$.

Bây giờ ta chú ý tới hai ánh xạ sau đây được cảm sinh từ liên thông tuyến tính ∇ trên A ([3], p.381):

- $\widehat{\nabla} : F \times F \rightarrow F$

$$(X, Y) \mapsto \widehat{\nabla}_X Y = \nabla_Y X + [X, Y].$$

- Với $a \in A$, $\nabla^a : F \times F \rightarrow F$

$$(X, Y) \mapsto \nabla_X^a Y = a.\nabla_X Y + (e - a).\widehat{\nabla}_X Y.$$

Mệnh đề [3]. $\widehat{\nabla}$ và ∇^a là các liên thông tuyến tính trên A .

2. CÁC KẾT QUẢ

Trong suốt mục này, ta ký hiệu $T, \widehat{T}, T^a$ tương ứng là các độ xoắn của A ứng với các liên thông tuyến tính $\nabla, \widehat{\nabla}, \nabla^a$ chúng được xác định bởi:

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]; \widehat{T}(X, Y) = \widehat{\nabla}_X Y - \widehat{\nabla}_Y X - [X, Y];$$

$$T^a(X, Y) = \nabla_X^a Y - \nabla_Y^a X - [X, Y]; \forall X, Y \in F.$$

2.1. Nhận xét

a) Với $A = \mathfrak{Z}(\mathbb{R}^n)$ và $\nabla = D$. Khi đó $\hat{T} = 0$.

b) Nếu $a = \frac{1}{2}e$ thì $T^a = 0$.

Chứng minh.

$\forall X, Y \in F = \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, ta có:

$$\begin{aligned}\hat{T}(X, Y) &= \hat{D}_X Y - \hat{D}_Y X - [X, Y] \\ &= D_Y X + [X, Y] - D_X Y - [Y, X] - [X, Y] \\ &= -(D_X Y - D_Y X - [X, Y]) \\ &= T(X, Y) = 0. \\ &\Rightarrow \hat{T} = 0.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}T^a(X, Y) &= \nabla_X^a Y - \nabla_Y^a X - [X, Y] \\ &= \left(\frac{1}{2}e \cdot \nabla_X Y + \frac{1}{2}e \cdot \hat{\nabla}_X Y \right) - \frac{1}{2}e (\nabla_Y X + \hat{\nabla}_Y X) - [X, Y] \\ &= \frac{1}{2}(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) + \frac{1}{2}(\hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X - [X, Y]) \\ &= \frac{1}{2}(T(X, Y) + \hat{T}(X, Y)); (1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Mặt khác, } \hat{T}(X, Y) &= \hat{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_Y X - [X, Y] \\ &= (\nabla_Y X + [X, Y]) - (\nabla_X Y + [Y, X]) - [X, Y] \\ &= -(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]) \\ &= -T(X, Y); (2).\end{aligned}$$

Từ (1) và (2), ta thu được $T^a = 0$; với $a = \frac{1}{2}e$.

Từ (2.1.b), ta nhận thấy rằng, trên đại số A luôn tồn tại một liên thông tuyến tính mà ứng với nó A có độ xoắn bằng 0. Hay nói khác đi, trên A luôn tồn tại liên thông tuyến tính phẳng.

2.2. Mệnh đề

$$(L_X \nabla)(Y, Z) = [X, \hat{\nabla}_Z Y] - \hat{\nabla}_{[X, Z]} Y - \hat{\nabla}_Z [X, Y]; \forall X, Y, Z \in F.$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned}
 & [X, \widehat{\nabla}_Z Y] - \widehat{\nabla}_{[X, Z]} Y - \widehat{\nabla}_Z [X, Y] = [X, \nabla_Y Z + [Z, Y]] - (\nabla_Y [X, Z] + [[X, Z], Y]) \\
 & - (\nabla_{[X, Y]} Z + [Z, [X, Y]]) \\
 & = [X, \nabla_Y Z] + [X, [Z, Y]] - \nabla_Y [X, Z] + [Y, [X, Z]] - \nabla_{[X, Y]} Z + [Z, [Y, X]] \\
 & = ([X, \nabla_Y Z] - \nabla_Y [X, Z] - \nabla_{[X, Y]} Z) + ([X, [Z, Y]] + [Y, [X, Z]] + [Z, [Y, X]]) \\
 & = [X, \nabla_Y Z] - \nabla_Y [X, Z] - \nabla_{[X, Y]} Z = (L_X \nabla)(Y, Z).
 \end{aligned}$$

Mệnh đề này xác lập mối quan hệ giữa đạo hàm Lie của các liên thông tuyến tính ∇ và liên thông tuyến tính cảm sinh $\widehat{\nabla}$. Một hệ thức khác về quan hệ giữa đạo hàm Lie của ∇ và $\widehat{\nabla}$ cũng được Sultanov thiết lập ([3].p.388), đó là: $(L_X \nabla)(Y, Z) = (L_X \widehat{\nabla})(Z, Y)$.

