

MỘT SỐ TÍNH CHẤT CO RÚT TUYỆT ĐỐI, CO RÚT LÂN CẬN TUYỆT ĐỐI TRONG LỚP CÁC KHÔNG GIAN METRIC COMPACT

Nguyễn Thị Nga¹, Phạm Chí Công²

TÓM TẮT

Trong bài báo này chúng tôi chứng minh một số tính chất và định lý về co rút tuyệt đối và co rút lân cận tuyệt đối trong lớp các không gian metric compact.

Từ khoá: *Co rút tuyệt đối, co rút lân cận tuyệt đối, không gian metric, không gian metric compact.*

1. ĐẶT VẤN ĐỀ

Về tính co rút tuyệt đối, co rút lân cận tuyệt đối trên không gian metric đã được Tạ Khắc Cư - Nguyễn Nhựt đưa ra tương đối đầy đủ trong [1]. Trong bài báo này chúng tôi chứng minh một số tính chất về co rút tuyệt đối trong lớp các không gian metric compact, đã được nêu nhưng chưa chứng minh.

Định nghĩa 1.1. ([1]). Ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ được gọi là r -ánh xạ nếu tồn tại ánh xạ $g : Y \rightarrow X$ là nghịch đảo phải của f nghĩa là $f \circ g : Y \rightarrow Y$ là ánh xạ đồng nhất trên Y .

Định nghĩa 1.2. ([1]). Giả sử $Y \subset X$, ánh xạ $f : X \rightarrow Y$ liên tục gọi là phép co rút nếu $f(x) = x, \forall x \in Y$. Khi đó ta nói f co X lên Y .

Phép co rút là một trường hợp riêng của r -ánh xạ.

Định nghĩa 1.3. ([1]). Tập con X_0 của không gian X được gọi là co rút của X nếu tồn tại phép co rút từ X lên X_0 .

Định nghĩa 1.4. ([1]). Tập con X_0 của không gian X được gọi là co rút lân cận của X nếu X_0 là co rút của tập mở U mà $X_0 \subset U$.

Định nghĩa 1.5. ([1]). Tập $A \subset X$ được gọi là co rút theo X vào tập $B \subset X$ nếu ánh xạ lồng $i : A \rightarrow X$ đồng luân với ánh xạ $f : A \rightarrow X$ sao cho $f(A) \subset B$. Nếu B chỉ gồm một điểm thì ta nói A co rút theo X . Trong trường hợp riêng $i : X \rightarrow X$ đồng luân với $f : X \rightarrow X$ mà $f(x) = a \in X$ thì ta nói X co rút điểm hay tự co rút.

Định lý 1.6. ([1]). Nếu X tự co rút thì mỗi r -ánh của nó cũng tự co rút.

Bây giờ, chúng ta xét các không gian tôpô Hausdorff đặc biệt, đó là các không gian metric. Ta viết $X \in M$ nếu X metric hóa được.

¹ Giảng viên khoa Khoa học Tự nhiên, Trường Đại học Hồng Đức

² Phòng Hành chính tổng hợp, Trường Đại học Hồng Đức

Định nghĩa 1.7. ([1]). Không gian X là co rút tuyệt đối, đối với tất cả các không gian metric nếu $X \in M$ và với mỗi đồng phôi $h: X \rightarrow h(X)$, $h(X)$ đóng trong Y thì mỗi tập $h(X)$ là co rút của Y . Khi đó ta viết $X \in AR(M)$ hay X là $AR(M)$ - không gian

Không gian X được gọi là co rút lân cận tuyệt đối đối với tất cả các không gian metric nếu $X \in M$ và với mỗi đồng phôi $h: X \rightarrow h(X)$, $h(X)$ đóng trong Y thì tập $h(X)$ là co rút lân cận của Y . Khi đó ta viết $X \in ANR(M)$ hay X là $ANR(M)$ - không gian.

Ta có các định lý sau:

Định lý 1.8. ([1]). Giả sử rằng không gian X là hợp của hai không gian X_1 và X_2 , X_0 là giao của hai không gian X_1, X_2 . Khi đó:

- (i) X_0, X_1, X_2 là $AR(M)$ - không gian thì X là $AR(M)$ - không gian.
- (ii) X_0, X_1, X_2 là $ANR(M)$ - không gian thì X là $ANR(M)$ - không gian.
- (iii) X_0, X là $AR(M)$ - không gian thì X_1, X_2 là $AR(M)$ - không gian.
- (iv) X_0, X là $ANR(M)$ - không gian thì $X_1, X_2 \in ANR(M)$ - không gian.