2.3. Nhận xét

$\forall X, Y, Z, Y', Z' \in F$ và $\forall a \in A$, ta có:

- 1) $(L_X \widehat{\nabla})(Y + Y', Z) = (L_X \widehat{\nabla})(Y, Z) + (L_X \widehat{\nabla})(Y', Z)$
- 2) $(L_X \widehat{\nabla})(a.Y, Z) = a.(L_X \widehat{\nabla})(Y, Z)$
- 3) $(L_X \widehat{\nabla})(Y, Z + Z') = (L_X \widehat{\nabla})(Y, Z) + (L_X \widehat{\nabla})(Y, Z')$
- 4) $(L_X \widehat{\nabla})(Y, a.Z) = a.(L_X \widehat{\nabla})(Y, Z)$.

Chứng minh.

Ta dễ dàng kiểm tra được tính chất 1) và 3). Ở đây, ta kiểm tra tính chất 2) và 4).

$$\begin{aligned}
 2) \quad (L_X \widehat{\nabla})(a.Y, Z) &= [X, \widehat{\nabla}_{a.Y} Z] - \widehat{\nabla}_{[X, a.Y]} Z - \widehat{\nabla}_{a.Y} [X, Z] \\
 &= [X, a.\widehat{\nabla}_Y Z] - \widehat{\nabla}_{(X(a).Y + a.[X, Y])} Z - a.\widehat{\nabla}_Y [X, Z] \\
 &= X(a).\widehat{\nabla}_Y Z + a.[X, \widehat{\nabla}_Y Z] - X(a).\widehat{\nabla}_Y Z - a.\widehat{\nabla}_{[X, Y]} Z - a.\widehat{\nabla}_Y [X, Z] \\
 &= a.([X, \widehat{\nabla}_Y Z] - \widehat{\nabla}_{[X, Y]} Z - \widehat{\nabla}_Y [X, Z]) \\
 &= a.(L_X \widehat{\nabla})(Y, Z).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad (L_X \widehat{\nabla})(Y, a.Z) &= [X, \widehat{\nabla}_Y (a.Z)] - \widehat{\nabla}_{[X, Y]} (a.Z) - \widehat{\nabla}_Y [X, a.Z] \\
 &= [X, Y(a).Z + a.\widehat{\nabla}_Y Z] - [X, Y](a).Z - a.\widehat{\nabla}_{[X, Y]} Z - \widehat{\nabla}_Y (X(a).Z) + a.[X, Z]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= [X, Y(a)Z] + [X, a.\widehat{\nabla}_Y Z] - [X, Y](a).Z - a.\widehat{\nabla}_{[X,Y]} Z - \widehat{\nabla}_Y (X(a)Z) - \widehat{\nabla}_Y (a[X, Z]) \\
 &= X(Y(a))Z + Y(a)[X, Z] + X(a).\widehat{\nabla}_Y Z + a.[X, \widehat{\nabla}_Y Z] - [X, Y](a).Z - a.\widehat{\nabla}_{[X,Y]} Z - Y(X(a))Z \\
 &\quad - X(a).\widehat{\nabla}_Y Z - Y(a).[X, Z] - a.\widehat{\nabla}_Y [X, Z] \\
 &= a.([X, \widehat{\nabla}_Y Z] - \widehat{\nabla}_{[X,Y]} Z - \widehat{\nabla}_Y [X, Z]) + (X(Y(a))Z - Y(X(a)).Z - [X, Y](a).Z) \\
 &= a([X, \widehat{\nabla}_Y Z] - \widehat{\nabla}_{[X,Y]} Z - \widehat{\nabla}_Y [X, Z]) \\
 &= a.(L_X \widehat{\nabla})(Y, Z).
 \end{aligned}$$

Nhận xét (2.3) thực chất khẳng định rằng $L_X \widehat{\nabla}$ là một ánh xạ song tuyến tính từ các môđun $F \times F \rightarrow F$.

Mệnh đề sau đây thiết lập mối quan hệ giữa độ xoắn T và liên thông ∇^a .

2.4. Mệnh đề

Với mỗi $a \in A$ thì $\nabla^a = (a - e).T + \nabla$.

Chứng minh: Với $\forall Y, Z \in F$, ta nhận được:

$$\begin{aligned}
 \nabla_Y^a Z &= a.\nabla_Y Z + (e - a).\widehat{\nabla}_Y Z \\
 &= a.\nabla_Y Z + (e - a)(\nabla_Z Y + [Y, Z]) \\
 &= (a - e)(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y - [Y, Z]) + \nabla_Y Z \\
 &= ((a - e)T + \nabla)(Y, Z). \\
 &\Rightarrow \nabla^a = (a - e).T + \nabla.
 \end{aligned}$$

2.5. Hệ quả

Giả sử $a \in A$ mà $(a - e)$ khả nghịch và b là phần tử nghịch đảo của $(a - e)$. Khi đó $T = b(\nabla^a - \nabla)$.

Từ hệ quả (2.5), ta nhận thấy rằng nếu A là một miền nguyên thì $\nabla = \nabla^{\frac{e}{2}}$.

Bây giờ ta thiết lập mối quan hệ giữa độ cong T ứng với liên thông tuyến tính ∇ và đạo hàm Lie của ∇^a .

2.6. Định lý

$$L_X \nabla^a = a.L_X \nabla + (e - a)L_X \widehat{\nabla} + X(a).T; \quad X \in F, a \in A.$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned}
 L_X \nabla^a (Y, Z) &= [X, \nabla_Y^a Z] - \nabla_Y^a [X, Z] - \nabla_{[X, Y]}^a Z \\
 &= [X, a \nabla_Y Z + (e - a) \hat{\nabla}_Y Z] - \nabla_Y^a [X, Z] - \nabla_{[X, Y]}^a Z \\
 &= a([X, \nabla_Y Z] - \nabla_Y [X, Z] - \nabla_{[X, Y]} Z) + (e - a)([X, \hat{\nabla}_Y Z] - \hat{\nabla}_Y [X, Z] - \hat{\nabla}_{[X, Y]} Z) \\
 &\quad + X(a) \nabla_Y Z + X(e - a) \hat{\nabla}_Y Z \\
 &= a(L_X \nabla)(Y, Z) + (e - a)(L_X \hat{\nabla})(Y, Z) + X(a) \nabla_Y Z + X(e) \hat{\nabla}_Y Z - X(a) \hat{\nabla}_Y Z
 \end{aligned}$$

Mặt khác:

$$X(e) = X(e.e) = 2X(e) \Rightarrow X(e) = 0; \forall X \in F.$$

Vậy:

$$\begin{aligned}
 (L_X \nabla^a)(Y, Z) &= a(L_X \nabla)(Y, Z) + X(a)(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y - [Y, Z]) + (e - a)(L_X \hat{\nabla})(Y, Z) \\
 \Rightarrow (L_X \nabla^a)(Y, Z) &= (a L_X \nabla + (e - a) L_X \hat{\nabla} + X(a) T)(Y, Z); \forall Y, Z \in F \\
 \Rightarrow L_X \nabla^a &= a L_X \nabla + (e - a) L_X \hat{\nabla} + X(a) T.
 \end{aligned}$$

2.7. Định nghĩa

Với $X \in F$, đạo hàm Lie theo hướng X của T , $\hat{T}$ và T^a tương ứng được ký hiệu bởi $L_X T$, $L_X \hat{T}$ và $L_X T^a$ và chúng được xác định bởi:

- $(L_X T)(Y, Z) = [X, T(Y, Z)] - T([X, Y], Z) - T(X, [Y, Z]); \forall Y, Z \in F.$
- $(L_X \hat{T})(Y, Z) = [X, \hat{T}(Y, Z)] - \hat{T}([X, Y], Z) - \hat{T}(X, [Y, Z]); \forall Y, Z \in F.$
- $(L_X T^a)(Y, Z) = [X, T^a(Y, Z)] - T^a([X, Y], Z) - T^a(X, [Y, Z]); \forall Y, Z \in F.$