Định lý 1.9. ([1]). Tích đề các $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ là $AR(M)$ - không gian nếu và chỉ nếu X_n là $AR(M)$ - không gian, với mọi n .

Định lý 1.10. ([1]). Tích đề các $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ là $ANR(M)$ - không gian nếu và chỉ nếu mọi X_n là $ANR(M)$ - không gian và hầu hết X_n là $AR(M)$ - không gian.

Định lý 1.11. ([6]). X là $AR(M)$ - không gian khi và chỉ khi $X \in ANR(M)$ - không gian và X co rút điểm.

Định nghĩa 1.12. ([6]). Không gian X được gọi là co rút tuyệt đối hay là AR - không gian và viết là: $X \in AR$ - không gian nếu X compact (không gian metric compact) và X là $AR(M)$ - không gian.

Không gian X được gọi là co rút lân cận tuyệt đối hay ANR - không gian và viết là $X \in ANR$ - không gian nếu X compact và X là $ANR(M)$ - không gian.

Định lý 1.13. ([5]).

- (i) X là AR - không gian khi và chỉ khi X là r - ảnh của hình hộp Hinbe ($Q^{\omega} = [0,1]^{\omega}$).
- (ii) X là ANR - không gian khi và chỉ khi X là r - compact ảnh của tập con mở của hình hộp Hinbe.

Chú ý: r - compact ảnh là ảnh của r - ánh xạ và ánh xạ compact (nghĩa là biến một tập bị chặn thành tập tiền compact).

2. NỘI DUNG NGHIÊN CỨU

Tính chất 2.1. ([6]). Mỗi r - ảnh của AR -không gian (hoặc ANR - không gian) là AR - không gian (hoặc ANR - không gian).

Chứng minh.

(i) Mỗi r - ảnh của ANR - không gian là ANR - không gian.

Giả sử X là AR-không gian. Theo định lý 1.13 ([5]) ta có $X = r(Q^\omega)$, với $r: Q^\omega \rightarrow X$ là r - ánh xạ.

Giả sử $r': X \rightarrow r'(X)$ là r - ánh xạ. Khi đó ta có ánh xạ $r' \circ r: Q^\omega \rightarrow r'(X)$. Do r, r' là r - ánh xạ nên $r' \circ r$ cũng là r - ánh xạ. Như vậy $r'(X)$ là r - ảnh của hình hộp Hinde nên ta có $r'(X) \in \text{AR} - \text{không gian}$.

(ii) Mỗi r - ảnh của ANR - không gian là ANR - không gian.

Giả sử X là ANR - không gian. Theo định lý 1.13 ([5]) ta có $X = f(U)$, trong đó U mở $\subset Q^\omega$, f là r - ánh xạ, compact từ U lên X ($f: U \rightarrow X$). Giả sử $g': X \rightarrow g'(X)$ là r - ánh xạ. Khi đó $g' \circ f: U \rightarrow g'(X)$ là một r - ánh xạ, compact. Như vậy $g'(X)$ là r - ảnh, compact của tập con mở của hình hộp Hinde Q^ω . Nên ta có $g'(X) \in \text{ANR} - \text{không gian}$

Tính chất 2.2. ([6]). $X \in \text{AR-không gian}$ khi và chỉ khi $X \in \text{ANR-không gian}$ và X co rút điểm.

Chứng minh.

Giả sử $X \in \text{AR-không gian}$ suy ra X là $\text{AR}(M)$ - không gian và X compact. Theo định lý 1.11([6]) ta có X là $\text{AR}(M)$ - không gian và X co rút điểm. Do đó $X \in \text{ANR} - \text{không gian}$ và co rút điểm.

Ngược lại $X \in \text{ANR} - \text{không gian}$ và co rút điểm suy ra X là $\text{AR}(M)$ - không gian và X co rút điểm nên cũng theo định lý 1.11 ta suy ra X là $\text{AR}(M)$ - không gian. Kết hợp với X compact ta có $X \in \text{ANR} - \text{không gian}$.

Tính chất 2.3. ([6]). Mỗi ANR - không gian chỉ có hữu hạn thành phần liên thông.

Để chứng minh định lý trên ta cần bổ đề sau:

Bổ đề. Mỗi thành phần liên thông là tập đóng.

Giả sử L_{x_i} là thành phần liên thông của x_i trong $X \in \text{ANR} - \text{không gian}$. Hiển nhiên ta có bao hàm thức:

$$L_{x_i} \subset \overline{L_{x_i}} \quad (1)$$

Mặt khác như ta đã biết bao đóng của tập liên thông cũng là tập liên thông nên $\overline{L_{x_i}}$ là tập liên thông. Vì L_{x_i} là thành phần liên thông của x_i , tức nó là tập liên thông lớn nhất chứa x_i , do đó:

$$\overline{L_{x_i}} \subset L_{x_i} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có $\overline{L_{x_i}} = L_{x_i}$, tức L_{x_i} là tập đóng.

Chứng minh tính chất.

Giả sử ngược lại rằng X là ANR - không gian chứa vô số các thành phần liên thông L_{x_i} , $i \in I$. Khi đó $X \supseteq \bigcup_{i \in I} L_{x_i}$, $x_i \in X$. Vì L_{x_i} đóng trong X - compact suy ra L_{x_i} compact.

Với mỗi phủ mở $\{U_{x_i}^j\}_{j \in J}$ của L_{x_i} thì ta có $\left\{ \bigcup_{i \in J} U_{x_i}^j \right\}_{i \in I}$ $x_i \in X$, là phủ mở của X . Do

L_{x_i} compact nên từ phủ mở $\{U_{x_i}^j\}_{j \in J}$ luôn trích ra được một phủ con hữu hạn. Nhưng với phủ mở $\left\{ \bigcup_{i \in J} U_{x_i}^j \right\}_{i \in I}$ của X lại không thể trích ra được một phủ con hữu hạn, vì X chứa vô hạn các thành phần liên thông L_{x_i} . Như vậy X không compact. Điều này mâu thuẫn với giả thiết $X \in \text{ANR}$ - không gian.

Vậy X chỉ có hữu hạn các thành phần liên thông.

Tính chất 2.4. ([6]). *Mỗi ánh xạ liên tục từ AR - không gian vào chính nó luôn có điểm bất động.*

Trước hết ta chứng minh bổ đề sau:

Bổ đề ([5]). Q^ω có tính chất điểm bất động.

Thật vậy, do Q^ω là tập lồi nên với mọi $x, a \in Q^\omega$ ta có

$$f_t(x) = (1-t)x + ta, \text{ ta có } f_t(a) = a$$

Vậy $f_t(x)$ luôn có điểm bất động tức với mọi $t \in [0, 1]$ nối 2 điểm bất kỳ trong Q^ω bao giờ cũng tồn tại x_0 sao cho $f_t(x_0) = x_0$.

Lấy $f_t(x) = (1-t)x + tf(x)$, trong đó $f: Q^\omega \rightarrow Q^\omega$ là ánh xạ liên tục.

Ta có $(1-t)x_0 + tf(x_0) = x_0 \Leftrightarrow f(x_0) = x_0$.

Vậy x_0 là điểm bất động của f hay Q^ω có tính chất điểm bất động.

Chứng minh tính chất.

Giả sử X là AR - không gian. Theo định lý 1.13 tồn tại phép co rút $r: Q^\omega \rightarrow X$. Giả sử f là ánh xạ liên tục từ X vào X ($f: X \rightarrow X$). Khi đó xét ánh xạ $g = i \circ f \circ r: Q^\omega \rightarrow Q^\omega$ với $i: X \rightarrow Q^\omega$ là ánh xạ nhúng. Do Q^ω có tính chất điểm bất động nên tồn tại $x_0 \in Q^\omega$ sao cho $g(x_0) = x_0$. Mà $g(x_0) = ifr(x_0) = i(f(r(x_0))) = f(r(x_0))$ nên với $x_0 \in X$ ta có:

$$x_0 = g(x_0) = f(r(x_0)) = f(x_0)$$

(Do $r: Q^\omega \rightarrow X$ là r - ánh xạ tức $r(x_0) = x_0$). Vậy x_0 cũng là điểm bất động của f .

Định lý 2.5 ([6]). *Nếu hợp và giao hai cái compact là AR - không gian (hoặc ANR - không gian) thì mỗi một từ chúng là AR - không gian (hoặc ANR - không gian)*

Chứng minh.