2.8. Định lý

$$L_X \hat{T} = L_X \hat{\nabla} - L_X \nabla; \quad X \in F.$$

Chứng minh.

$$\begin{aligned}
 (L_X \hat{T})(Y, Z) &= [X, \hat{T}(Y, Z)] - \hat{T}([X, Y], Z) - \hat{T}(X, [Y, Z]); \forall Y, Z \in F. \\
 &= [X, \hat{\nabla}_Y Z - \hat{\nabla}_Z Y - [Y, Z]] - (\hat{\nabla}_{[X, Y]} Z - \hat{\nabla}_Z [X, Y] - [\hat{\nabla}_Y [X, Z] - \hat{\nabla}_{[X, Z]} Y - [Y, [X, Z]]]) \\
 &= [X, \hat{\nabla}_Y Z] - [X, \hat{\nabla}_Z Y] - \hat{\nabla}_{[X, Y]} Z + \hat{\nabla}_Z [X, Y] - \hat{\nabla}_Y [X, Z] + \hat{\nabla}_{[X, Z]} Y
 \end{aligned} \tag{1}$$

$$(L_X \widehat{\nabla})(Y, Z) = [X, \widehat{\nabla}_Y Z] - \widehat{\nabla}_{[X, Y]} Z - \widehat{\nabla}_Y [X, Z] \quad (2)$$

$$\begin{aligned} (L_X \nabla)(Y, Z) &= [X, \nabla_Y Z] - \nabla_{[X, Y]} Z - \nabla_Y [X, Z] \\ &= (L_X \widehat{\nabla})(Z, Y) \\ &= [X, \widehat{\nabla}_Z Y] - \widehat{\nabla}_{[X, Z]} Y - \widehat{\nabla}_Z [X, Y] \end{aligned} \quad (3)$$

Từ (1), (2), (3), ta thu được $(L_X \widehat{T})(Y, Z) = (L_X \widehat{\nabla} - L_X \nabla)(Y, Z); \forall Y, Z \in F$.

Sử dụng hệ thức của Sultanov [3; p.382] : $T^a = (2a - e)T$ và từ định nghĩa (2.7, c), ta nhận được mệnh đề sau đây:

2.9. Mệnh đề

$$L_X T^a = (2a - e)L_X T + 2X(a)T; \quad \forall X \in F; a \in A.$$

Chứng minh.

Với $\forall Y, Z \in T$, ta có:

$$\begin{aligned} (L_X T^a)(Y, Z) &= [X, T^a(Y, Z)] - T^a([X, Y], Z) - T^a(Y, [X, Z]) \\ &= [X, (2a - e)T(Y, Z)] - (2a - e)T([X, Y], Z) - 2(a - e)T(Y, [X, Z]) \\ &= (2a - e)([X, T(Y, Z)] - T([X, Y], Z) - T(Y, [X, Z])) + X(2a - e)T(Y, Z) \\ &= (2a - e).(L_X T)(Y, Z) + X(2a - e)T(Y, Z) \\ &= ((2a - e)L_X T + X(2a - e)T)(Y, Z); \forall Y, Z \in F \\ \Rightarrow L_X T^a &= (2a - e)L_X T + X(2a - e)T \\ &= (2a - e)L_X T + 2X(a)T. \end{aligned}$$

Từ mệnh đề (2.9), với $a = \frac{e}{2}$ thì cũng có $L_X T^a = 0$ và với $a = e$ thì $L_X T^e = L_X T$.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Arslan.B and Inceboz.H (2014), *A characterization of generadized Jordon derivations on Banach algebras*, Period. Math. Hung, vol. 69, pp. 139-148.
- [2] Nguyen Huu Quang, Kieu Phuong Chi and Bui Cao Van (2012) *The Lie derivation of k-current on the Lie group*, Lobasevski Journal of Math, vol. 133, no.1, pp. 1-11.
- [3] A.Ya.Sultanov (2010), *Derivations of linear algebras and linear connections*, Journal of Math Sciences, vol. 169, no.3, pp. 362-412.

SOME LIE DERIVATIONS PROPERTIES OF LINEAR CONNECTIONS ON ALGEBRAS

Nguyen Huu Quang, Do Thi Tuyet, Le Thi Thanh Ha

ABSTRACT

In this paper, we present the some Lie derivations properties of linear connections $\hat{\nabla}$ and ∇^a on algebra A .

Keywords: *Lie derivations, linear connections, algebras.*