Giả sử $X = X_1 \cup X_2 \in \text{AR}$ - không gian (hoặc ANR - không gian), $X_0 = X_1 \cap X_2 \in \text{AR}$ - không gian (hoặc ANR - không gian) suy ra X, X_0 là $\text{AR}(M)$ - không gian (hoặc $\text{ANR}(M)$ - không gian) nên theo định lý 1.8 ta có X_1, X_2 là $\text{AR}(M)$ - không gian (hoặc $\text{ANR}(M)$ - không gian).

Mặt khác theo giả thiết ta có X_1, X_2 compact nên $X_1, X_2 \in \text{AR}$ - không gian (hoặc ANR - không gian) suy ra định lý được chứng minh.

Định lý 2.6 ([6]). Tích đề các $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ là AR - không gian khi và chỉ khi mỗi không gian thành phần X_n là các AR - không gian.

Chứng minh.

Giả sử $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ là AR - không gian suy ra X là AR(M) - không gian và X compact.

Theo định lý 1.9 ta có X_n là AR(M) - không gian, $\forall n \in N^*$.

Mặt khác X compact nên X_n compact, $\forall n \in N^*$ (Vì $X_n = \varphi(X)$, φ là phép chiếu từ X xuống X_n). Do đó $X_n \in \text{AR} - \text{không gian}$, $\forall n \in N^*$.

Ngược lại giả sử $X_n \in \text{AR} - \text{không gian}$, với $\forall n \in N^*$ suy ra X_n là AR(M) - không gian. Cũng theo định lý 1.9 ta có X là AR(M) - không gian. Hơn nữa X_n compact, với $\forall n \in N^*$ nên theo định lý Tikhonốp ta có $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ compact.

Vậy $X \in \text{AR} - \text{không gian}$.

Định lý 2.7 ([6]). Tích đề các $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ là ANR - không gian khi và chỉ khi mỗi $X_n \in \text{ANR} - \text{không gian}$ và hầu hết các $X_n \in \text{AR} - \text{không gian}$.

Chứng minh.

Giả sử $X = \prod_{n=1}^{\infty} X_n$ là ANR - không gian suy ra X là ANR(M) - không gian và X compact. Theo định lý 1.10 ta suy ra X_n là ANR(M) - không gian và hầu hết các X_n là AR(M) - không gian. Vì X compact nên X_n compact với $\forall n \in N^*$.

Vậy điều kiện cần của định lý được chứng minh.

Ngược lại nếu mỗi $X_n \in \text{ANR} - \text{không gian}$ và hầu hết các $X_n \in \text{AR} - \text{không gian}$ dẫn đến X_n compact, X_n là ANR(M) - không gian và hầu hết các X_n là AR(M) - không gian. Khi đó cũng theo định lý 1.10 ta có X là ANR(M) - không gian. Do X_n compact với $\forall n \in N^*$ nên theo định lý Tikhonốp ta có X compact. Vậy $X \in \text{ANR} - \text{không gian}$.

Định lý 2.8 ([6]). Nếu ARN - tập X nằm trong không gian E^n thì $E^n \setminus X$ chỉ có hữu hạn thành phần liên thông.

Định lý 2.9 ([6]). Nếu AR - tập X nằm trong không gian E^n thì $E^n \setminus X$ liên thông đường với $n > 1$ và có 2 thành phần liên thông với $n=1$.

Chứng minh.

Để chứng minh 2 định lý trên ta sử dụng.

Mệnh đề ([1]). Giả sử $G \neq \emptyset$ là tập con mở, bị chặn của E^n , khi đó $X = E^n \setminus G$ không là co rút E^n và Bổ đề ([6]). Nếu A là tập compact của E^n , là co rút lân cận của nó thì $E^n \setminus A$ có hữu hạn thành phần liên thông.

Chứng minh định lý 2.8.

Giả sử U là tập mở trong E^n , $r: U \rightarrow X$ là phép co rút từ U lên X . Ta nhận thấy rằng ngoài U có hữu hạn thành phần liên thông của $E^n \setminus X$. Vì nếu như $E^n \setminus X$ có vô hạn thành phần liên thông thì tồn tại ít nhất một thành bị chặn G nằm trong U .

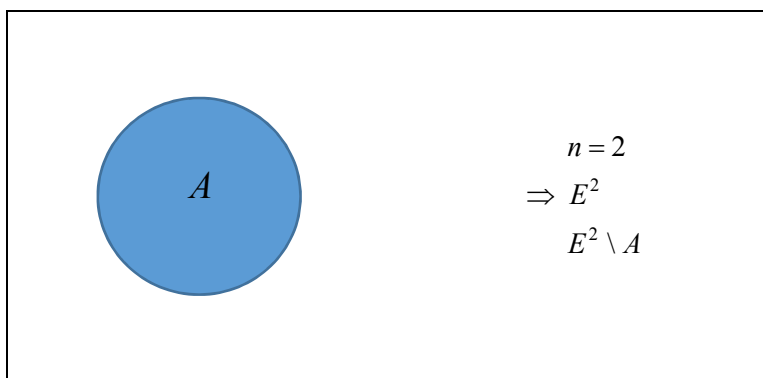
$$\text{Đặt: } r'(x) = \begin{cases} r(x) & \forall x \in G, \\ x & \forall x \in E^n \setminus G \end{cases}$$

thì ta có $r': E^n \rightarrow E^n \setminus G$ là phép co rút từ E^n lên $E^n \setminus G$. Điều đó mâu thuẫn với mệnh đề ở trên. Như vậy ta đã chứng minh xong định lý 2.8.

Bây giờ ta chứng minh định lý 2.9.

Do X là co rút của E^n (E^n là T_2 - không gian) nên X đóng trong E^n . X đóng, bị chặn nên suy ra $E^n \setminus X$ chỉ có một thành phần không bị chặn ($n > 1$). Thật vậy nếu tồn tại thành phần bị chặn của $E^n \setminus X$ thì mâu thuẫn với mệnh đề trên. Do đó $E^n \setminus X$ chỉ có một thành phần liên thông là chính nó.

Với $n=1$ thì $E^1 = R$ (đường thẳng thực), thì ta có mỗi co rút của $E^1 = R$ hoặc là một điểm hoặc là một đoạn thẳng suy ra $E^1 \setminus X$ có hai thành phần liên thông.



Hình 1. A là tập compact nằm trong mặt phẳng E^2

3. KẾT LUẬN

Bài báo đã đưa ra và chứng minh được một số tính chất co rút tuyệt đối, co rút lân cận tuyệt đối trên các không gian metric compact. Tuy nhiên sau khi hoàn thành bài báo chúng tôi tấy có một vấn đề được đặt ra như sau: nếu ta thay không gian metric compact bằng không gian metric tiền compact hoặc compact địa phương thì kết quả sẽ như thế nào? Vấn đề này chúng tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu trong thời gian tới.

TÀI LIỆU THAM KHẢO

- [1] Tạ Khắc Cư, Nguyễn Nhụy (1995), *Bài giảng lý thuyết co rút*, Nxb. Đại học Sư phạm Vinh, Tp. Vinh.
- [2] Nguyễn Văn Khuê (1999), *Không gian tôpô-độ đo và tích phân*, *Giải tích 3*, Nxb. Đại học Quốc Gia Hà Nội, Hà Nội.
- [3] Nguyễn Xuân Liêm (1996), *Tôpô đại cương, độ đo và tích phân*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.
- [4] Đỗ Văn Lưu (1999), *Giải tích hàm*, Nxb. Giáo dục, Hà Nội.
- [5] Trần Trung, Mai Xuân Thảo, Nguyễn Xuân Thuận, Hoàng Văn Thi (2010), *Giải tích hiện đại*, Nxb. Khoa học Tự nhiên và Công nghệ, Hà Nội.
- [6] K.Brsuk (1967), *Theory of retracts – Warsaw*.
- [7] Duke Math.L (1947), *An embedding for paracompact metric space*.
- [8] Fund. Math (1965), *On topological classification of complete linear metric spaces*, 250-288.
- [9] John L. Kelley (1973), *Tôpô đại cương* (Hồ Thuần, Hà Huy Khoái biên dịch), Nxb. Đại học và Trung học chuyên nghiệp Hà Nội, Hà Nội.
- [10] Schaefer H. (1971), *Topological vector spaces*. GTM 3. New York; Springer - Verlag.

SOME ABSOLUTE CONTRACTION AND ABSOLUTE NEIGHBORHOOD CONTRACTION PROPERTIES IN THE CLASS OF COMPACT METRIC SPACES

Nguyen Thi Nga, Pham Chi Cong

ABSTRACT

In this paper, we prove some absolute contraction and absolute neighborhood contraction properties in the compact metric spaces.

Keywords: *Absolute contraction, absolute neighborhood contraction, metric space, metric compact space.*